

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
CENTRE UNIVERSITAIRE « SALHI AHMED » DE NAAMA



INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE TECHNOLOGIE  
MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Energétique

Intitulé de Mémoire

Etude comparative entre la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies pour prédire la diffusion de la température dans un domaine rectangulaire

**Présenté par :**

CHACHOUA Amina

AGHA Asma

**Devant le jury composé de :**

Mr. BOUNOUA	MCB	Ctr Univ Naama	Président
Mr. BLABED Zakaria	MCA	Ctr Univ Naama	Encadreur
Mr. BEBSENOUSI Zakaria	MCA	Ctr Univ Naama	Examineur

**Année universitaire 2017-2018**



# *Dédicaces*

*Je dédie mes réussites passés et à venir :*

*Pour la personne la plus chère, la personne la plus*

*Proche qui mérite ce succès parce qu'elle est avec moi dans les moments les plus beaux et les plus difficiles a tout pour mon confort et mon bonheur <<Ma mère>>,*

*<< tu as sacrifié pour ton enfants, tu m'as donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier>>*

*Je prie Dieu de le garder*

- *À mon père pour votre soutien dans toute ma vie*
- *À la personne qui Seigneur, enseigne-moi et soutiens-moi*  
*Mehammad*
- *À mes grands-pères miséricordes de Dieu*
- *À mes grands-mères pour leur gentillesse et leur tendresse*
- *À mes frères abd elghani ,jaloule ,lotfi a mes oncles mes tantes*
- *À toute ma familles et mes amis, mes cousins et cousines*
- *À tous ceux qui me sont chers et qui sont aujourd'hui absents.*
- *A mon binôme ASMA, et a tous ceux qui ont contribué de pré ou de loin pour que ce projet soit possible ,je vous dit merci.*

*AMINA*



## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A ma source de bonheur :*

*Mon père, ma mère pour leurs amour, leur bonté, leur sacrifice, leurs encouragements perpétuels, leur soutien,*

*Puisse Dieu prolonger leur vie dans le bonheur.*

*A celui que j'aime beaucoup et qui ma setenu tout au long de ce projet : mon fiancé **IMAD EDDINE**, et bien sur a mes sœurs **FATIMA ZOÛRA** et **HADJER**, mon frère **AMINE**.*

*A toutes ma famille, et mes amis,*

*A mon binôme **AMINA**, et a tous ceux qui ont contribué de pré ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dit merci.*

**ASMA**

# Remerciements

*Après les réalisations d'un travail quelconque, il ne reste que la reconnaissance du mérite des hommes en l'occurrences nos valeureux professeurs elles Chachoua amina ,Agha asma remercent vivement leur professeur Mr Belabed Zakaria pour son assistance de qualité et ses orientations pédagogiques et techniques.*

*Ma gratitude va tout autant aux membres du jury pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profond respect.*

*D'autre part, nous remercions tous les éducateurs qui se sont succédé durant toute notre scolarité avec dévouement et compétence.*

*Nous 'adressons nos remerciements monsieur le directeur du centre universitaire Sali Ahmed ainsi que tout l'encadrement du centre, le directeur des études, le directeur d'instituas des sciences et technologie, chef de DPT bibliothécaires et administrateurs de la faculté, à tous ceux qui ont contribué à nos formation ets à tous ceux qui nos 'ont accompagnées, amis et proches, de prés ou de loin ces années*

## Résumé

Cette étude présente une simulation numérique par la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies pour étudier la diffusion de la température dans un domaine solide rectangulaire. Cette étude porte une étude comparative basée sur une variété des paramètres, à l'aide d'une programmation numérique de ces deux méthodes, les résultats obtenus sont comparés et discutés.

**Mots-clés :** méthodes numériques avancées, transfert thermique par conduction, plaque.

# ملخص

تعرض هذه الدراسة محاكاة عددية بواسطة طريقة العناصر المحددة وطريقة الفرق المحدد لدراسة تشتت درجة الحرارة في مجال صلب مستطيل .

تحمل هذه الدراسة دراسة مقارنة تستند إلى مجموعة متنوعة من المعلمات، باستخدام البرمجة الرقمية لهاتين الطريقتين، وتم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها ومناقشتها.

**الكلمات الرئيسية:** الطرق العددية المتقدمة، نقل الحرارة موصل، لوحة

# Abstract

This project presents numerical simulation by the finite element method and the finite difference method to study temperature scattering in a rectangular solid domain. This study carries a comparative study based on a variety of parameters, using a numerical programming of these two methods, the results obtained are compared and discussed.

**Keywords:** advanced numerical methods, conductive heat transfer, plate.

# Table Des Matières

Dédicace - Remerciement	
Résumé en trois langues	I
Table des Matières	II
Liste des Figures	III
Notations & Abréviation	IV
<b>Introduction Générale</b> .....	1

## Chapitre I : Généralités sur les Transferts Thermiques

I.1) Introduction.....	3
I.2) Domaines d'application: .....	3
I.2.1) Machine thermique: .....	3
I. 2.2) Echangeur de chaleur .....	4
I. 2.2.1) Principaux types d'échangeurs thermiques .....	4
I.2.3) Choix technologique.....	5
I. 3) Transfert thermique .....	5
I.3.1) La chaleur.....	5
I. 3.2) Flux de chaleur .....	6
I. 3 .3) La Température .....	7
I. 3.4) Unités de chaleur .....	8
I. 3.5) Champ thermique : .....	8
I. 3 .6) Gradient de température.....	8
I. 3 .7) Surface isotherme : .....	9
I. 3 .8) Flux thermique $\Phi$ :.....	9
I. 3 .9) Densité de flux thermique .....	9
I. 3.10) La conductivité thermique:.....	9
I. 3 .11) Lois de Fourier: .....	9
I. 3 .12) Formulation d'un problème de transfert de chaleur .....	10
I. 4) Modes de transfert de chaleur .....	11
I. 4.1) Introduction.....	11
I. 4.2) Conduction .....	11



I. 4.3) Convection: .....	12
I. 4.5) Régime d'écoulement .....	13
I. 4.6) Rayonnement :.....	14
I. 5) Equation deconservation.....	15
I. 6) Condition auxlimites.....	15

## **Chapitre II : Généralités sur les méthodes numériques et analytiques**

II.1) Introduction : .....	17
II.2) Méthode numérique.....	17
II.2.1) Le développement limité de Taylor.....	17
II.2.2) Méthode des Différences Finis (MDF).....	18
II.1.3) Méthode des Eléments Finis (MEF) :.....	22
II.1.4Méthode des Volumes Finis (MVF) :.....	23
II.2) Méthodes analytiques :.....	24
II.2.1) Le Modèle mathématique :.....	24
II.2.2 ) La formulation :.....	24
II.2.3) Corde vibrante.....	25
II.2.4) Propagation de la chaleur :.....	25
II.2.5) Equation de Laplace (ou du potentiel) :.....	25
II.2.6) Les méthodes de résolution :.....	25
II.2.6.a) Solutions générales :.....	26
II.2.6 .b) La solution générale d'une EDP non homogène :.....	26
II.2.6.c) Méthode de superposition des solutions:.....	26
II.2.6.d) Méthode de séparations de variables:.....	26
II.2.6.e) Méthodes des intégrales (semi analytique).....	27
II .3) Série de fourie.....	27
II.4) Transformation de la place.....	28

## **Chapitre III : formulations numériques par la MEF et MDF pour l'étude thermique dans un domaine rectangulaire**

III.1) introduction.....	29
III.2) L'équation de chaleur.....	29
III.3) Différence finies.....	29

III.4) Elément finis .....	34
III.4.2)Présentation d'élément utilisé dans cette étude .....	35
III.4.3)Formulation d'un élément fini quadrilatère à 4 nœuds : .....	36
III.4.4) interpolation élémentaire : .....	37

## **Chapitre IV :Résultats et validation**

IV.1) Introduction : .....	39
IV.2) Simulation par la méthode explicite .....	39
IV.3) Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte .....	43
IV.4) Comparaison de la méthode explicite avec la méthode implicite : .....	48
IV.5) Comparaison entre la MEF et MDF (explicite) .....	54
IV.5) Conclusions : .....	55
<b>Conclusion générale</b> .....	57
<b>Références Bibliographiques</b> .....	59
<b>Annexe</b> .....	60

# Liste des figures

N°	Titre	page
I.1	représentes d'application des machines thermique	4
I.2	représenté le flux de chaleur	6
I.3	Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre thermique.	7
I.4	Gradient de température	8
I.5	bilan énergétique	10
I.6	conduction dans un mur	12
I.7	convection dans un domaine	12
I.8	régime laminaire	13
I.9	régime turbulent	14
I.10	rayonnement thermique dans un domaine	15
II.1	Maillage de domaine régulier et irrégulier	18
II.2	Molécule aux nœuds internes et de frontières selon le type domaine.	19
II.3	Schémas de différences finies en avant	21
II.4	Exemple d'une cavité maillée	24
III.1	maillage de déférence finie	31
III.2	relation entre les systèmes d'équations.	35
IV.1	Effet de la géométrie a et b ou Lx et Ly a l'instant t=10s	39
IV.2	Effet de la géométrie a et b ou Lx et Ly a l'instant t=50s	36
IV.3	Effet du maillage $\Delta_x$ , $\Delta_y$ a l'instant t=10s ,t=20s	41
IV.4	Effet du maillage $\Delta_x$ , $\Delta_y$ a l'instant t=10s ,t=20s	41
IV.5	Effet du maillage $\Delta_t$ a l'instant t=1.2s ,t=2.4s	42
IV.6	Effet du maillage $\Delta_t$ a l'instant t=0.12s ,t=0.24s	42
IV.7	Effet de la conductivité a l'instant t=1.20s	43
IV.7	Effet de la conductivité a l'instant t=1.20s	43
IV.8	Effet de la conductivité a l'instant t=1.	43
IV.9	Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant t=0.2	44
IV.10	Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant t=0.3s	45

<b>IV.11</b>	Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant $t=0.4s$	<b>45</b>
<b>IV.12</b>	Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant $t=0.5s$	<b>46</b>
<b>IV.13</b>	Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant $t=0.6s$	<b>46</b>
<b>IV.14</b>	Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant $t=0.7s$	<b>47</b>
<b>IV.15</b>	Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant $t=0.8s$	<b>47</b>
<b>IV .16</b>	Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant $t=0.9s$ .	<b>48</b>
<b>IV.17</b>	Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant $t=1s$ .	<b>49</b>
<b>IV.18</b>	Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant $t=1.1s$ .	<b>49</b>
<b>IV.19</b>	erreur de la méthode explicite 1 pas du temps de la méthode implicite 1 pas du temps	<b>49</b>
<b>IV.20</b>	erreur de la méthode explicite 2 pas du temps de la méthode implicite 2 pas du temps	<b>50</b>
<b>IV.21</b>	erreur de la méthode explicite 3 pas du temps de la méthode implicite 3 pas du temps	<b>50</b>
<b>IV.22</b>	erreur de la méthode explicite 4 pas du temps de la méthode implicite 4 pas du temps.	<b>51</b>
<b>IV.23</b>	erreur de la méthode explicite 5 pas du temps de la méthode implicite 5 pas du temps	<b>51</b>
<b>IV.24</b>	erreur de la méthode explicite 6 pas du temps de la méthode implicite 6 pas du temps	<b>52</b>
<b>IV.25</b>	erreur de la méthode explicite 7 pas du temps de la méthode implicite 7 pas du temps	<b>52</b>
<b>IV.26</b>	erreur de la méthode explicite 8 pas du temps de la méthode implicite 8 pas du temps	<b>53</b>
<b>IV.27</b>	erreur de la méthode explicite 9 pas du temps de la méthode implicite 9pas du temps	<b>53</b>
<b>IV.28</b>	erreur de la méthode explicite 10 pas du temps de la méthode implicite 10 pas du temps	<b>54</b>
<b>IV. 29</b>	Comparaison entre la méthode MEF et MDF en fonction du maillage	<b>54</b>

# Liste des tableaux

N°	Titre	Page
<b>VI.1</b>	résultats de comparaison entre la méthode EF et DF ( $t=1$ s et $dt=0.01$ )	<b>54</b>

<b>Nomenclature et abréviation</b>
------------------------------------

**. Liste des symboles latins**

<b>Paramètres</b>	<b>Significations</b>	<b>Unités</b>
$T$	Température	[C°, k]
$t$	Temps	[s]
$H$	Coefficient de chaleur par convection	[W/m <sup>2</sup> .k]
$S$	Surface	[m <sup>2</sup> ]
$D$	Diamètre	[m]
$V$	vitesse de l'écoulement	[m /s]
$x(i)$	Coordonnée suivant x	[m]
$y(j)$	Coordonnée suivant y	[m]
$n1, n2, n3, n4$	Nœuds directeurs	[m]
$\frac{d}{dt}$	Dérivée partielle	
$\lambda$	Conductivité thermique	[W/m k]

**2. Liste des symboles**

$\Phi$	Flux de chaleur
$\Phi_g$	Flux de chaleur généré
$\Phi_{st}$	Flux de chaleur stocké
$\Phi_e$	Flux de chaleur entrant
$\Phi_s$	Flux de chaleur sortant
$\Delta$	Aire de l'élément triangulaire
$\varphi$	Densité de flux de chaleur
!	Factoriel

**3. Minuscules romaines & Majuscules romaines**

$q$	Débit
$G$	Eclairement
$N_i$	Fonction d'interpolation

#### 4. Liste du symbole

$\Sigma$	Somme
$\int$	Intégral
$\Pi$	Produit
$\square$	Matrice
$\square^T$	Matrice transposée
$\langle \rangle$	Vecteur ligne
$\{ \}$	Vecteur colonne
$\{ \}^T$	Transposé d'un vecteur
$\tilde{\phi}^e$	L'approximation

#### 5. Abréviations

MDF	Méthode des différences finis
MEF	Méthode des éléments finis
MVF	Méthode des volumes finis
EDP	Equations aux dérivées partielles
ATM	Atmosphérique (pression)

## **I**ntroduction générale

### **I) Introduction et problématique:**

La simulation numérique des phénomènes de transfert thermique, et plus particulièrement dans le domaine de énergétique, présente une thématique importante tant d'un point de vue académique qu'industrielle car elle concerne de nombreux domaines d'ingénierie. Sur le plan analytique peu de solutions sont disponibles dans la littérature pour la quantité énorme de problèmes de technologie, et surtout l'analyse des géométries compliquées. Ceci est dû à la complexité mathématique de tels problèmes.

La naissance et le développement de l'informatique au cours des années soixante a entraîné l'apparition des méthodes matricielles (discrétisation) puis le développement de codes numériques, s'adaptant à l'augmentation constante de la taille des systèmes traités. Ainsi on est aujourd'hui capable d'élaborer des modèles numériques performants pour prédire le comportement correct de phénomène de coup de transfert thermique. De même, l'informatique a beaucoup apporté au traitement de résultats expérimentaux, avec entre autres le développement de techniques d'analyse dans la simulation des problèmes de transfert thermique. Le présent travail à l'objectif de présenter une formulation simple basant sur la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis jumelée par un algorithme efficace pour analyser la diffusion de la température dans une plaque rectangulaire en régime temporelle, la prise en compte de l'aspect de la discrétisation du problème est alors indispensable afin de représenter exactement les conditions aux limites et/ou initiales à travers une étude paramétrique réalisée.

### **I.2) Organisation de mémoire :**

Après une introduction générale, cette étude est organisée en quatre (4) chapitres :

Dans **le premier chapitre**, nous présentons une recherche bibliographique détaillée consacrée les modes de transfert thermique, leur formulation mathématique, son évolution et les domaines d'application.



**Le deuxième chapitre** concerne les méthodes mathématiques principales et leurs formulations pour résoudre le problème des problèmes thermiques. Les procédures analytiques sont aussi présentées dans ce chapitre.

Une formulation d'un modèle numérique basée sur la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis est présentée dans **le chapitre trois**, où nous détaillons le passage de la formulation mathématique vers le modèle numérique pour l'analyse de ce phénomène, l'implantation dans le code développées aussi discutée dans ce chapitre.

**Le chapitre quatre** est réservé à l'application numérique et les résultats obtenus par le code développé dans cette étude sur des exemples analytiques et/ou numériques.

**Enfin, on** résume les différentes conclusions obtenues et des recommandations pour des travaux futurs.

# Chapitre I

## Généralités sur les Transferts Thermiques

# C

## hapitre 1: Généralités sur les Transferts Thermiques

### I.1) Introduction

La thermodynamique nous a montré qu'elle est essentiellement basée sur deux principes mesurant la variation d'énergie entre un état initial et un état final. Dans la majorité des cas, cette variation est due à des échanges de travail et thermique (chaleur). Pratiquement, le travail s'applique sur les fonctions d'états qui ont la propriété de ne dépendre que des états initial et final. Ainsi on n'étudie pas la nature et la durée de l'interaction du système avec l'extérieur qui est à l'origine de la variation de l'état du système. Lorsqu'on parle de « transferts thermiques », on cherche à expliquer la façon dont les transferts de chaleur se font ainsi que leur vitesse.

Le second principe de la thermodynamique spécifie que le transfert de chaleur se fait du corps chaud vers le corps froid, ou de façon équivalente d'une température élevée vers une température plus basse. Le système ne sera donc pas en équilibre thermique durant le transfert. L'approche qu'on va poursuivre est essentiellement phénoménologique, c'est à dire d'origine expérimentale, et macroscopique. Ainsi on parle de transfert thermique pour décrire un échange de chaleur lié à une différence de température. Plusieurs modes de transfert vont être étudiés mais dans tous les cas on peut définir la puissance transmise

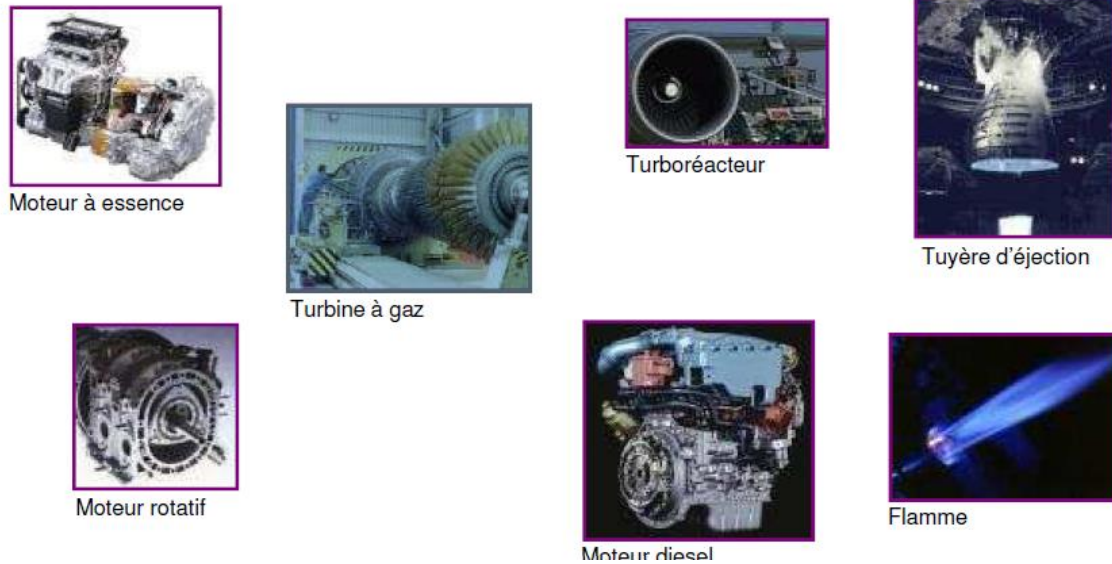
### I.2) Domaines d'application:

#### I.2.1) Machine thermique:

Est un dispositif fonctionnant en cycle et échangeant de l'énergie par transfert thermique et par travail avec l'extérieur dans les machines thermique on peut trouver de modèle :

- Une machine motrice est une machine thermique dont le but est de fournir véritablement de l'énergie par travail à l'extérieur.

- Une machine réceptrice est une machine qui reçoit véritablement de l'énergie par travail de la part de l'extérieur.



**Figure I.1** : représentés d'application des machines thermique

## I. 2.2) Echangeur de chaleur

Un échangeur de chaleur est un système qui permet de transférer un flux de chaleur d'un fluide chaud à un fluide froid à travers une paroi sans contact direct entre les deux fluides.

Le matériau composant l'échangeur thermique doit être le plus conducteur possible afin de limiter les pertes thermiques et favoriser l'échange.

Pour que l'échange soit possible, les deux fluides devront avoir une température différente : on parle d'écart de température, de delta de température ( $dT$ ) généralement exprimé en Kelvin (K) ou en degrés Celsius ( $^{\circ}C$ ).

### I. 2.2.1) Principaux types d'échangeurs thermiques

- Les échangeurs par mélange ou à contact direct
- Fluide intimement mélangé
- les désurchauffeurs de vapeur
- les dégazeurs
- les tours de refroidissement à convection naturelle ou forcée

- les ballons de détente de purges
- Les régénérateurs ou les échangeurs discontinus
- La surface d'échange est alternativement mise en contact
- avec le fluide froid et le fluide chaud

### **I. 2.2.1.a) Les échangeurs continus**

Les deux fluides circulent de manière continue de part et d'autre de la surface d'échange

- échangeurs tubulaires
- échangeurs à plaques
- échangeurs à ailettes

### **I.2.3) Choix technologique**

La sélection de la meilleure technologie est liée :

- Au programme thermique (températures voulues, rendement...)
- A la nature des fluides
- A l'application du client
- Aux contraintes d'encombrement et de maintenance...

La prise en compte de l'ensemble de ces éléments permet de définir le type d'échangeur (échangeurs à plaques, échangeurs tubulaires, échangeurs Plautulaire...) et les matériaux utilisés. Parfois, c'est l'obligation d'utiliser un matériau spécifique qui va définir le choix du type d'échangeur (ex : le titane obligatoire sur une application d'eau de mer n'est pas utilisable sur tous les types d'échangeurs).

## **I. 3) Transfert thermique**

### **I.3.1) La chaleur**

En physique, on appelle chaleur une forme particulière de l'énergie. Cette équivalence de la chaleur et du travail constitue le premier principe de la thermodynamique. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité: le joule [1].

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température.

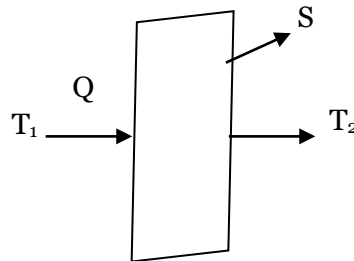
Le transfert de chaleur d'une partie d'une substance à une autre partie, ou d'un corps à un autre corps, s'effectue sous forme d'énergie cinétique d'agitation moléculaire désordonnée. Ce transfert est le fait d'une différence de température entre les deux corps. La chaleur se propage spontanément du corps ayant la température la plus élevée vers celui ayant la température la plus basse, élevant ainsi la température de ce dernier, tout en abaissant la température du premier, dans la mesure où le volume des deux corps reste constant. Ceci constitue le second principe de la thermodynamique.

Ce second principe met en évidence la notion d'irréversibilité : La chaleur ne pourra pas se propager d'un corps froid vers un corps chaud, sauf si on fournit un travail [1].

### I. 3.2) Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur [2]:

$$q = \frac{1}{S} \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{w /m}^2) \quad (\text{I.1})$$



**Figure I .2 :** représenté le flux de chaleur

Où  $S$  est l'aire de la surface.

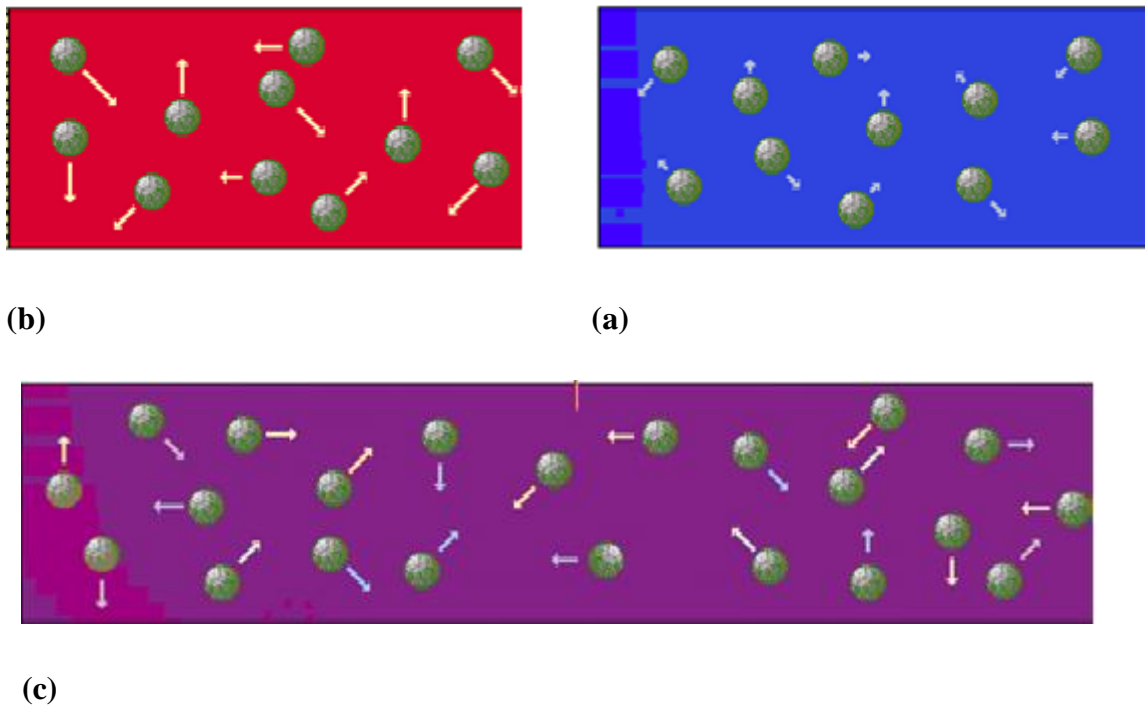
On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface  $S$  par unité de temps:

$$\varphi = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{I.2})$$

### I. 3 .3) La Température

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu.

Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température. On dit alors qu'on a atteint l'équilibre thermique voir figure (I.3) [1].



**Figure .I.3 :** Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre thermique.

**a:** Gaz à basse température

**b :** gaz a température élevée

**c :** mélange de deux gaz (a)+(b)

La température est une propriété thermodynamique du corps et mesure l'agitation microscopique de la matière. Selon la théorie cinétique, la température d'un corps est

fonction de l'énergie cinétique moyenne de translation de ses molécules. L'énergie cinétique d'un corps est nulle à une température appelée zéro absolu [1].

### I. 3.4) Unités de chaleur

On a vu qu'en physique, la quantité de chaleur est exprimée dans les mêmes unités que l'énergie et le travail, à savoir en joules (J). On utilise également la calorie (Cal), définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 g d'eau de 14,5 °C à 15,5 °C sous une pression de 1 ATM.

L'énergie mécanique peut être convertie en chaleur par frottement, et le travail mécanique nécessaire pour produire une calorie s'appelle «l'équivalent mécanique de la calorie» [1]. On a : 1 Cal = 4,1855 J.

### I. 3.5) Champ thermique :

On peut définir en chaque point  $M$  d'un corps solides, liquide ou gazeux, une température  $T(M, t)$ . Lorsque la température dépend du temps, on dit que le régime thermique est non stationnaire (variable), dans le cas contraire, on dit qu'il est stationnaire (permanent).

### I. 3.6) Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

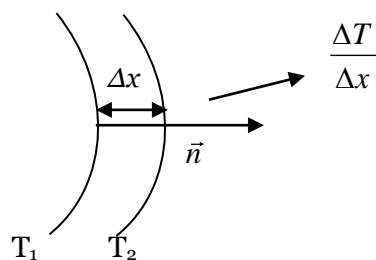


Figure I.4 : Gradient de température

On appelle gradient cette variation de la température : de façon générale :

$$\vec{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{I.3})$$



**I. 3 .7) Surface isotherme :**

Tous les points de cette surface ayant à chaque instant la même température, quantité de chaleur, flux et densité de flux thermique.

Soit un corps chauffé de manière uniforme sur toute sa surface (A)

Soit  $dQ$  la quantité de chaleur échangée entre ce corps.

**I. 3 .8) Flux thermique  $\Phi$ :**

La puissance échangée par la surface S du plancher est donné par :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{I.4})$$

**I. 3 .9) Densité de flux thermique :**

La puissance échangée par une surface unité de ce corps est donné par :

$$\varphi = \frac{dQ}{Adt} = \frac{\Phi}{A} \quad (\text{I.5})$$

**I. 3.10) La conductivité thermique:**

C'est flux de chaleur qui traverse une surface unitaire quand le gradient de température est égal à l'unité. La conductivité thermique dépend de : la nature chimique du matériau, la nature de la phase considérée (solide, liquide, gaz), la température.

Lorsque les écarts de température ne sont pas élevée, on peut considérer, avec une précision suffisante, ( $\lambda$ ) comme une constant pour un milieu donné. La résistance thermique d'un matériau est inversement proportionnelle à sa conductivité ( $\lambda$ ). Dans le vide, la conductivité thermique est évidemment nulle puisque en l'absence de matière les chocs sont inexistant.

**I. 3 .11) Lois de Fourier:**

Il existe une relation linéaire entre la densité du flux thermique et le gradient de température. En tout point d'un milieu isotrope, le vecteur de densité de flux thermique est proportionnelle au gradient de la température  $T$  est la conductivité ( $\lambda$ ) du milieu.

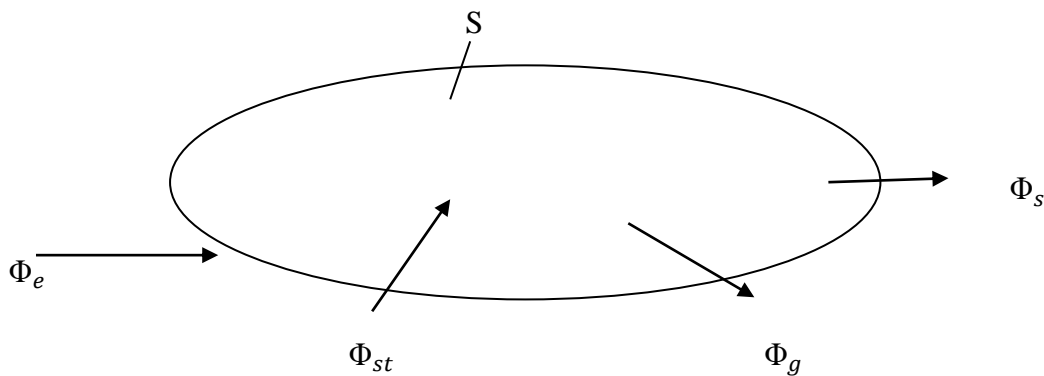
Donc la loi locale de Fourier est :

$$\Phi = -\lambda \text{ grad } T \quad (\text{I.6})$$

### I. 3 .12) Formulation d'un problème de transfert de chaleur

#### I. 3 .12.1) Bilan d'énergie

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir le bilan des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être :



**Figure I.5** : bilan énergétique

Il y a quatre flux de chaleur principaux :

$\Phi_{st}$ : Flux de chaleur stocké.

$\Phi_g$ : Flux de chaleur généré

$\Phi_e$  : Flux de chaleur entrant.

$\Phi_s$ : Flux de chaleur sortant.

Si on applique le premier principe au système qui décrit le bilan de conservation de l'énergie on obtient :

$$\Phi_e - \Phi_s + \Phi_g = \Phi_{st} \quad (\text{I.7})$$

#### I. 3 .12.2) Expression des flux d'énergie

Il faut maintenant établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, nous obtiendrons l'équation différentielle dont la résolution permettra de connaître l'évolution de la température en chaque point du

système. Puisque il y a trois modes de transfert de chaleur il y a trois expressions pour le flux de chaleur.

#### **I. 4) Modes de transfert de chaleur**

##### **I. 4.1) Introduction**

Le transfert de chaleur est défini par la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de températures. Le transfert de chaleur est régi, non seulement par une relation unique, mais, plutôt par une combinaison de différentes lois physique indépendantes.

On distingue, généralement, trois modes de transfert :

- Par conduction,
- Par convection,
- Par rayonnement.

Chacun de ces modes étant lui-même lié à un processus physique bien déterminé, et sont régis par des lois bien spécifiques.

##### **I. 4.2) Conduction**

La conduction est une transmission de chaleur dans la masse d'un milieu matériel, les zones chaudes cédant de la chaleur à celles qui le sont moins. C'est le cas lorsqu'on chauffe l'extrémité d'une barre [4].

Au plan corpusculaire, l'interprétation est la suivante: une zone chaude est occupée par des particules à vitesse élevée, par définition même de la température. Le mouvement brownien fait constamment passer des particules d'une zone à l'autre ; mais entre zones à températures inégales, les particules ont des énergies cinétiques différentes ; le brassage a pour effet de transférer de l'énergie cinétique d'agitation, des zones chaudes vers celles qui le sont moins. La manifestation macroscopique en est un transfert de chaleur. C'est donc un mécanisme de chocs qui intervient [4].

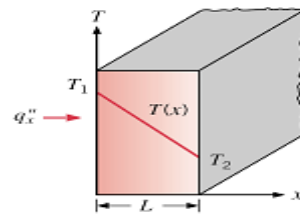


Figure I.6 : conduction dans un mur

$$\dot{Q} = qS = -\lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (\text{I.7})$$

### I. 4.3) Convection:

La convection est un mode de transfert d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Elle apparaît lorsqu'un fluide, liquide ou gaz, est en mouvement. La convection intervient, en particulier, dans les échanges thermiques entre un milieu solide et un fluide en mouvement. On distingue deux formes de convection:[2]

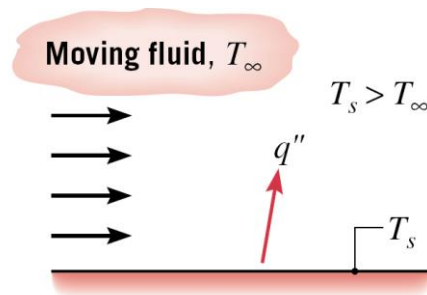


Figure I.7: convection dans un domaine

#### I. 4.3.a) Convection libre (naturelle) :

Dans la quelle le mouvement du fluide est crée par des différences de densité. Elles mêmes dues à des différences de températures existantes dans le fluide.

#### I. 4.3.b) Convection forcée :

Dans la quelle le mouvement du fluide du à l'action d'un pope ou d'un ventilateur.

**I. 4.4) Lois de Newton :**

Il y a plusieurs lois à utiliser pour résoudre les problèmes relatifs à la convection, permis ces lois, on applique la loi de Newton qui exprime le flux moyen  $\phi$  échangé entre un solide et un fluide à travers leur surface de contact  $A$  :

$$\phi = h A (T_s - T_f) \quad (1.8)$$

**I. 4.5) Régime d'écoulement**

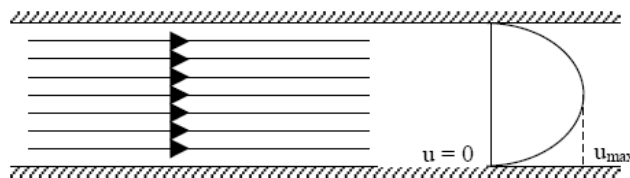
Compte tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire de considérer le régime d'écoulement. Considérons à titre d'exemple l'écoulement d'un fluide dans une conduite :

**I. 4.5.a) régime laminaire :**

L'écoulement s'effectue par couches pratiquement indépendantes.

Les échanges de chaleur s'effectuent donc :

- Par conduction uniquement si l'on considère une direction normale aux filets fluides.
- Par convection et conduction (négligeable) si l'on considère une direction non normale aux filets fluides.



**Figure I.8 :** régime laminaire

**I. 4.5.b) En régime turbulent :**

L'écoulement n'est pas unidirectionnel, L'échange de chaleur dans la zone turbulente s'effectue par convection et conduction dans toutes les directions. On vérifie que la conduction est généralement négligeable par rapport à la convection, la turbulence augmente le flux de chaleur échangé entre le fluide et la paroi.



**Figure I.9** régime turbulent

Le changement de régime est généralement dû à l'augmentation d'un certain paramètre (vitesse, température) au dessus d'une valeur critique on quantifie cette valeur critique par des nombre adimensionnels par exemple, le nombre de Reynolds (en convection forcée)

$$Re = VD/v \quad (I.9)$$

V: vitesse de l'écoulement; D: diamètre de la conduite; v: viscosité dynamique. Par exemple pour le cas de l'écoulement dans les conduites;  $Re_c = 2300$ .

$Re < 2300$  l'écoulement est laminaire.

$Re > 2300$  l'écoulement est turbulent. [6]

#### I. 4.6) Rayonnement :

Le rayonnement thermique est le mode de transmission par lequel la chaleur se transmet d'un corps à haute température à un autre froid et ou, les deux corps sont séparés par un milieu. Il s'agit de l'air ou du vide. Dans la matière, les charges sont soumises à des mouvements oscillatoires à cause de l'effet de l'agitation thermique et des forces électriques internes ou pour toute cause (radioactivité). Ce mouvement oscillatoire génère des ondes électromagnétiques. Le terme de rayonnement désigne tout transfert d'énergie par ces ondes caractérisés par leur fréquences ou par leur longueurs d'ondes. L'énergie transmise par rayonnement est appelée chaleur rayonnée. L'énergie rayonnante se propage à la vitesse de la lumière. La seule différence entre le rayonnement thermique et la lumière est par leurs longueurs d'ondes. [2]

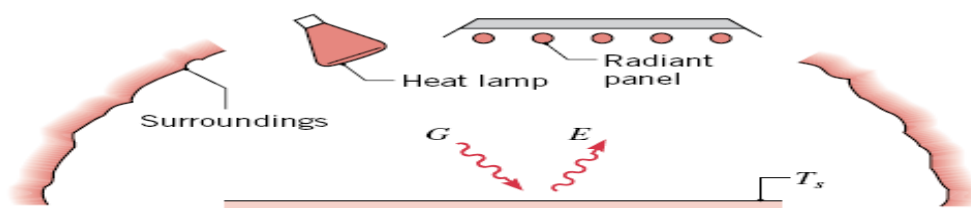


Figure I.10 : rayonnement thermique dans un domaine

**I. 4.6.a) Loi fondamentale du rayonnement thermique :**

La loi de STEFAN-BLTZMAN exprime que le flux d'énergie radiante émise par une surface idéale est proportionnel à la quatrième puissance de la température absolue  $T$  de la surface. Est donnée par:

$$q = \sigma AT^4 \quad (\text{I.10})$$

Les trois mécanismes de transfert de la chaleur sont [5] :

- **Conduction** : transfert dans la masse.
- **Convection** : transfert par transport.
- **Rayonnement** : transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée. A cela, il faut ajouter le changement d'état qui dissipe ou absorbe de la chaleur.

**I. 5) Equation de conservation**

Soit un domaine  $D$  quelconque et  $T$ , sa frontière. Dans la suite du rapport, nous allons chercher à calculer la température  $T$  en tout point de  $D$  et le flux  $\phi$  traversant  $T$ . Notre point de départ est une équation de conservation. L'équation de conservation est de la forme.

**I. 6) Condition aux limites**

Pour résoudre une équation différentielle régissant un domaine, il nous faut connaître les conditions aux limites que l'on applique sur les frontières. Ces conditions aux limites peuvent être de différents types:

**Fourier** : le flux appliqué sur la frontière est proportionnel à la différence de température entre l'extérieur et l'intérieure du corps.

$$\phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_{\infty}) \quad (\text{I.11})$$

**Dirichlet** : la température est imposée sur la frontière.

$$T = TP \quad (\text{I.12})$$

**Neumann** : Le flux appliqué sur la frontière est imposé.

$$\Phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \Phi^p \quad (\text{I.13})$$



## CHAPITRE II

# Généralités sur les méthodes numériques et analytiques

# C *HAPITRE II: Généralités sur les méthodes numériques et analytiques*

## II.1) Introduction :

Les modèles mathématiques des sciences et des techniques se présentent très souvent sous la forme de système d'équations différentielles qui lient des fonctions inconnues à leurs dérivées partielles.

Des conditions initiales et des conditions limites sont en général requises pour compléter le modèle. Par exemple, la loi physique de la conservation de l'énergie peut s'exprimer comme une équation différentielle de la température, fonction de la position et du temps.

Pour tirer une information pertinente sur le processus physique modélisé, il est essentiel de trouver la fonction satisfaisant l'équation différentielle et les conditions aux limites. Il s'agit donc de résoudre un problème différentiel aux conditions aux limites.

## II.2) Méthode numérique

### II.2.1) Le développement limité de Taylor

La série de Taylor est basée sur le résultat mathématique suivant : toute fonction  $f(x)$  peut

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1} \quad (\text{II.1})$$

être exprimée à l'aide d'un polynôme ayant un nombre infini de termes.

C'est le développement en série de cette fonction autour d'un point connu  $x_0$  voisin de  $x$  [7]:

Où  $f^{(n)}(x_0)$  est la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la fonction au point  $x = x_0$  et  $R_{n+1}$ , le reste de la série

$$\text{a pour expression } R_{n+1} = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (\text{reste de Lagrange}) \quad x_0 \leq \xi \leq x_0 + h$$

### II.2.2) Méthode des Différences Finis (MDF)

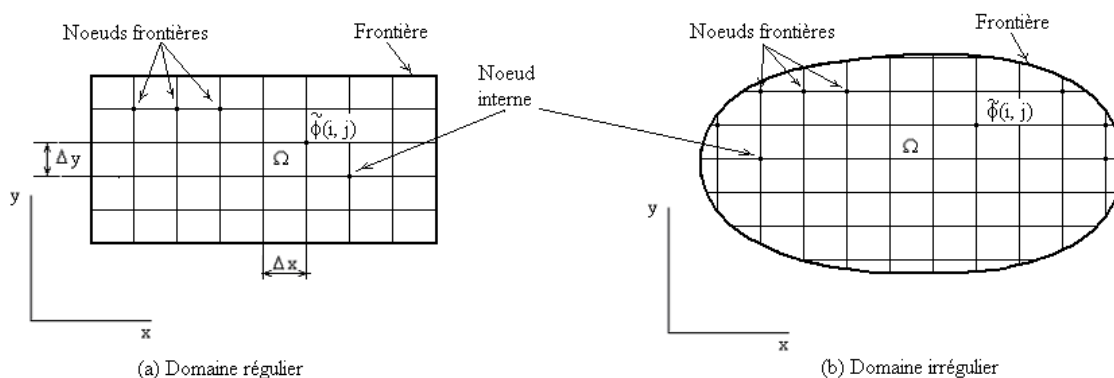
La méthode des différences finies est basée sur l'approximation des fonctions dérivées apparaissant dans les équations de formulation du problème.

Les fonctions dérivées sont écrites sous une forme approchée en utilisant le développement limité de Taylor. L'équation aux dérivées partielles est ainsi approchée par une équation aux différences finies. Cette équation est écrite ou projetée en un point du maillage sous forme de schéma.

Plusieurs types de schémas aux différences finies sont utilisés ; différences finies en avant, en arrière et centrées. Ces schémas, ayant des précisions différentes, sont utilisés selon le problème rencontré.

La méthode des différences finies utilise une discrétisation géométrique ou maillage du domaine  $\Omega$  (figure II.1) Le domaine peut être aussi bien régulier (Figure II.1 a) qu'irrégulier (Figure II.1).

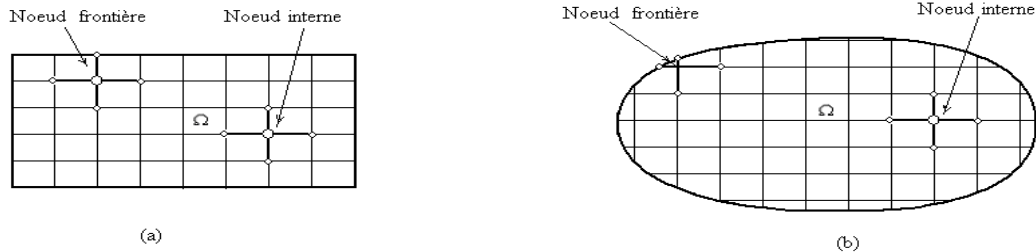
L'équation aux dérivées partielles est approchée localement selon la formule choisie (différences finies, en avant ou en arrière) en tout point, ou nœud, du maillage du domaine  $\Omega$ . On obtient alors une molécule donnant le schéma aux différences finies (Fig. 1.7). La solution recherchée  $\tilde{\phi}(i, j)$  est rattachée au nœud  $(i, j)$  en question (nœud central de la molécule)[12].



**Figure II.1** : Maillage de domaine régulier et irrégulier

A cause du changement des pas de discrétisation aux nœuds de frontières  $\Delta x \rightarrow \alpha \Delta x$  et  $\Delta y \rightarrow \beta \Delta y$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant des coefficients de correction du pas, connus, inférieurs à 1, la

molécule est reformulée pour les nœuds aux frontières dans le cas où le domaine est irrégulier (Fig II. 1).



**Figure II .2 :** Molécule aux nœuds internes et de frontières selon le type domaine.

On obtient les équations algébriques aux nœuds internes et aux nœuds de frontières.

La résolution du système d'équations algébriques donne la solution recherchée du problème,  $\tilde{\phi}(i, j)$  en tout nœud  $(i, j)$  du maillage.

La dérivée d'une fonction  $f$  en un point de coordonnées  $x$ ,  $f'(x)$  est définie par :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{II.2})$$

Elle est représentée par la pente de la tangente  $T$  (figure II.1) à la courbe  $f$  en ce point  $(x, f(x))$ . Le second membre de l'équation (II.2) sera une approximation raisonnable de  $f'(x)$  pour un intervalle suffisamment petit mais fini.

On utilise le développement de Taylor pour donner une approximation de la dérivée première définie sur un intervalle fini.

La série de Taylor peut être écrite pour chaque point autour duquel le développement de la fonction a lieu[13].

## II.2.a) Expression des dérivées premières par la méthode des différences finies

### II.2.a.1) différences finies en avant :

On considère le développement de la fonction  $f(x+h)$  en série de Taylor au point  $x+h$ :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Soit :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x) - \dots \quad (\text{II.4})$$

Ou sous forme plus compacte :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (\text{II.5})$$

L'équation (II.5) représente l'expression de la dérivée première écrite par un schéma de différences finies en avant (ou progressives).

La notation  $O(h)$  représente l'erreur de troncature entre la valeur exacte et la valeur calculée par différences finies de la dérivée première

$$O(h) = -\frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x) - \dots \quad (\text{II.6})$$

Cette erreur est de l'ordre de  $h$  (de l'ordre de l'exposant le plus petit de  $h$ ),  $h$  est le pas de discrétisation.

Pour un domaine discrétisé en un nombre  $m$  de points, l'équation (II.6) s'écrit sous forme indicelle :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad i=1, m-1 \quad (\text{II.7})$$

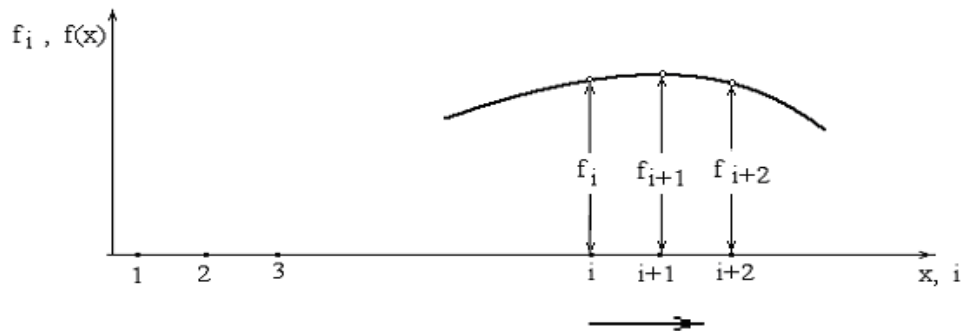
Avec les notations suivantes :

$$f'_i = f'(x)$$

$$x = ih$$

$$f_i = f(x)$$

$$f_{i+i} = f(x+h) \text{ Etc...}$$



**Figure II.3 :** Schémas de différences finies en avant

### II.I.a.2) différences finies en arrière :

On considère l'expansion de la série de Taylor de la fonction  $f(x-h)$  au point  $x-h$ :

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \dots \quad (\text{II.8})$$

L'équation 2.10 permet d'obtenir la dérivée première en utilisant un schéma de différences finies en arrière (ou régressives):

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x) \quad (\text{II.9})$$

Soit

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (\text{II.10})$$

Où l'erreur de troncature est :

$$O(h) = \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x) \quad (\text{II.11})$$

### II.I.2.a.3) différences finies centrées :

L'élimination de  $f(x)$  des équations (II.5) et (II.10) permet d'obtenir la dérivée première en utilisant un schéma de différences finies centrées:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x) - \dots \quad (\text{II.12})$$

Soit :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (\text{II.13})$$

L'erreur  $O(h)$  donnée par

$$O(h) = -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(x) - \dots \quad (\text{II.14})$$

Est de l'ordre de  $h^2$ . Ainsi la dérivée première obtenue par différences finies centrées est plus précise que le résultat obtenu par les deux autres méthodes (en avant et en arrière).

### II.1.3 Méthode des Éléments Finis (MEF) :

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode est que sa formulation utilise des procédés standards qui se répètent au cours de la résolution de problèmes de nature différente.

La méthode utilise une formulation intégrale de type Galerkin. Les fonctions de base de la méthode de Galerkin sont remplacées par des fonctions de forme standard.

Le domaine  $\Omega$  est discrétisé géométriquement en un nombre fini de sous domaines. La forme intégrale est alors construite sur ces sous domaines qu'on appelle éléments finis. Ces éléments ont des formes standard. On a donc une bibliographie d'éléments connus. Les fonctions de forme deviennent alors spécifiques à ces éléments. Les éléments sont formés par un certain nombre de points appelés points nodaux qui interconnectent les éléments. Le domaine global est formé de l'union des éléments finis interconnectés entre eux par les nœuds.

L'approximation  $\tilde{\phi}^e$  est propre à chaque élément. C'est une interpolation de la solution exacte aux points nodaux de l'élément. La transformation des équations différentielles en système d'équations algébriques se fait au niveau de chaque élément fini. A cette étape on parle de calcul élémentaire. Une technique d'assemblage permet d'obtenir alors le système d'équation algébrique sur le domaine global  $\Omega$ . Les inconnues sont les variables nodales. L'incorporation des conditions limites au niveau des équations algébriques permet de trouver la solution représentée par le vecteur nodal global [13].

#### **II.1.4 Méthode des Volumes Finis (MVF) :**

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation. Elle est utilisée, en particulier en mécanique de fluide. Depuis, les méthodes des volumes finis a connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en transferts thermiques, mais aussi pour la modélisation d'autre branche de l'ingénierie scientifique: mécanique de fluide,

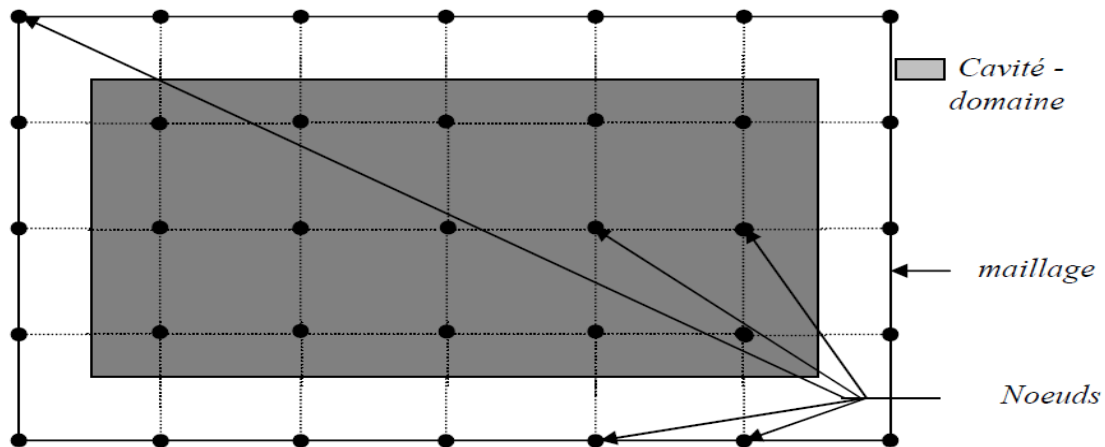
L'électromagnétisme.

Soit un domaine discrétisé, en chaque point du maillage, on définit un volume élémentaire entourant ce point de calcul. Le domaine est ainsi pavé de volume finis. Les équations différentielles locales sont intégrées sur chaque volume. On les approxime ensuite par des séries de Taylor tronquées (ordre un : approximation linéaire). Nous 'avons pu qu'à résoudre le système ainsi formé [13].

##### **II.1.4.a) Discrétisation**

La discrétisation du domaine ne se fait pas de façon quelconque, si nous voulons obtenir une répartition de température correcte, nous sommes obligés de tenir compte de certaines particularités du corps. Certaines zones possédant des propriétés physiques fort gradient, doivent être maillées de façons différentes. Plus le gradient est importante plus le maillage doit être fin. On obtient ainsi. Un maillage non uniforme mais adapté au domaine. Une discrétisation fine donnera des résultats beaucoup plus précisés qu'un maillage gros, mais demandera plus de place en mémoire et de temps de calcul. Pour introduire des conditions aux limites sur les frontières, on augmente le maillage d'autant de nœuds que de températures de flux imposé. La figure (1) représente un style de domaine maillé. [12][10].





**Figure. II.4 :** Exemple d'une cavité maillée

## II.2) Méthodes analytiques :

Lors de la résolution d'un problème physique par les méthodes analytiques, on suit en général les étapes suivantes :

### II.2.1) Le Modèle mathématique :

Pour écrire la formulation d'un problème, on adopte des modèles mathématiques c'est-à-dire une approche schématique du problème. Cette approche diffère selon le but à atteindre. Par exemple pour analyser le mouvement de la terre autour du soleil la terre et le soleil sont approchés par des points matériels tandis que si on veut étudier le mouvement de la terre par rapport à son axe, la terre n'est plus approchée par un point mais par une sphère par exemple. Le modèle mathématique est un point matériel dans la première approche et une sphère dans la seconde.

### II.2.2) La formulation :

Une fois le modèle adopté, on écrit sa formulation, c'est-à-dire les équations qui régissent le problème. Le problème est décrit en général par des équations aux dérivées partielles. Dans notre étude le type d'équation est de la forme

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi = G \quad (\text{II.15})$$

Qui est une équation linéaire du second ordre à deux variables indépendantes  $x$  et  $y$ .  $\phi$  est la solution recherchée.

Les problèmes physiques les plus rencontrés et régis par des équations de ce type sont les suivants :

### II.2.3) Corde vibrante

Son équation est donnée par :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{II.16})$$

$y = y(x, t)$  Représente la vibration transversale d'un point d'abscisse  $x$  de la corde à l'instant  $t$ .

### II.2.4) Propagation de la chaleur :

L'équation de Fourier est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (\text{II.17})$$

$T = T(x, t)$  Est la température en un point  $x$  du milieu unidimensionnel à l'instant  $t$ ,  $\kappa$  est la constante de diffusion,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$  est le Laplacien

### II.2.5) Equation de Laplace (ou du potentiel) :

L'équation est donnée par :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{II.18})$$

On retrouve cette équation, représentant un phénomène stationnaire, dans de nombreuses applications : en transfert thermique,  $\phi$  représente la température  $T$ , en électrostatique,  $\phi$  représente le potentiel électrostatique, etc.

### II.2.6) Les méthodes de résolution :

Deux méthodes les plus courantes sont utilisées pour la résolution des problèmes donnés par les équations de type (II.17) accompagnés des conditions aux limites.

La première méthode consiste à déterminer la solution générale de l'équation aux dérivées partielles, puis de la particulariser afin d'obtenir la solution du problème en utilisant les conditions aux limites. La seconde méthode consiste, par contre, à rechercher d'abord des solutions particulières, puis de les utiliser à la recherche de la solution du problème.

### II.2.6.a) Solutions générales :

Dans cette méthode on recherche d'abord la solution générale, puis la solution particulière qui satisfait aux conditions limite. Cette solution est obtenue en utilisant les théorèmes suivants :

### II.2.6 .b) La solution générale d'une EDP non homogène ( $G \neq 0$ ) :

C'est-à-dire dont le second membre n'est pas nul s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation non homogène à la solution générale de l'équation homogène.

On a:

$$\phi = \phi_p + \phi_h \quad (\text{II.19})$$

Où  $\phi_p$  est la solution particulière et  $\phi_h$  est la solution de l'équation homogène.

Si les coefficients A, B, C, D, E, F dans l'équation (II.14) sont des constantes, la solution de l'équation homogène est de type  $\phi_h = e^{ax+by}$ .

### II.2.6.c) Méthode de superposition des solutions:

Si  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  sont solutions, linéairement indépendantes, d'une équation aux dérivées partielles homogène ( $G = 0$ ), alors,

$$\phi = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots + \alpha_n \phi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \quad (\text{II.20})$$

Où  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont des constantes, est aussi solution

### II.2.6.d) Méthode de séparations de variables:

Les méthodes de séparation des variables sont bien connues pour être un outil précieux pour la résolution des équations aux dérivées partielles classiques de la physique mathématique sous certaines géométries de base [8]. La zone d'application de la méthode de séparation de variables est étendue en continu à des équations diffusives plus complexes. Des exemples récents comprennent la solution de l'équation de diffusion transitoire (conduction) comprenant des termes d'ordre inférieur [10] et la solution d'une équation laplacienne modifiée. Le point clé de la séparation de technique variable est le fait qu'au moins l'un des sous-problèmes constitutifs est de type Sturm-Liouville avec ses solutions pour comprendre un ensemble orthogonal de fonctions, qui peuvent être utilisées comme fonctions de base pour l'expansion de toute autre fonction. Il a également été montré [4], que la technique peut être utilisée même quand un problème constitutif de type Sturm-Liouville n'existe pas, bien que beaucoup plus d'élaboration soit nécessaire. Cette approche sera utilisée ici pour la résolution de l'équation de diffusion transitoire avec un terme source qui inclut une intégrale courante de la fonction inconnue. Dans ce cas particulier, la séparation de la méthode variable conduit à une solution analytique pour une équation intégral-différentielle partielle

La méthode de Séparation des Variables ne peut pas toujours être utilisée et même quand elle peut être utilisée, il ne sera pas toujours possible de dépasser la première étape de la méthode. Cependant, il peut être utilisé pour résoudre facilement l'équation de chaleur 1D sans sources, l'équation d'onde 1D, et la version 2D de l'équation de Laplace,

#### **II.2.6.e) Méthodes des intégrales (semi analytique)**

##### **II.2.6.e.a) Méthodes des intégrales des frontières:**

Cette méthode est basée sur la discrétisation des frontières du domaine, en utilisent pour cela le théorème de GREEN, Elle est limitée à la résolution des systèmes linéaire [8]

##### **II.2.6.e.b) Méthode des circuits couplés:**

Permet de fournir la solution d'une EDP par une expression intégrale de type BIOT ET SAVART, et elle est peut être couplée à une méthode numérique de discrétisation [8].

### II .3) Série de fourie

La physique et la Mécanique (vibrations) font souvent apparaître des fonctions périodiques (lexique général : Périodique).

Rappelons qu'une fonction  $f$  est périodique et de période  $T$  si :

$$F(x+T) = f(x). \quad (\text{II.21})$$

On connaît bien les fonctions trigonométriques  $\sin$  et  $\cos(x)$  qui sont périodiques et de période  $2\pi$ .

Les phénomènes périodiques se trouvent notamment en Acoustique (lexique général : Acoustique), en Mécanique, en Optique, en Electrotechnique.

La variable est souvent le temps  $t$ .

Si  $T$  désigne la période de la fonction de  $t$  du phénomène considéré qu'il s'agit de représenter, on se ramène à une fonction de période  $2\pi$ , en utilisant la variable :

$$x = 2\pi t/T \quad (\text{II.22})$$

### II.4) Transformation de la place

La transformée de Laplace est un outil de résolution de problèmes, principalement Évolutifs, modélisés par des équations différentielles ou intégrales linéaires ou des équations Aux dérivées partielles linéaires.

## Chapitre III

formulation numérique par la MEF et MDF

## **C**hapitre III: formulation numérique par la MEF et MDF pour l'étude thermique dans un domaine rectangulaire

### III.1) introduction

La modélisation numérique est basée sur la reformulation des équations de conservation sur chaque élément du maillage. Il existe de nombreuses méthodes pour représenter les problèmes continus de façon discrète comme par exemple les approximations par différences finies, par éléments finis, par volumes finis.

Dans le cadre de ces travaux étant consiste les deux méthodes (différence finis et élément finis)

### III.2) L'équation de chaleur

L'équation générale de chaleur, en régime stationnaire, en 2D, peut s'écrire de la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \Phi \quad (\text{III.1})$$

Ou :

- $T(x, y, t)$  : la température fonction de l'espace et du temps
- $T$  : la température.
- $t$  : le temps.

### III.3) Différence finies

Cette technique permet de développer des schémas pour remplacer les dérivées premières et secondes des équations différentielles partielles pour pouvoir envisager une solution numérique par ordinateur.

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre infini de points discrets ou nœuds du maillage. [8]

On peut résoudre problème traité par la méthode des différences finies par les trois schémas suivants :

- La méthode explicite
- La méthode implicite
- La méthode de Crank-Nicolson

$$\frac{\partial u}{\partial x} \longrightarrow \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\text{III.2})$$

La deuxième étape consiste à discrétiser les températures dans la plaque et à convertir l'équation de la chaleur en une forme de différence finie.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi \quad (\text{III.3})$$

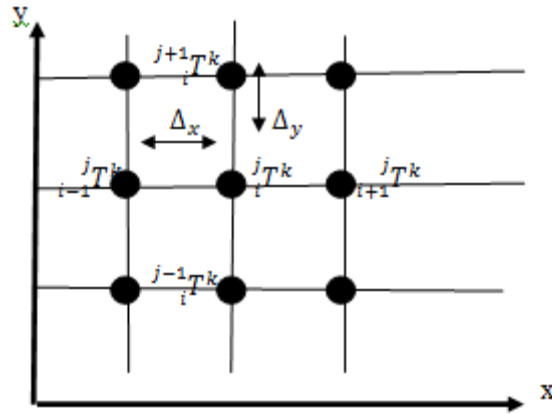
Le domaine de calcul est discrétisé en  $(N_x+1) \times (N_y+1)$  noeuds  $(x_i; y_j)$  ( $i$  variant de 0 à  $N_x$  et  $j$  variant de 0 à  $N_y$ ).

On supposera que les pas d'espace dans chaque direction  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont constants.

La température discrète au noeud  $(x_i; y_j, t)$  sera notée :

$$T(x, y, t) \rightarrow T_i^j$$





**Figure III.1** : maillage de différence finie

Un développement de Taylor de premier ordre de  $T(x + \Delta x ; x)$  au voisinage de  $x$  donne :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \left[ \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(x) \right] + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (\text{III.4})$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) \quad (\text{III.5})$$

La série ou premier ordre en  $\Delta x$ , on obtient :

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{III.6})$$

Le

développement de Taylor on deuxième ordre ( $x - \Delta x, x, x + \Delta x$ ) :

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) \quad (\text{III.7})$$

Et :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) \quad (\text{III.8})$$

On

$$f(x - \Delta x) + f(x + \Delta x) = 2f(x) + \Delta x^2 f''(x) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (\text{III.9})$$

La série ou deuxième ordre en  $\Delta x$ , on obtient :

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (\text{III.10})$$

On peut utiliser trois approches pour discrétiser cette équation de la chaleur. La première dite explicite utilise une discrétisation au nœud  $x_i$  et à l'itération courante  $n$  :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) /_k \quad (\text{III.11})$$

Et la seconde dite implicite utilise une discrétisation au nœud  $x_i$  et à l'itération  $n + 1$  :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) /_{k+1} \quad (\text{III.12})$$

La troisième c'est la méthode *de Grenk. Nicolson*

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) /_k \quad (\text{III.13})$$

Dans cette partie, nous utilisons la méthode explicite comme suivant :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x, t, \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t} \quad (\text{III.14})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(x^{i+1} + \Delta x, y^j, t^k) - 2T(x, y, t) + T(x^{i-1} + \Delta x, y^j, t^k)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T(x, \Delta y + y, t) - 2T(x, y, t) + T(x, y + \Delta Y, t)}{\Delta y^2} \quad (\text{III.15})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_i^{j-1} - 2T_i^j + T_i^{j+1}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{{}_i^j T^{k+1} - {}_i^j T^k}{\Delta t} = \alpha \left( \frac{{}_{i+1}^j T^{k+1} - {}_i^j T^k + {}_{i-1}^j T^k}{\Delta x^2} \right) + \alpha \left( \frac{{}_i^{j-1} T^k - 2{}_i^j T^k + {}_i^{j-1} T^k}{\Delta y^2} \right) + \emptyset \quad (\text{III.16})$$

En posant que  $r_x = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ,  $r_y = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$ .

l'équation (II.16) devient :

$${}_i^j T^{k+1} - {}_i^j T^k = r_x ({}_{i+1}^j T^k - 2{}_i^j T^k + {}_{i-1}^j T^k) + r_y ({}_i^{j+1} T^k - 2{}_i^j T^k + {}_i^{j-1} T^k) + \Delta \epsilon \theta \quad \text{II} \quad (\text{III.17})$$

Après le remplacement de  ${}_i^j T^k$  dans le d'autre cotés l'équation (II.17) devient la forme finale de la méthode explicite de notre travail

( III.18)

$${}_i^j T^{k+1} = r_x ({}_{i+1}^j T^k + {}_{i-1}^j T^k) + r_y ({}_i^{j+1} T^k + {}_i^{j-1} T^k) + (1 - 2r_x + 2r_y) {}_i^j T^k + \Delta \epsilon \theta$$

La deuxième partie c'est la méthode implicite comme suivant:

$$\frac{{}_i^j T^{k+1} - {}_i^j T^k}{\Delta t} = \alpha \left( \frac{{}_{i+1}^j T^{k+1} - 2{}_i^j T^{k+1} + {}_{i-1}^j T^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{{}_i^{j+1} T^{k+1} - 2{}_i^j T^{k+1} + {}_i^{j-1} T^{k+1}}{\Delta y^2} \right) \quad (\text{III.19})$$

$${}_i^j T^{k+1} = {}_i^j T^k + \alpha \frac{\Delta T}{\Delta x^2} ({}_{i+1}^j T^{k+1} - 2{}_i^j T^{k+1} + {}_{i-1}^j T^{k+1}) + \alpha \frac{\Delta T}{\Delta y^2} ({}_i^{j+1} T^{k+1} - 2{}_i^j T^{k+1} + {}_i^{j-1} T^{k+1}) \quad (\text{III.20})$$

En posant que  $r_x = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ ,  $r_y = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$  en relèvent le  ${}_i^j T^{k+1}$ ,  $(2r_x, 2r_y)$  des facteurs on

communs l'équation (II.21) devient :

$${}^j_i T^{K+1}(1 + 2r_x + 2r_y) = {}^j_i T^K + r_x({}^j_{i+1} T^{K+1} + {}^j_{i-1} T^{K+1}) + r_y({}^{j+1}_i T^{K+1} + {}^{j-1}_i T^{K+1}) \quad (\text{III.21})$$

A la fin l'équation finale de la méthode implicite de notre étude est :

$${}^j_i T^K = {}^j_i T^{K+1}(1 + 2r_x + 2r_y) - r_x({}^j_{i+1} T^{K+1} + {}^j_{i-1} T^{K+1}) - r_y({}^{j+1}_i T^{K+1} + {}^{j-1}_i T^{K+1}) \quad (\text{III.22})$$

#### III.4) Élément finis

Le calcul par éléments finis nécessitant le maniement de nombreuses valeurs numériques,

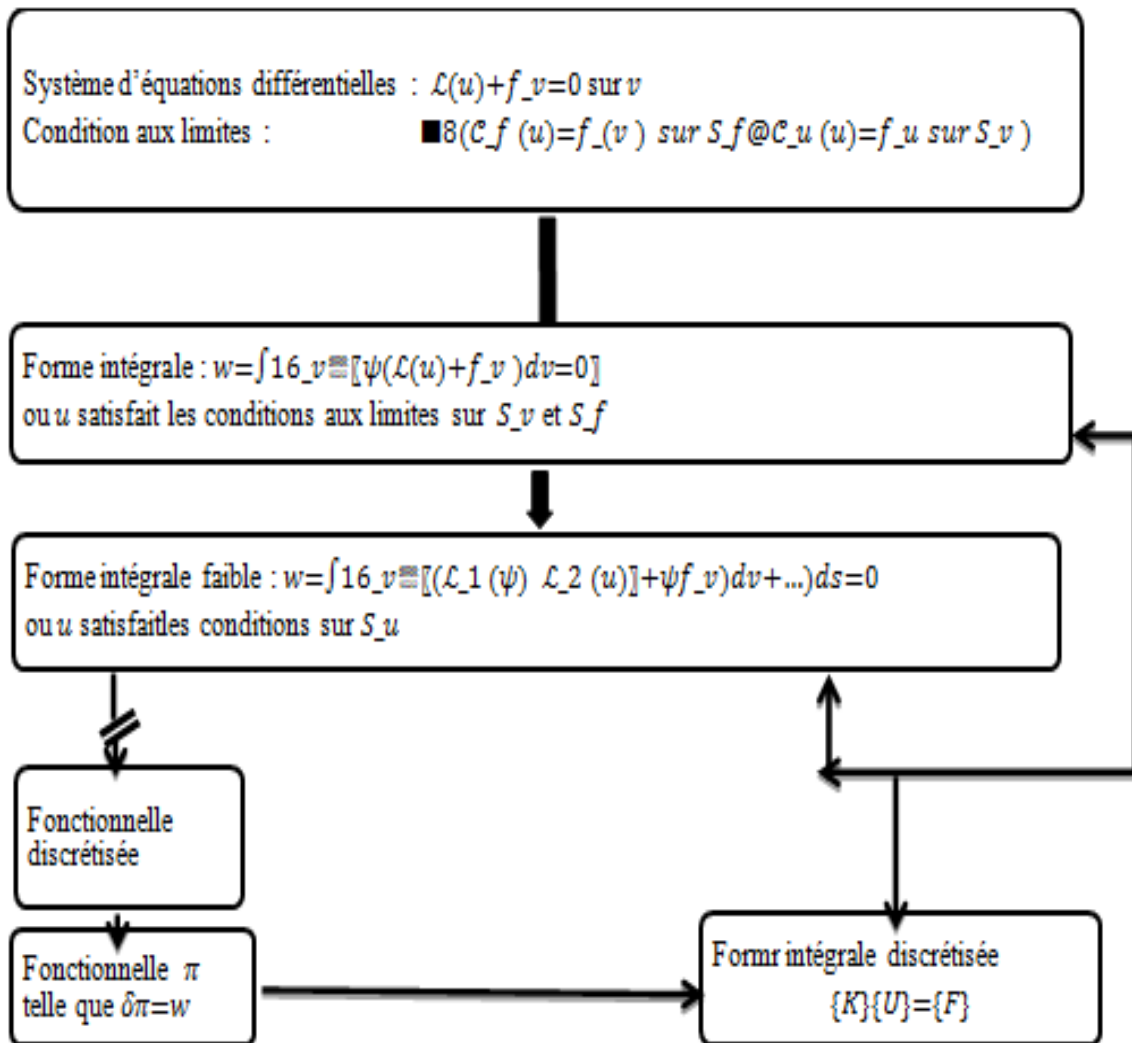
il est plus aisé d'exprimer celles-ci sous forme matricielle.

En regroupant des termes de même nature au sein d'une seule et même variable, cette écriture plus synthétique permet en effet une meilleure compréhension des différentes phases de construction de la méthode.

Ceci nécessite néanmoins la maîtrise des opérations de base associées à ce type de calcul : l'addition ou le produit de plusieurs matrices, la résolution de systèmes linéaires, etc.

**III.4.1) Relations entre systèmes d'équations différentielles formes**

Formes intégrales et fonctionnelles

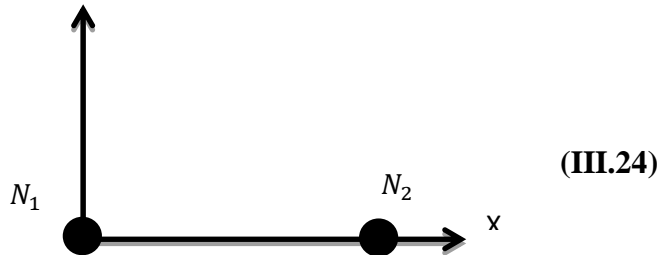


**Figure III.2:**relation entre les systèmes d'équations.

### III.4.2) Présentation d'élément utilisé dans cette étude

#### 3.7.1) calcul de nœud

$$N_i = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left( \frac{x - x_n}{x_i - x_n} \right)$$



- Par rapport l'axe X

$$N_2^x = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) = \left( \frac{x - 0}{le - 0} \right) = \frac{x}{le}$$



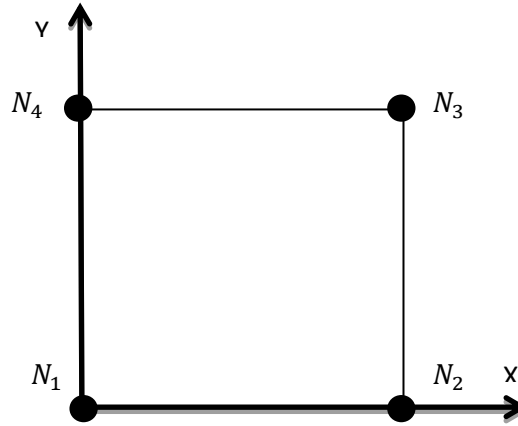
- Par rapport l'axe Y :

$$N_1^y = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 \left( \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \right) = \left( \frac{y - le}{0 - le} \right) = 1 - \frac{y}{le} \quad (\text{III .23})$$

$$N_1^y = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 \left( \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \right) = \left( \frac{y - le}{0 - le} \right) = 1 - \frac{y}{le} \quad (\text{III .26})$$

$$N_2^y = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 \left( \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \right) = \left( \frac{y - 0}{le - 0} \right) = \frac{y}{le} \quad (\text{III .27})$$

### III.4.3) Formulation d'un élément fini quadrilatère à 4 nœuds :



Nœud 01 :

$$N_1 = N_1^x N_1^y$$

$$N_1(x, y) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{y}{l}\right) \quad (\text{III.28.a})$$

Nœud 02 :

$$N_2 = N_2^x N_1^y$$

$$N_2(x, y) = \left(\frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{y}{l}\right) \quad (\text{III.28.b})$$

Nœud 03 :

$$N_3 = N_2^x N_2^y$$

$$N_3(x, y) = \left(\frac{x}{l}\right) \left(\frac{y}{l}\right) \quad (\text{III.28.c})$$

Nœud 04 :

$$N_4 = N_1^x N_2^y$$

$$N_4(x, y) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{y}{l}\right) \quad (\text{III.28.d})$$

La matrice  $B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{l}\left(1 - \frac{y}{l}\right)\right) & \left(\frac{1}{l}\left(1 - \frac{y}{l}\right)\right) & \left(\frac{1}{l}\left(\frac{y}{l}\right)\right) & \left(-\frac{1}{l}\left(\frac{y}{l}\right)\right) \\ \left(-\frac{1}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) & \left(-\frac{1}{l}\left(\frac{x}{l}\right)\right) & \left(\frac{1}{l}\left(\frac{x}{l}\right)\right) & \left(\frac{1}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) \end{bmatrix}$$

$$B = \left(\frac{1}{l}\right) \begin{bmatrix} \left(\frac{y}{l} - 1\right) & \left(1 - \frac{y}{l}\right) & \left(\frac{y}{l}\right) & \left(-\frac{y}{l}\right) \\ \left(\frac{x}{l} - 1\right) & \left(-\frac{x}{l}\right) & \left(\frac{x}{l}\right) & \left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 b_4 \end{bmatrix}$$

La matrice transposée

$$B' = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

#### III.4.4) interpolation élémentaire :

$$(K) = \iint_0^l [B'] [k] [B] dx dy \quad (\text{III.31})$$

Avec  $k$  : conductivité d'un matériau isotope « homogène »

$$(K) = k \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{1}{6} l^2\right) \\ \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) \\ \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) \\ \left(-\frac{1}{6} l^2\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

$$K_e = [K] \{T\}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{1}{6} l^2\right) \\ \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) \\ \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) \\ \left(-\frac{1}{6} l^2\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

$$F = \iint_0^l N \cdot Q dx dy$$



$$F = Q \int_0^l \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \right\} dx \quad F = \frac{Q}{4} l^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

$$[K_e]\{T\} = [F]$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6}l^2\right) & \left(-\frac{1}{6}l^2\right) \\ \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3}l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6}l^2\right) \\ \left(-\frac{2}{6}l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3}l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) \\ \left(-\frac{1}{6}l^2\right) & \left(-\frac{2}{6}l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3}l^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \frac{Q}{4} l^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

# Chapitre IV

## résultats et validation

# C

## *hapitre IV : résultats et validation*

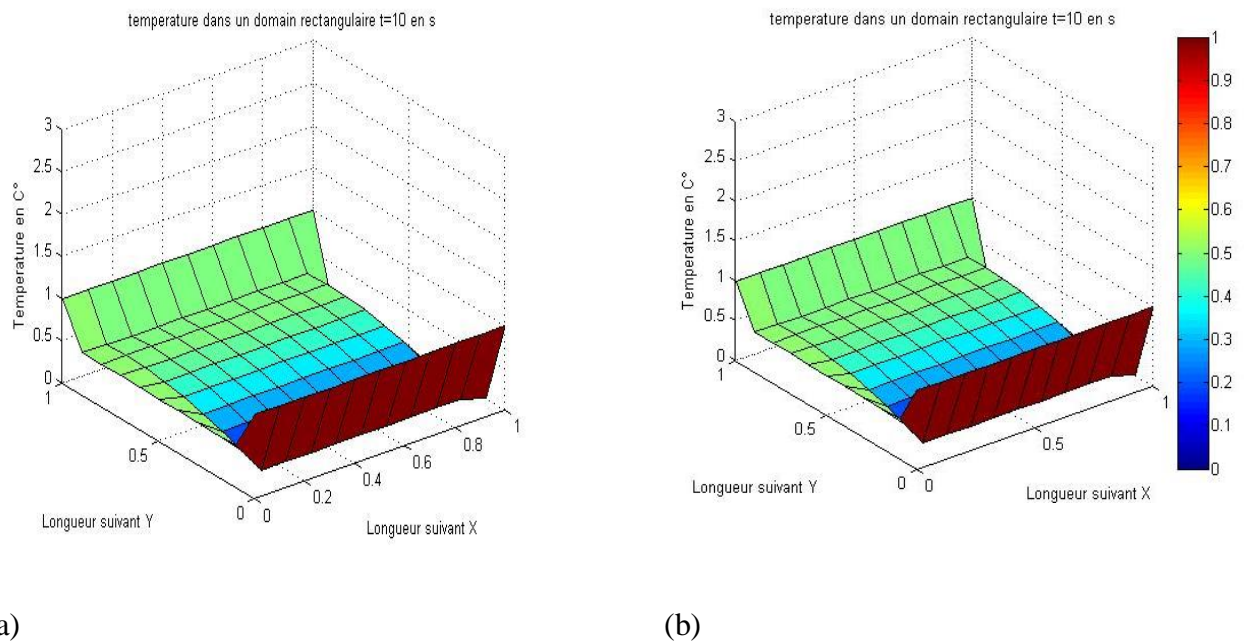
### IV.1) Introduction:

Ce chapitre présente une simulation numérique par la méthode des éléments finis et la méthode de différence spécifiée pour étudier l'étalement de la température dans un champ d'acier rectangulaire. Cette étude réalise une étude comparative basée sur une variété de paramètres: la comparaison de la méthode explicite avec l'analyse implicite et implicite avec une solution précise en utilisant la programmation numérique pour ces méthodes. A l'aide du programme MATLAB, les résultats obtenus sont comparés et discutés.

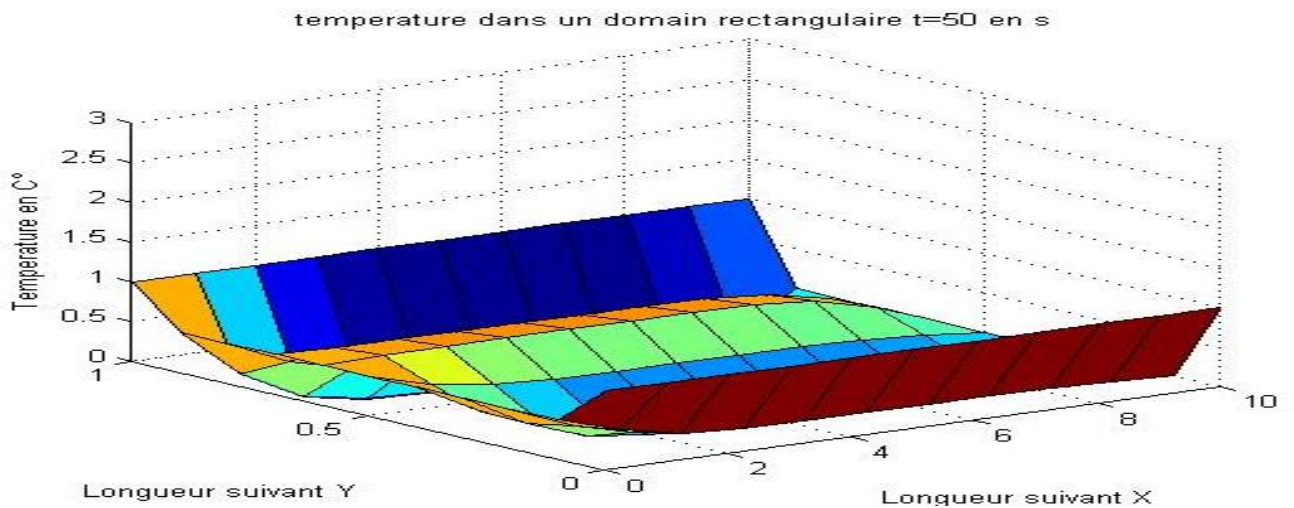
La première simulation sera basée sur la méthode explicite. Dans cette section, la comparaison dépendra du changement de certaines données sur le programme.

### IV.2) Simulation par la méthode explicite

#### IV.2.1) Effet de la géométrie



**Figure IV.1 :** Effet de la géométrie a et b ou  $L_x$  et  $L_y$  a l'instant  $t=10$ s.



(c)

**Figure IV.2 :** Effet de la géométrie c ou  $L_x$  et  $L_y$  a l'instant  $t=50s$

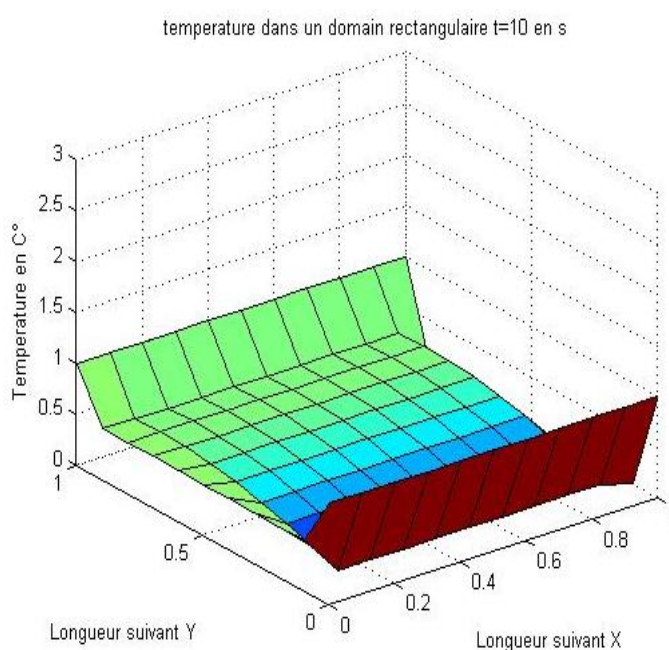
(a) : quand  $L_x=L_y$ .

(b): quand  $L_x=2L_y$ .

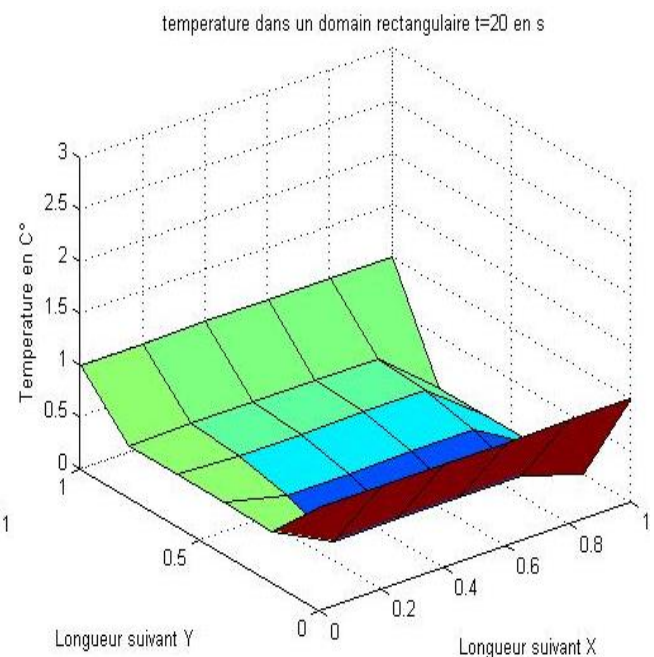
(c): quand  $L_x =10L_y$ .

Avec le même maillage  $n_x=n_y=20$ , et la même conductivité.

**IV.2.2) Effet du maillage  $\Delta_x, \Delta_y$  :**

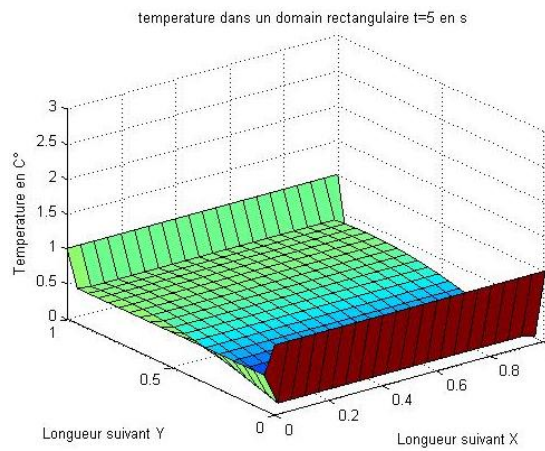


(a)

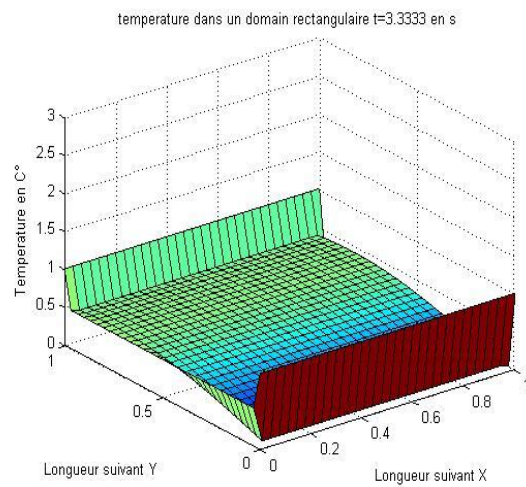


(b)

**Figure IV.3 :** Effet du maillage  $\Delta_x, \Delta_y$  a l'instant  $t=10s, t=20s$



(c)

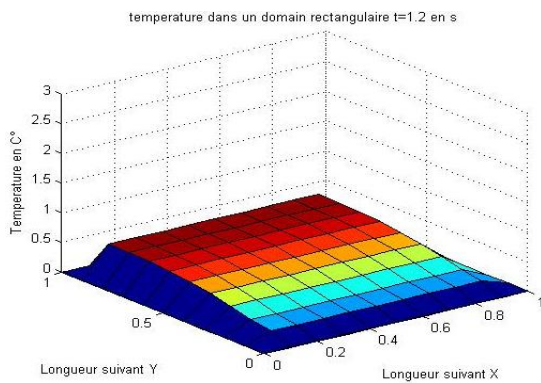


(d)

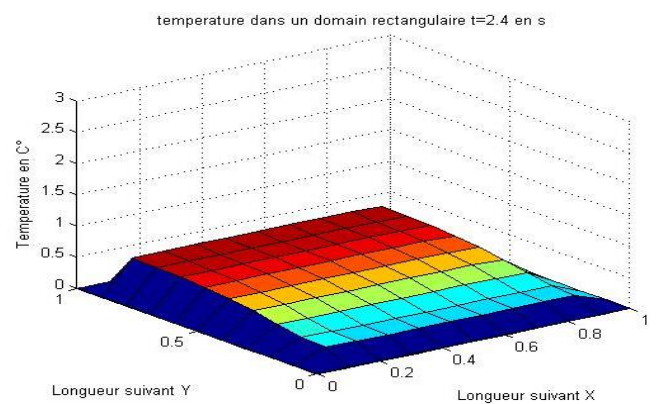
**Figure IV.4 :** Effet du maillage  $\Delta_x, \Delta_y$  a l'instant  $t=10s, t=20s$

- (a) : quand  $n=5$
- (b) : quand  $n=10$
- (c) : quand  $n=20$
- (d) : quand  $n=30$

Maintenant on va varier le  $\Delta t$  avec  $k_x = k_y$  :

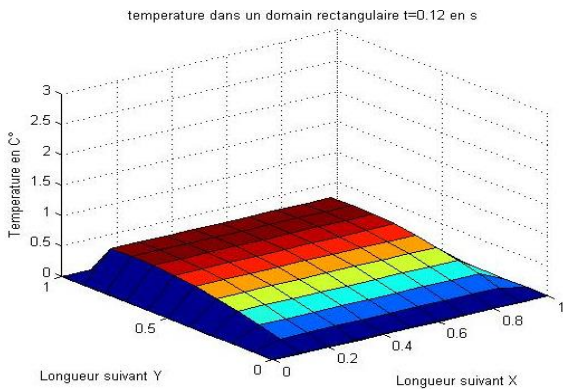


(a)

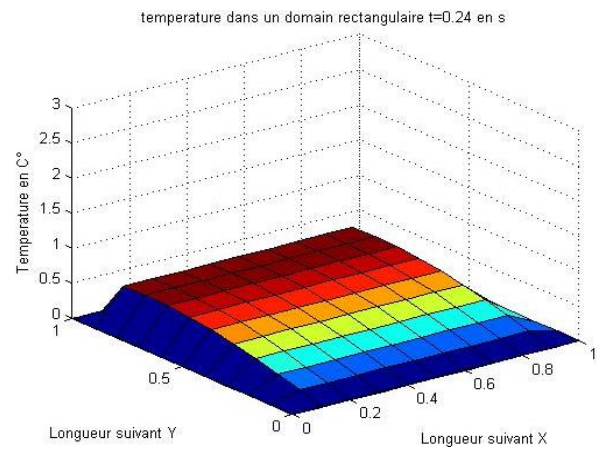


(b)

**Figure IV.5 :** Effet du maillage  $\Delta_t$  à l' instant  $t=1.2s$  , $t=2.4s$



(c)



(d)

**Figure IV.6 :** Effet du maillage  $\Delta_t$  à l' instant  $t=0.12s$  , $t=0.24s$

(a) : quand  $\Delta_t = 0.1$

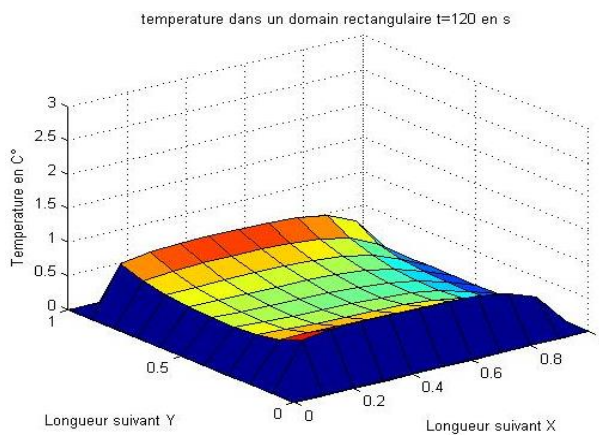
(b) : quand  $\Delta_t = 0.2$

(c) : quand  $\Delta_t = 0.01$

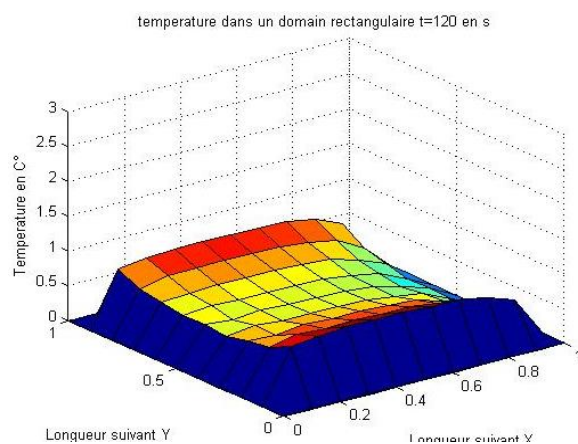
(d) : quand  $\Delta_t = 0.02$

Avec  $n_x, n_y = 10$

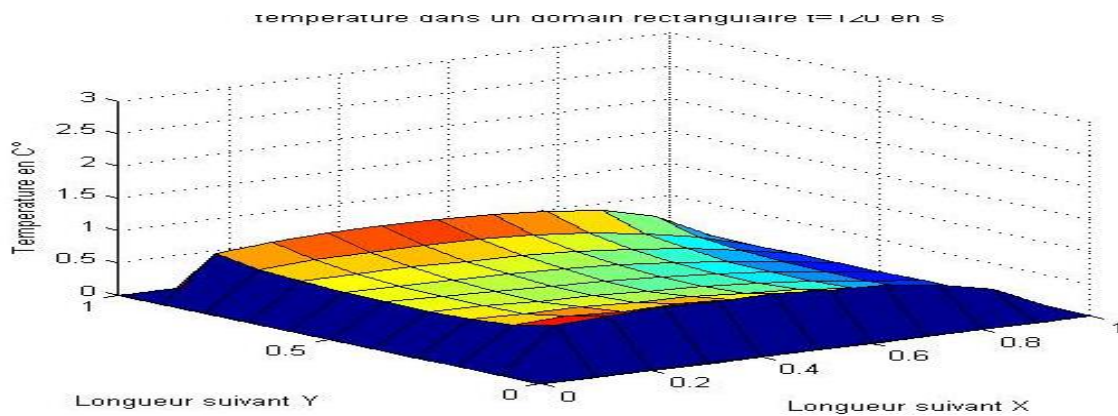
**IV.2.3) Effet de la conductivité  $k_x = k_y$  :**



(a)



(b)

**Figure IV.7 :** Effet de la conductivité à l' instant  $t=1.20s$ 

(c)

**Figure IV.8 :** Effet de la conductivité a l' instant  $t=1$ .(a) : quand  $k_x \neq k_y$ (b) : quand  $k_x$  supérieure  $k_y$ (c) : quand  $k_x$  inferieur  $k_y$ **IV.3) Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte**

maintenant un changement radicale de programme, mais toujours on reste dans le même logicielle de programmation mais on change la méthode complètement première c'est changement de base des donnees sera la méthode implicite et la comparaison avec la solution exacte.

**IV.5.1) Les donnees :**

$$k_x = k_y = 1$$

$$L_x = L_y = 1.$$

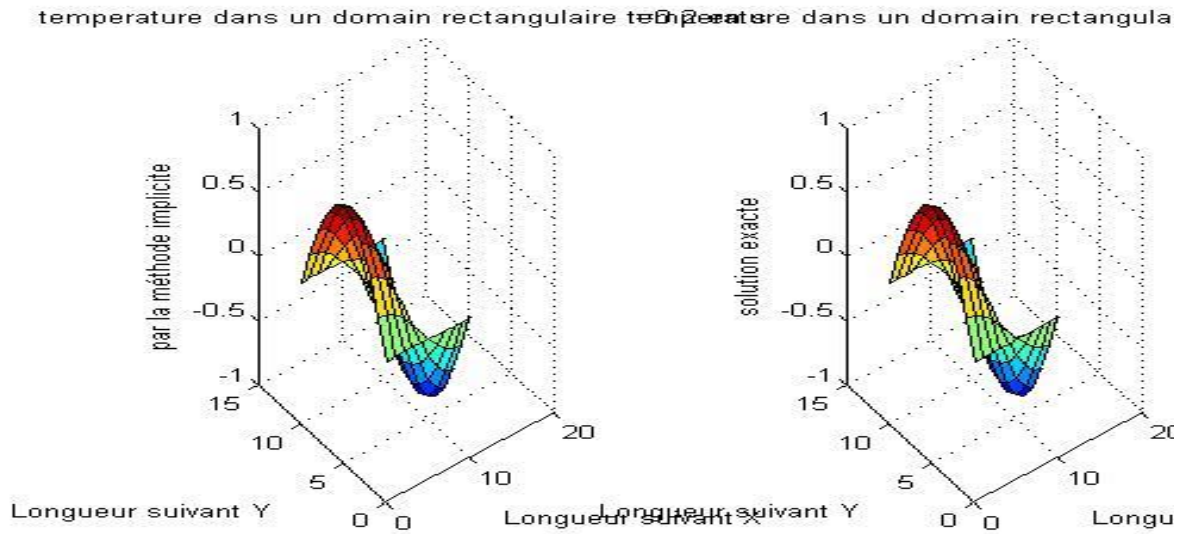
$$t_0 = 0 \quad t_f = 1.1.$$

Condition limite et condition initial :

$$T(x,y) = \sin(rx) * \cos(ry)$$

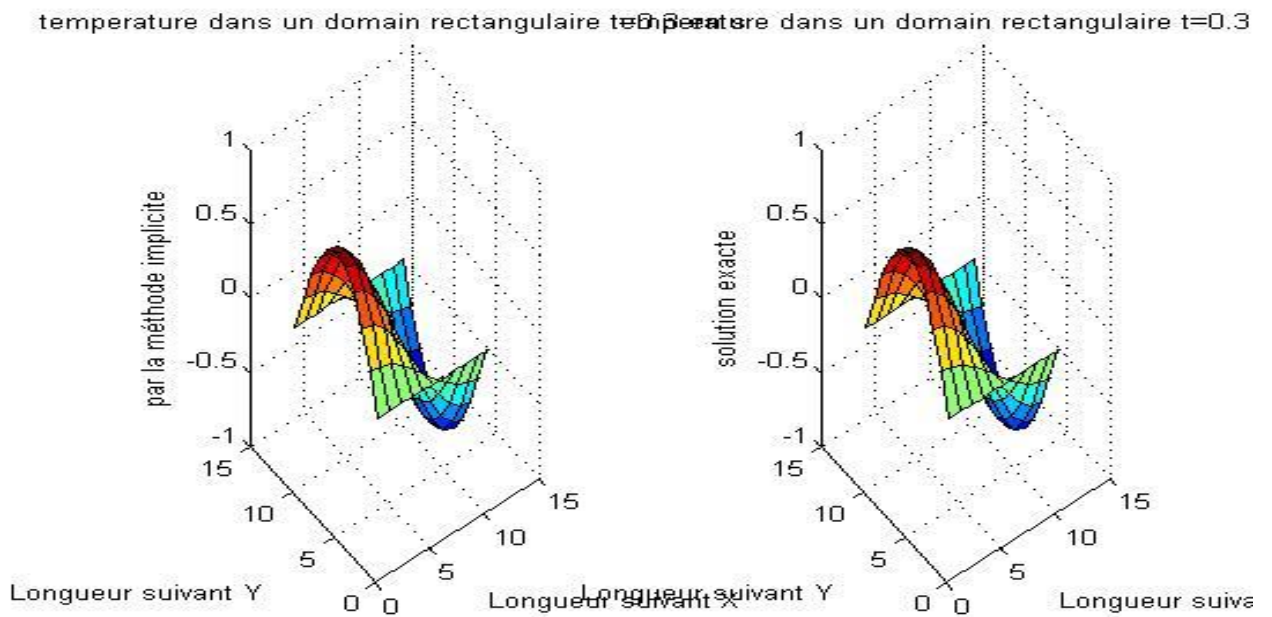
$$\text{Avec } r_x, r_y = 10.$$

Pour  $t= 0.2s$



**Figure IV.9 :** Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant  $t=0.2s$

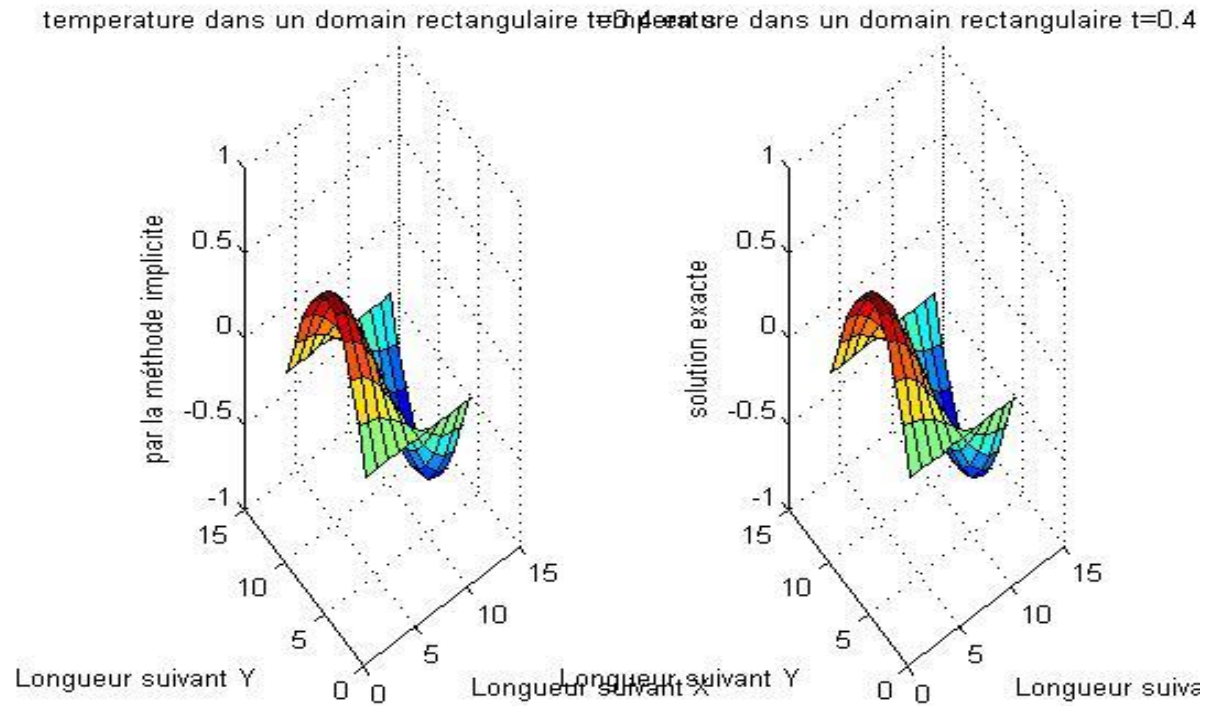
Pour  $t=0. 3s$



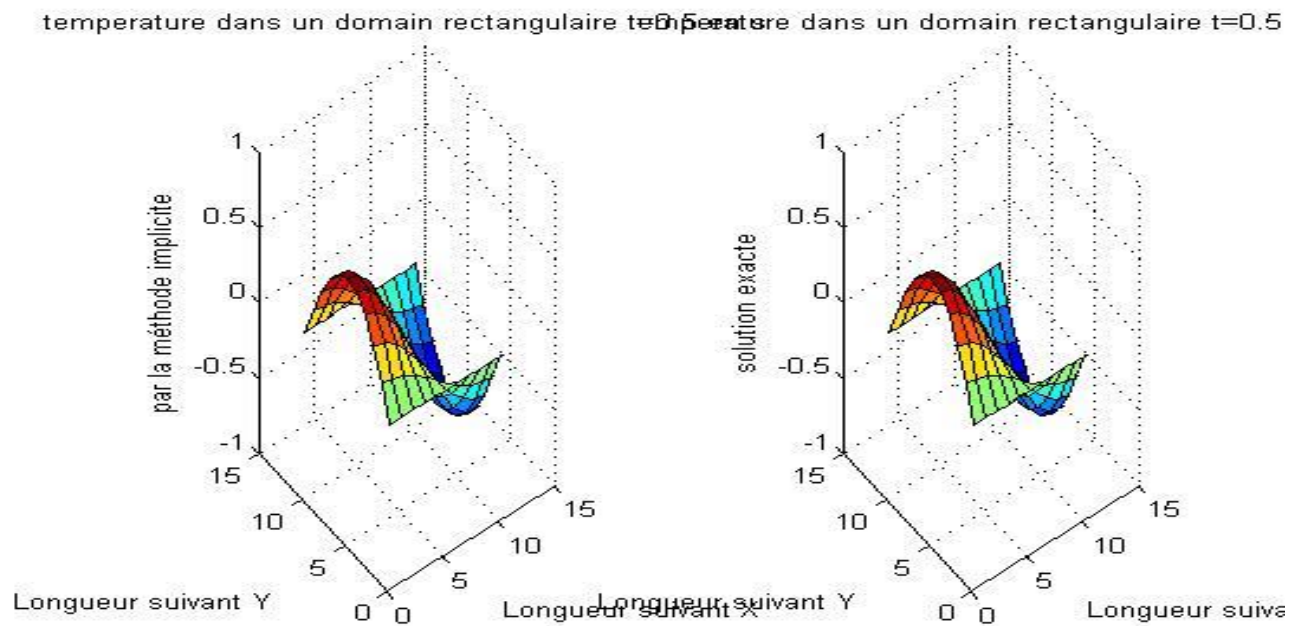
**Figure IV.10 :** Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant  $t=0.3s$

Pourt= $0.4s$



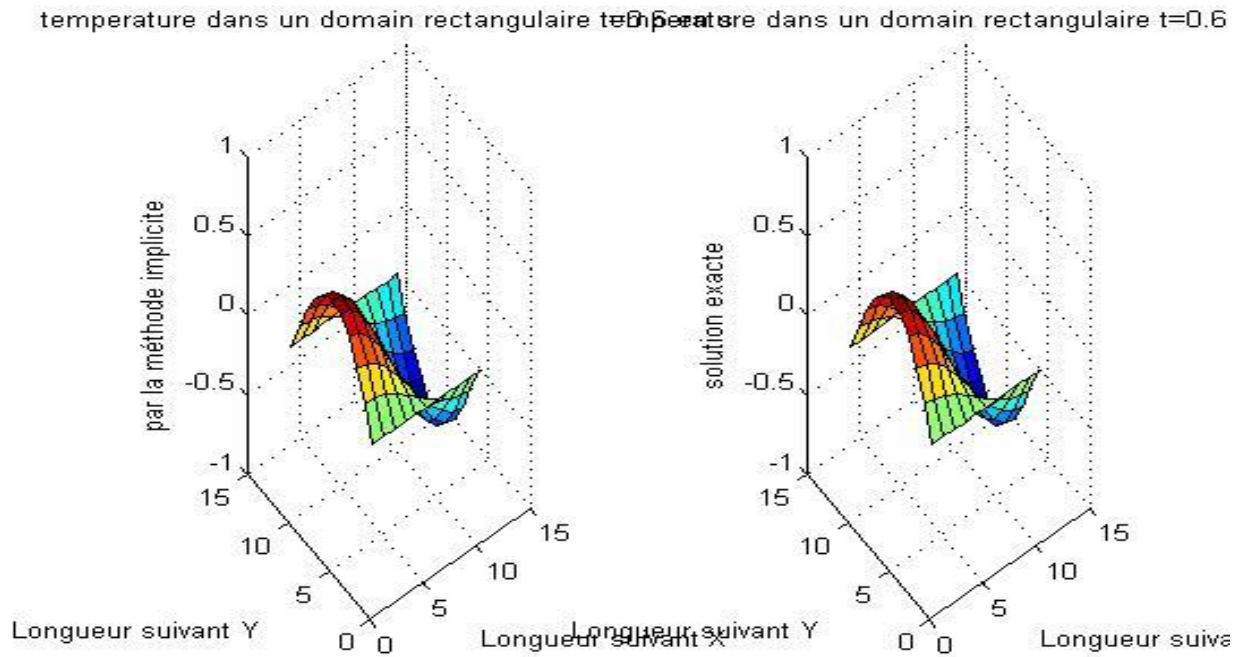


**Figure IV .11** : Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant  $t=0.4$ s



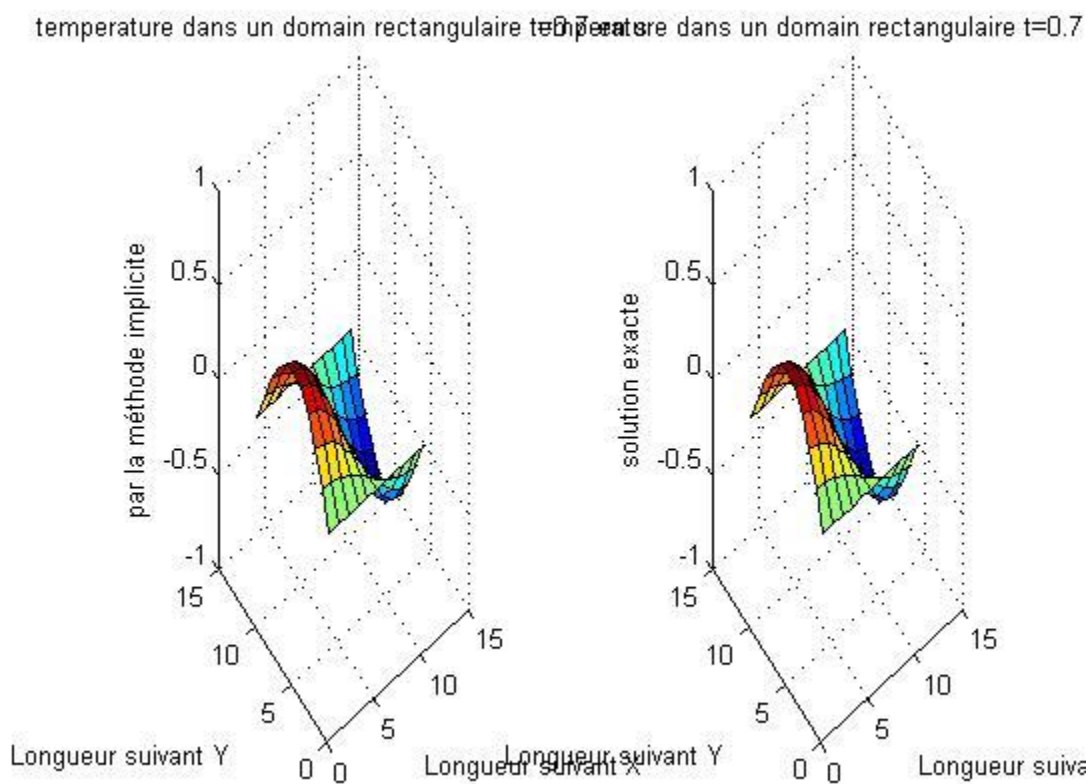
**Figure IV. 12** :Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant  $t=0.5$ s

Pour  $t=0.6$ s



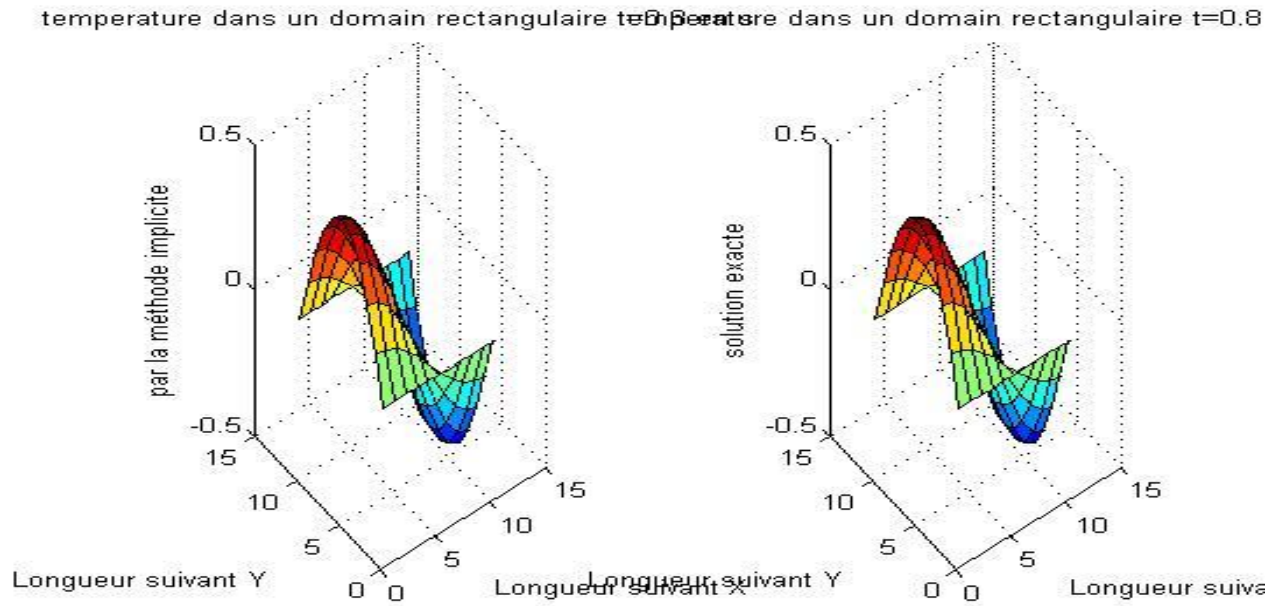
**Figure IV. 13 :** Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant  $t=0.6s$

Pour  $t=0.7s$



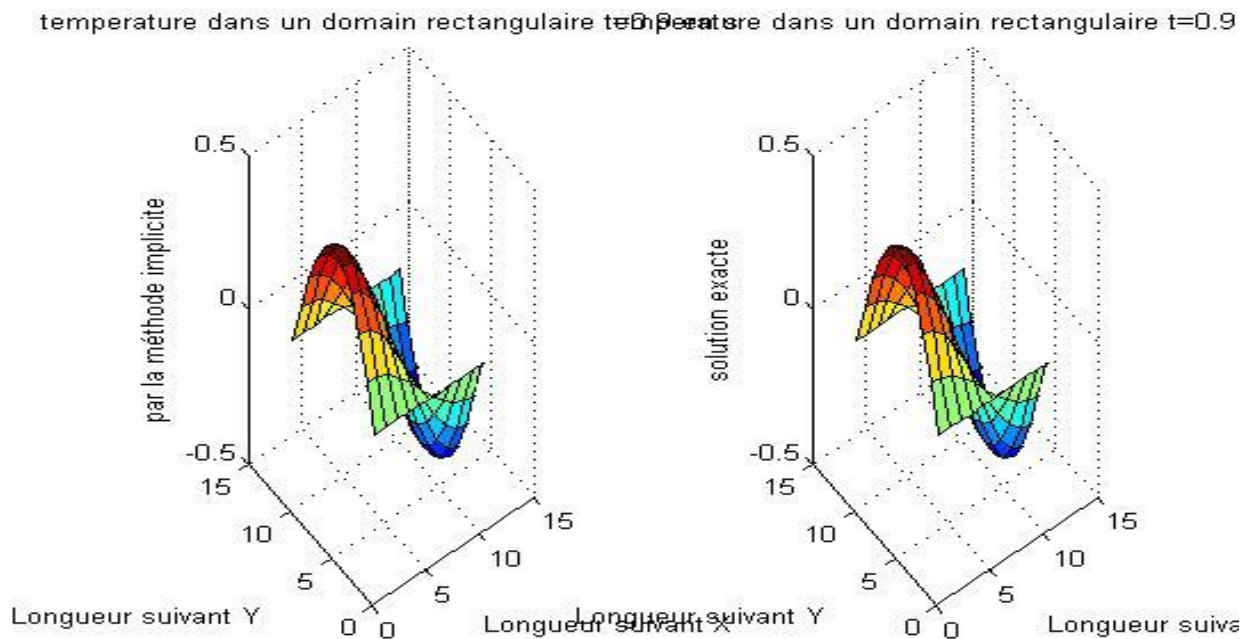
**Figure IV. 14 :** Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant  $t=0.7s$

Pour  $t=0.8s$



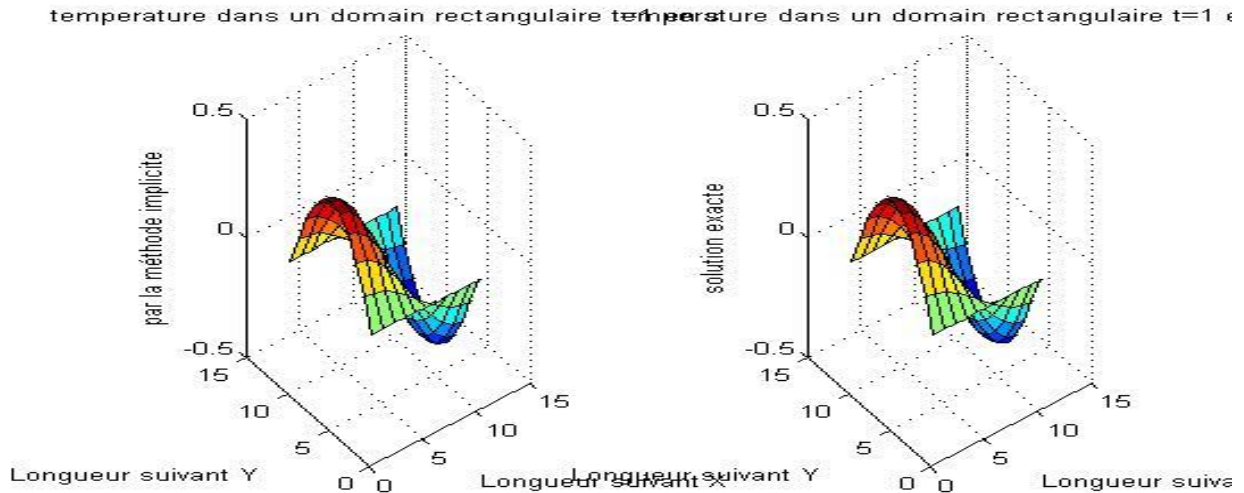
**Figure IV.15 :** Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant  $t=0.8s$ .

Pour  $t=0.9s$



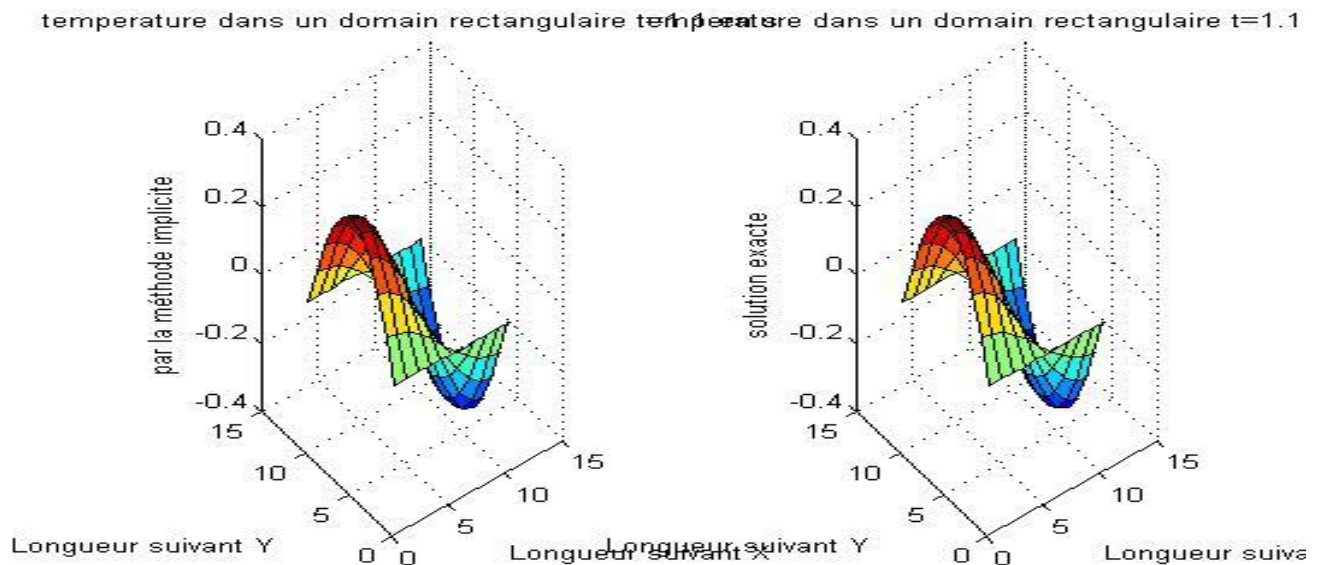
**Figure IV. 16 :** Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant  $t=0.9s$ .

Pour  $t=1s$ .



**Figure IV. 17 :** Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant  $t=1$ s.

Pour  $t=1.1$ s



**Figure IV.18 :** Comparaison la méthode implicite avec la solution exacte à l' instant  $t=1.1$ s.

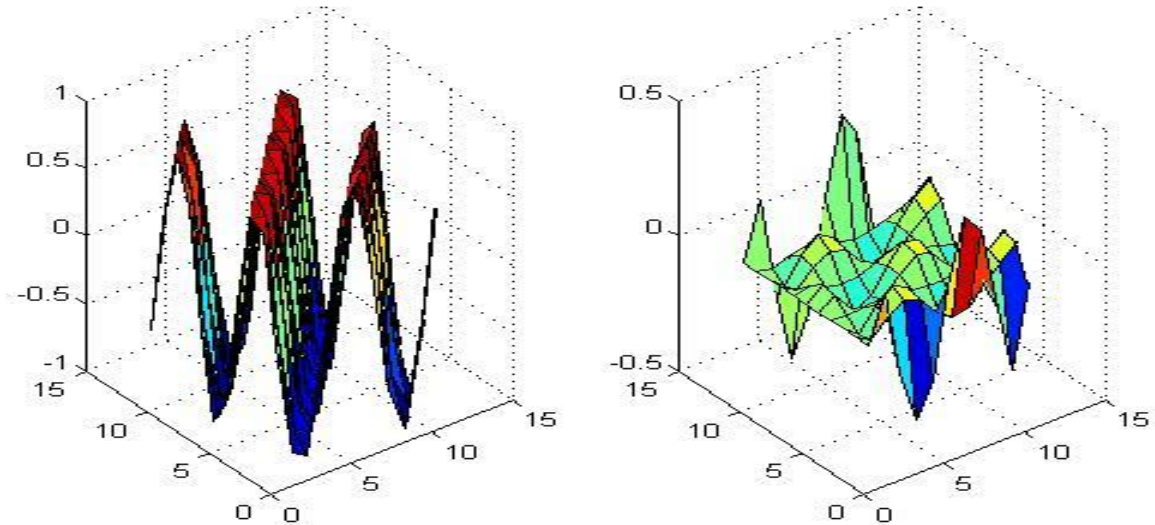
#### IV.4) Comparaison de la méthode explicite avec la méthode implicite :

Dans cette section, une comparaison complète basée sur un programme combinant les deux méthodes basées sur les données précédentes est appropriée pour fournir des résultats clairs et comparables

##### Au la premier 'instant :

Etude comparative entre la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies pour prédire la diffusion de la température dans un domaine rectangulaire

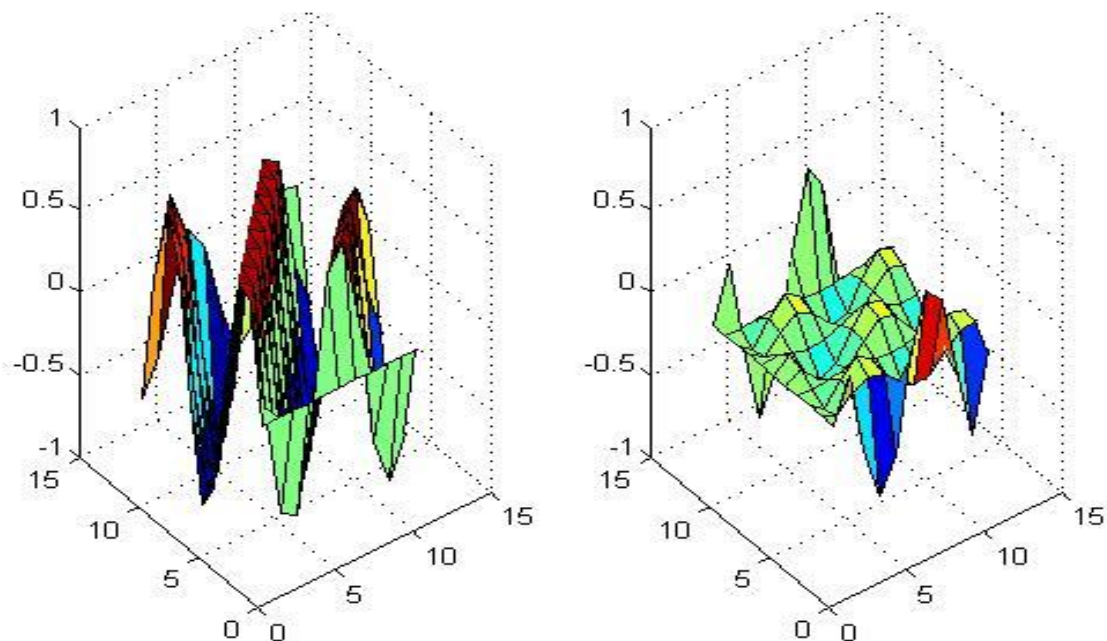
erreur de la méthode EXPLICITE 1 pas du temps de la méthode IMPLICITE 1 pas du temps



**Figure IV. 19:** erreur de la méthode explicite 1 pas du temps de la méthode implicite 1 pas du temps

**Au deuxième instant :**

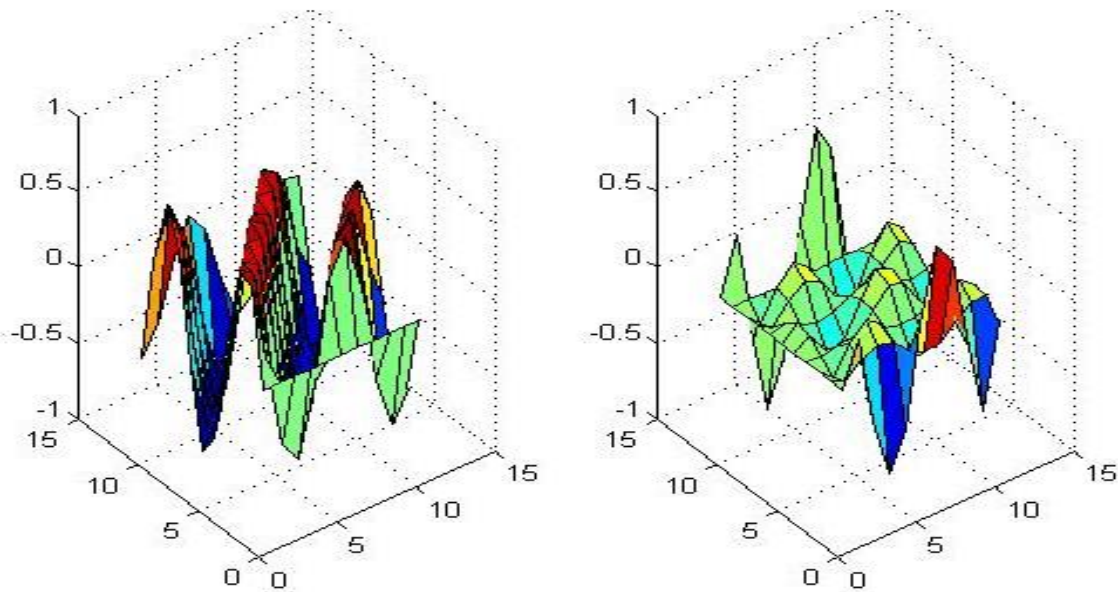
erreur de la méthode EXPLICITE 2 pas du temps de la méthode IMPLICITE 2 pas du temps



**Figure IV. 20:** erreur de la méthode explicite 2 pas du temps de la méthode implicite 2 pas du temps

**Au troisième instant :**

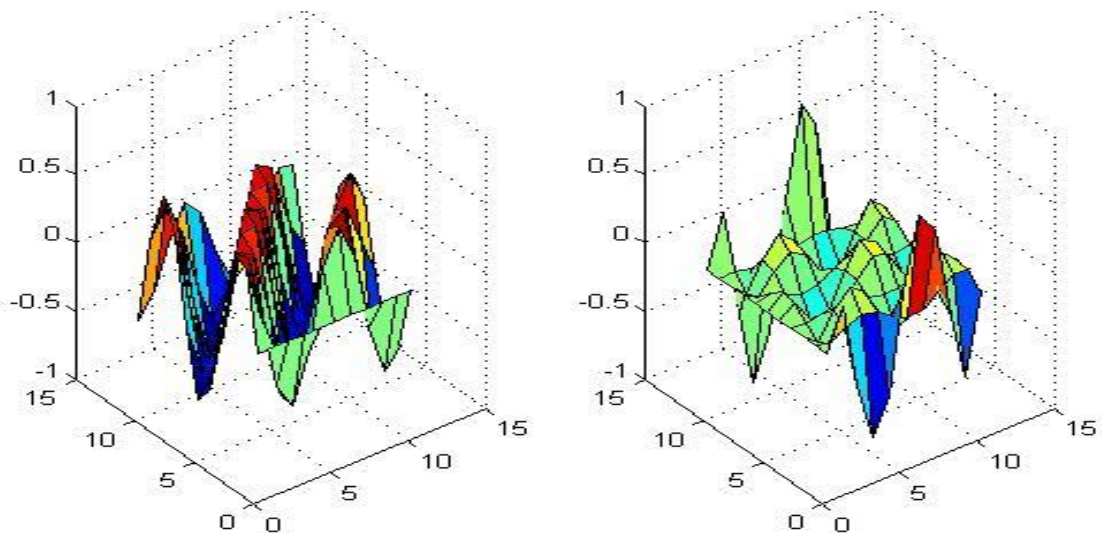
erreur de la méthode EXPLICITE 3 pas du temps de la méthode IMPLICITE 3 pas du temps



**Figure IV. 21:** erreur de la méthode explicite 3 pas du temps de la méthode implicite 3 pas du temps

**Au quatrième instant :**

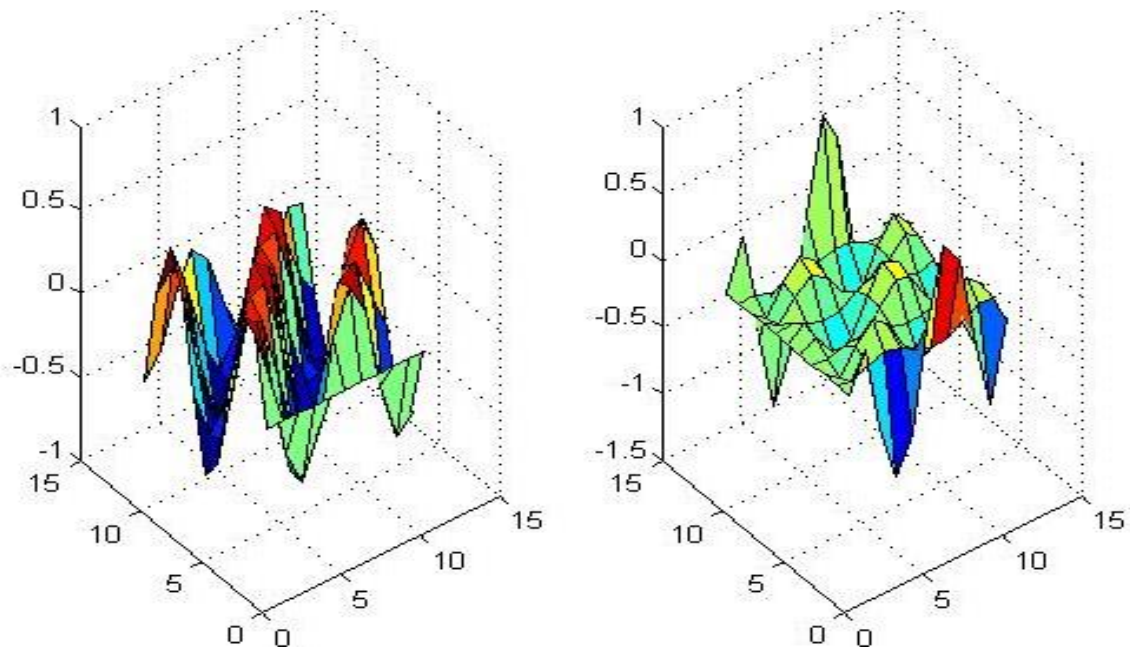
erreur de la méthode EXPLICITE 4 pas du temps de la méthode IMPLICITE 4 pas du temps



**Figure IV. 22:** erreur de la méthode explicite 4 pas du temps de la méthode implicite 4 pas du temps.

**Au cinquième instant :**

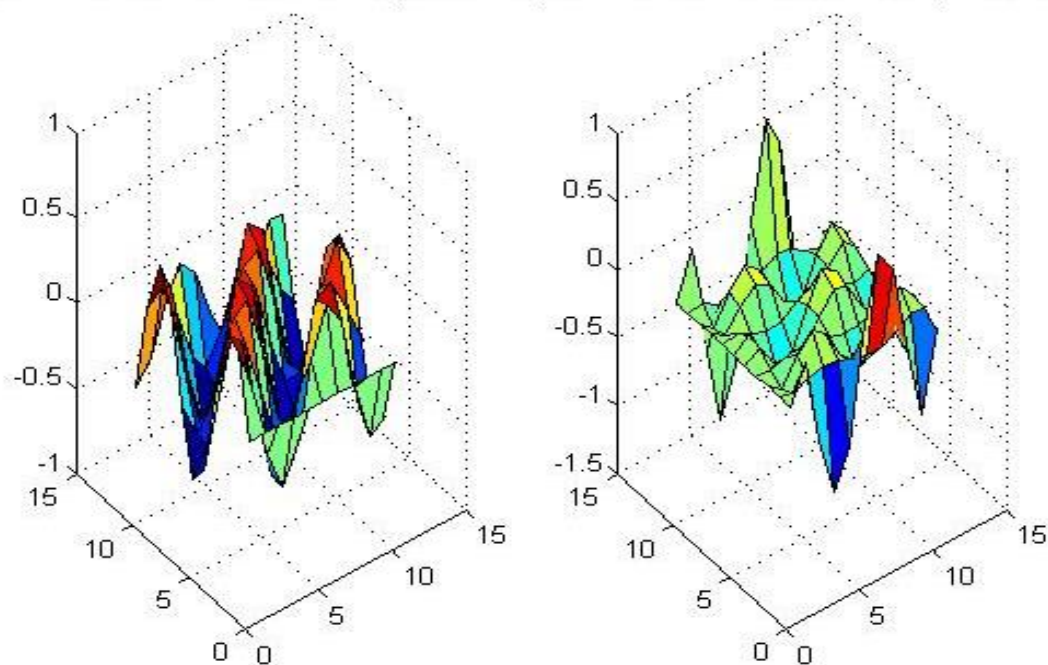
erreur de la méthode EXPLICITE 5 pas du temps de la méthode IMPLICITE 5 pas du temps



**FigureIV.23 :** erreur de la méthode explicite 5 pas du temps de la méthode implicite 5 pas du temps

**Au sixième instant :**

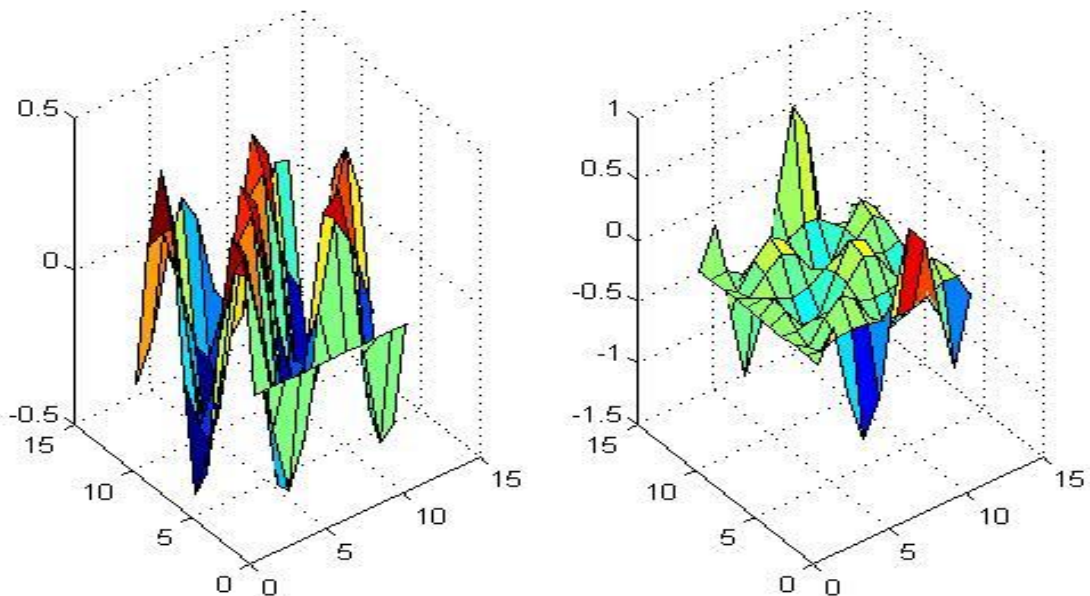
erreur de la méthode EXPLICITE 6 pas du temps de la méthode IMPLICITE 6 pas du temps



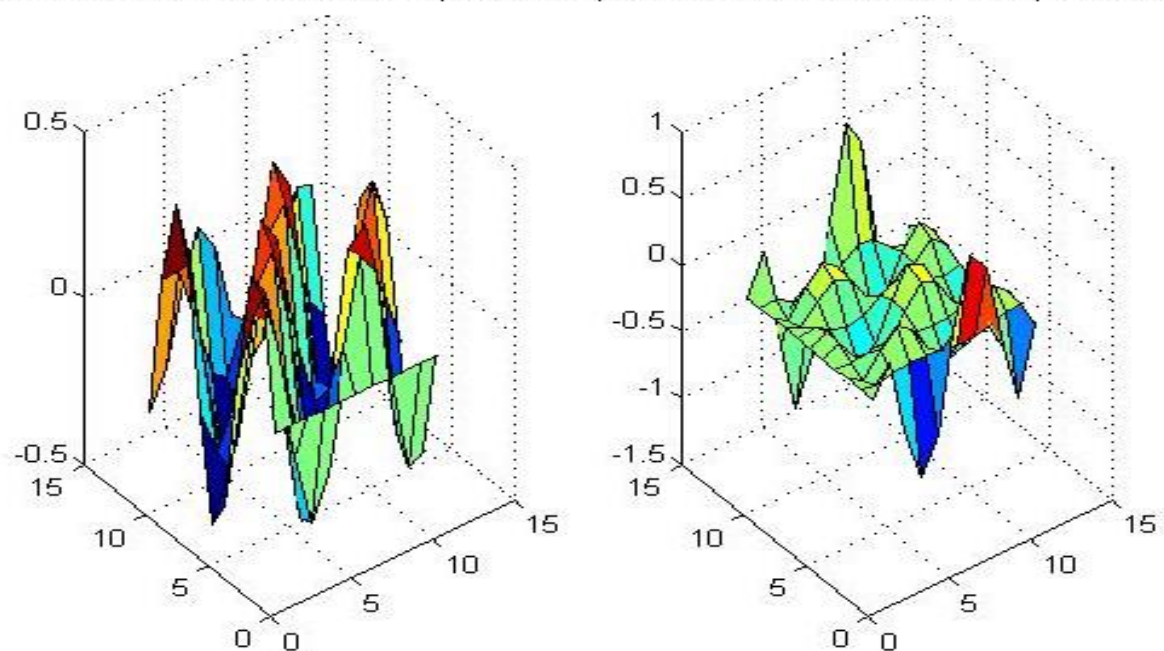
**Figure IV. 24:** erreur de la méthode explicite 6 pas du temps de la méthode implicite 6 pas du temps

**Au septième instant :**

erreur de la méthode EXPLICITE 7 pas du temps de la méthode IMPLICITE 7 pas du temps

**Figure IV. 25:** erreur de la méthode explicite 7 pas du temps de la méthode implicite 7 pas du temps**Au huitième instant :**

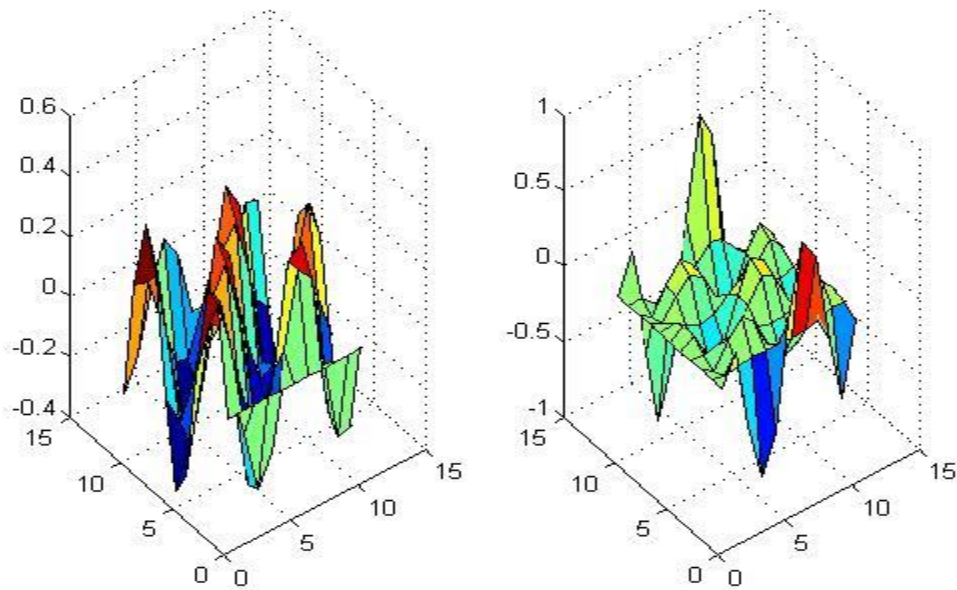
erreur de la méthode EXPLICITE 8 pas du temps de la méthode IMPLICITE 8 pas du temps

**Figure IV. 26:** erreur de la méthode explicite 8 pas du temps de la méthode implicite 8 pas du temps



**Au neuvième instant :**

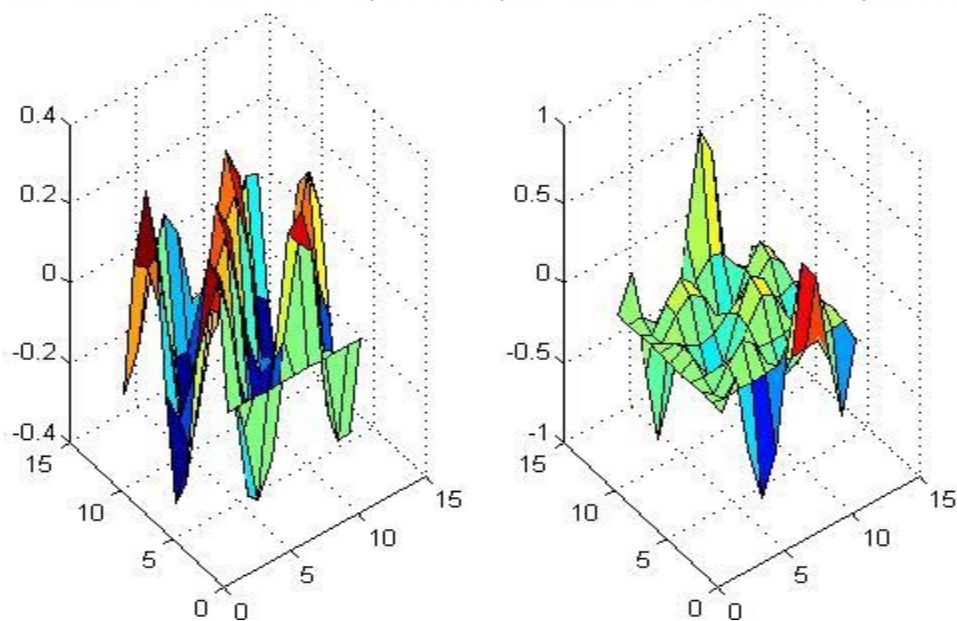
erreur de la méthode EXPLICITE 9 pas du temps de la méthode IMPLICITE 9 pas du temps



**FigureIV.27:** erreur de la méthode explicite 9 pas du temps de la méthode implicite 9pas du temps

**À la dixième instant :**

erreur de la méthode EXPLICITE 10 pas du temps de la méthode IMPLICITE 10 pas du temps



**Figure IV. 28:** erreur de la méthode explicite 10 pas du temps de la méthode implicite 10 pas du temps

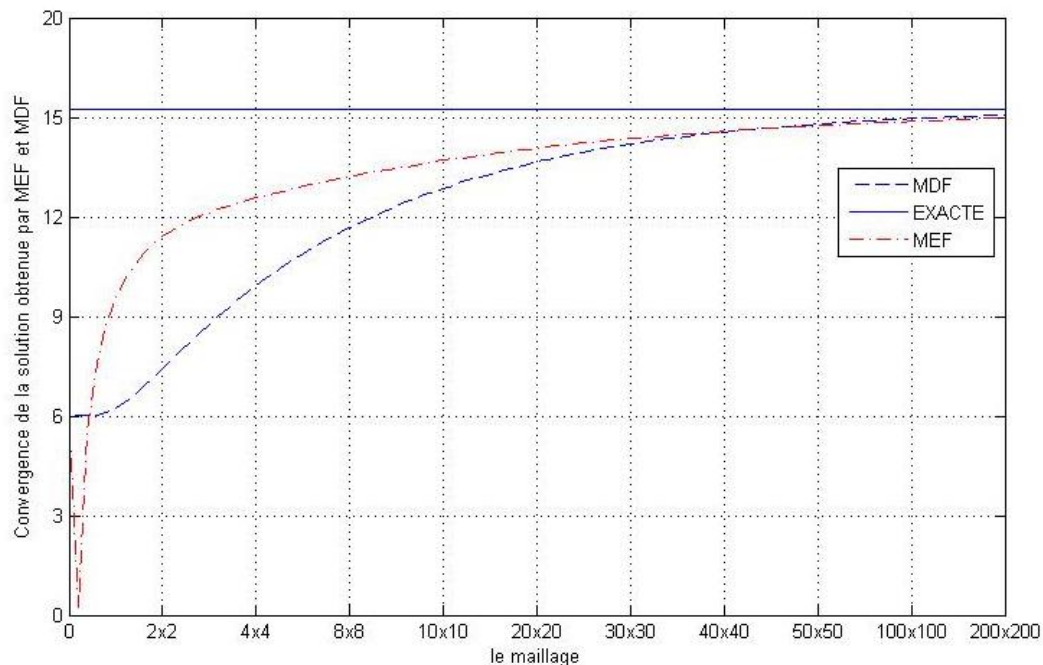
#### IV.5) comparaison entre la MEF et MDF (explicite) :

L'exemple suivant présente l'étude de la diffusion de la température dans un domaine rectangulaire en régime transitoire, nous rappelons que la matrice M est évaluée à l'aide de la méthode d'Euler pour les deux méthodes. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant et la solution analytique est donnée par l'expression suivante :

$$T_{\text{exacte}} = 0.25e^{-k^2\pi^2t/25} * \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

**Tableau VI.1** : résultats de comparaison entre la méthode EF et DF (t=1 s et dt=0.01)

Maillage	T <sub>MEF</sub>	T <sub>MDF</sub>	Exacte
2x2	11,60943791	7,48334353	15.4204
4x4	12,81629073	10,07712782	15.4204
10x10	13,68082562	13,05481737	15.4204
50x50	14,92014355	14,68012547	15.4204
100x100	15,02031248	14,91054785	15.4204



**Figure IV. 29:** Comparaison entre la méthode MEF et MDF en fonction du maillage

Une lecture rapide du tableau, nous observons que la MEF converge rapidement comparée à la MDF . Comme il est connu la MEF est basée sur le principe variationnel minimal pour formuler le problème traité par contre la MDF néglige les termes d'ordre élevé de développement de Taylor qui influe sur la convergence de la méthode.

La figure IV.29 présente la convergence de la solution obtenue par les deux approches numériques en fonction du maillage, la solution de référence est obtenue analytiquement par la méthode de séparation des variables, il est clair que la deux méthodes converges d'une façon monotone vers la solution de référence, qui se présente la stabilité de ces deux méthodes. laMEF présente une convergence très rapide comparée à la méthode des différences finies. Notons que les deux méthodes utilisent le même schéma pour évaluer la matrice M, ça explique la superposition des courbes au-delà le maillage 50x50.

#### **IV.6) Conclusions :**

A travers l'ensemble des tests réalisés dans ce chapitre, les cas traités ici sont relativement plus simples que ceux présentés dans la littérature jusqu'à ce jour avec les différents modèles numériques.

Dans la méthode explicite, lorsque les paramètres du maillage sont bien ajustés, on arrive à reproduire avec une précision inespérée les profils de diffusion de la température observés numériquement, le problème de l'instabilité de cette méthode est bien évité lors le choix un maillage raffiné en respectant le critère de stabilité numérique ( $r_x$  et  $r_y > 0.50$ )

Bien que les comparaisons entre la méthode implicite et la méthode explicite soient qualitatives seulement pour la stabilité numérique et la convergence, on peut constater que le modèle mathématique reproduit par les deux méthodes est difficile à implanter et surtout l'analyse des erreurs ou analyser la stabilité numérique, pour cela le recours vers d'autres procédures numériques est alors la solution pour franchir les limites de la méthode des différences finies.

Suite à ces explorations au sujet du modèle en éléments finis, on peut confirmer plusieurs remarques déjà soulevées par d'autres auteurs. La modèle élément fini présente des avantages importants lors le choix de la géométrie du problème traité, ne nécessite pas un maillage raffiné pour obtenir des résultats acceptables, donc il s'adapte facilement par la géométrie. Concernant le problème temporelle, la matrice M est évalué par la méthode

d'Euler, Rung – Kutta ou d'autre méthodes numériques, le choix d'une méthode plus stable implique la bonne formulation par éléments finis

Conclusion finale

# C onclusion finale

## V.1) Conclusion

La formulation et l'évaluation des modèles numériques pour l'analyse des problèmes de transfert thermique constituent l'un des axes de recherches importants de la modélisation et la simulation numérique. C'est dans cet esprit que notre travail se situe et se veut une étude de nature numérique, relative à la présentation un modèle en éléments finis et schémas aux différences dédiées à l'analyse de la diffusion de température dans un domaine rectangulaire. Ces modèle sont été programmés et implantés dans un code numérique sur Matlab.

La diffusion thermique, que nous avons traité, est discrétisée à l'aide d'éléments de type quadrilatéral Q4 pour la méthode des éléments finis et aux schémas implicite et explicite

L'évaluation de ces modèles est faite suivant un certain nombre de cas tests dont la plupart sont ceux proposés dans la littérature. À travers les résultats obtenus, dans les deux modèles, nous pensons que le choix de la méthode adéquate aux problèmes traités présente intérêt principale de la méthode numérique choisie, surtout sur le plan de la stabilité numérique de la méthode, pour prévoir des corrections sur la méthode ; il faut baser sur un concept plus stable lors la construction des modèles numériques.

## V.2) Recommandations pour des travaux futurs :

Le travail que nous avons présenté dans le cadre de notre étude, nous a permis de nous familiariser avec le domaine du développement théorique et numérique du domaine de transfert thermique. Nous le considérons comme une base pour un futur développement dans le domaine thermique, et dans ce contexte l'action à mener pour une continuation et une amélioration de ce travail peut ce résumé dans les points suivants :

Étendre cette étude à la formulation combinée en éléments finis ou d'autres procédures numériques, car ces méthodes nous offrent un outil d'analyse très puissant pour les différentes simulations des problèmes de l'ingénieur.

Nous pouvons considérer les résultats obtenus par la présente étude comme une référence à titre de comparaisons avec les autres solutions analytiques ou numériques

Adaptation de la présente formulation à étudier les domaines de forme géométrique complexes ou annulaires sectorielles.

---

Enfin, nous attribuons notre modeste travail intitulé «*Etude comparative entre la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies pour prédire la diffusion de la température dans un domaine rectangulaire*» dans l'actualité de la recherche scientifique dans le domaine des transferts thermiques soutenu par notre centre universitaire

# Référence bibliographique

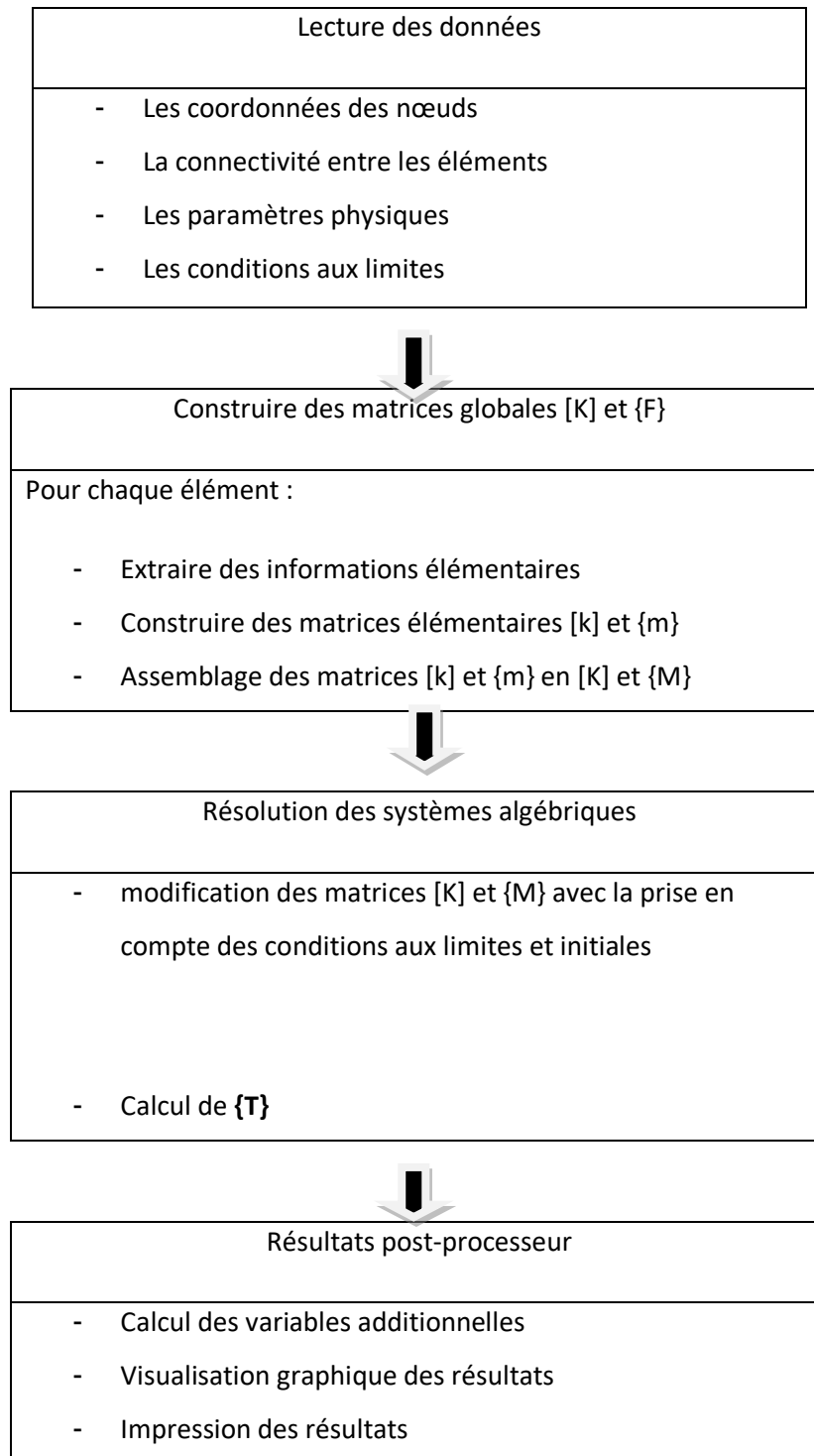
- [1] Pierre Cormault, «Cours de Thermique théorique et pratique», Edition Janvier, 1999.
- [2] Arif Ali, Thèse de Magister : Modélisation d'une installation a plasma inductif basse fréquence, Université de Biskra.
- [3] «Transfert thermique », [http://fr.wikipedia.org/wiki/Transfert\\_thermique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Transfert_thermique), Dernière modification de cette page le 26 mars 2013 à 16:25
- [4] Dominique Marchio et Paul Reboux, «Introduction Aux Transferts Thermiques », École des mines de Paris,ISBN : 978291176293, 2008, 6,7.
- [5] René LELEU, «Transferts De Chaleur » J 1 080, Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences fondamentales, 2,4, 10.
- [6] Yves JANNOT, «TRANSFERTS THERMIQUES », Ecole des Mines Nancy 2ème année, 2012, 5,6
- [7] Murray R. Spiegel, Analyse de Fourier et application aux problèmes de valeurs aux limites', McGraw-Hill, Paris, 1980.
- [8] M. Parodi, Mathématiques appliquées à l'art de l'ingénieur T5 Equations aux dérivées partielles', Sedes, Paris V, 1965.
- [9] T. R. Chandrupatala, A. D. Belegundu, Introduction to Finite Element in Engineering, Prentice-Hall International Editions, New Jersey, 1991.
- [10] Ali, Thèse de Magister : Modélisation d'une installation a plasma inductif basse fréquence, Université de Biskra.
- [11] L. CHAMPANEY: Méthodes d'Approximation de Solution pour les Problèmes de Physique. Université de Versailles
- [12] Lotfi. Chouikhi (palier à lévitation magnétique:modélisation et optimisation) mémoire de magistère .université de constantine.2002
- [12] Ali.rezik (étude comparative des différents modèles éléments finis pour le calcul des forces d'origine magnétique) mémoire de magistère 'université de Jijel ,2002
- [13] L. Mazliak . Genie Mecanique .Methodes mathematiques pour l'ingenieur.Ecole Polytechnique Universitaire . paris . 1<sup>iere</sup> ed.Anee 2007-08. 21p ISBN 2-225-830843



# Annexe

## Valeur des conductivités de quelques corps solides

Matériau	$\lambda(\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1})$	Matériau	$\lambda(\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1})$
Chrome	449	Ardoise	2,2
Argent	419	Grès	1,8
Cuivre	386	Verre	0,78
Papier	0,48	Aluminium	204
Zinc	112	Liège	0.040
Laine de verre	0,038	Fer (pur)	73
Acier Inox	16	Eau	0,556
Mercure	8,2	Air	0,0262

**Organigramme de calcul par la méthode des éléments finis**

<sup>1</sup>MATLAB est un logiciel interactif basé sur le calcul matriciel (MATrix LABoratory).

Il est utilisé dans les calculs scientifiques et les problèmes d'ingénierie parce qu'il permet de résoudre des problèmes numériques complexes en moins de temps requis par les langages de programmation et cette grâce à une multitude de fonctions intégrées et à plusieurs programmes outils testés et regroupés selon usage (boîtes à outils ou Toolbox).