

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
CENTRE UNIVERSITAIRE « SALHI AHMAD » NAAMA



INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE TECHNOLOGIE

Mémoire en vue de l'obtention d'un diplôme de :
Master en Génie Mécanique
Option :Energétique

Intitulé

Simulation numérique d'interaction fluide-structure
Application sur Piston-Carburant

✍ Présenté par : BOUKHALFA Abdelouaheb

Soutenu le : 01 /07/2019 devant les membres des jurys :

Dr. DRISS Medjahed	MCB	CU Naâma	Président
Dr. BELABED Zakaria	MCA	CU Naâma	Encadreur
Dr. KHATIR Toufik	MCA	CU Naâma	Examineur

Année universitaire : 2018/2019

REMERCIEMENTS

Remerciements

En préambule de ce mémoire, je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens aussi à remercier mon encadreur Mr **Zakaria. BELABED**, docteur au centre universitaire de Naama pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail et pour l'orientation, la confiance, qui a constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port.

Mes remerciements s'étendent également à Mr : **B. Benameur** pour ses bonnes explications qui m'ont éclairé le chemin de la recherche et sa collaboration dans l'accomplissement de ce mémoire malgré ses occupations.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury : Mr **DRISS Medjahed** , Mr **KHATIR Toufik** pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je remercie également tous les enseignants pédagogiques de l'institut des sciences et technologie de centre universitaire de Naâma qui ont contribué à notre formation. Et mes collègues particulièrement **BENEDDINE Abdenaceur**, **OUSSAID Brahim**. À tous ceux et celles qui de près ou de loin ont apporté aide et encouragement, qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

Finalement, je tiens à remercier sincèrement ma famille et spécialement mes parents, mon épouse, mes filles Soundous et Tasnim, ma deuxième famille Mamouni et tous mes amis pour leurs soutiens à tous les moments et pour leurs encouragements tout le long de cette mémoire.

Résumé

Résumé

La structure et les modèles de fluides doivent être combinés, ou couplés, lorsque des problèmes d'interaction fluide-structure (**IFS**) sont adressés. Nous présentons d'abord les connaissances de base requises pour construire puis évaluer un couplage simple. L'approche proposée consiste à considérer un solveur dédié pour chacun des deux systèmes physiques impliqués. Nous illustrons cette approche en examinant l'interaction entre un gaz contenu dans une chambre unidimensionnelle fermée par un piston mobile attaché à un point externe et fixe avec un ressort. Une modèle unique est introduite pour la structure, tandis que trois modèles de complexité croissante sont proposés pour le solveur d'écoulement de fluide. Le modèle d'écoulement des fluides le plus complexe nous conduit à l'approche arbitraire Lagrangienne Eulérienne (ALE). Les avantages et les inconvénients de chaque modèle sont discutés. Les implémentations informatiques du modèle de structure, du modèle fluide et du couplage utilisent des scripts MATLAB.

Mots clés : interaction fluide-structure, dynamique masse-ressort, écoulement unidimensionnel de fluide, éléments finis, conservations d'énergie, déformation de maillage.

Abstract

Structure and fluid models need to be combined, or coupled, when problems of fluid-structure interaction (**FSI**) are addressed. We first present the basic knowledge required for building and then evaluating a simple coupling. The approach proposed is to consider a dedicated solver for each of the two physical systems involved. We illustrate this approach by examining the interaction between a gas contained in a one-dimensional chamber closed by a moving piston attached to an external and fixed point with a spring. A single model is introduced for the structure, while three models of increasing complexity are proposed for the fluid flow solver. The most complex fluid flow model leads us to the arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) approach. The pros and cons of each model are discussed. The computer implementations of the structure model, the fluid model, and the coupling use MATLAB scripts, downloadable from either <http://www.utc.fr/~elefra02/ifs> or <http://www.hds.utc.fr/~boufflet/ifs>.

Key words: fluid-structure interaction, mass-spring dynamics, one-dimensional fluid flow, finite elements, energy conservations, mesh deformation

ملخص

عند معالجة مشاكل تفاعل هيكل- مائع، يجب الدمج بين نماذج الهيكل والمائع. نقدم أولاً المعرفة الأساسية اللازمة لبناء وتقييم اقتران بسيط. النهج المقترح هو النظر في حل مخصص لكل من النظامين الفيزيائيين المعنيين. نوضح هذا النهج من خلال دراسة التفاعل بين الغاز الموجود في غرفة أحادية البعد مغلقة بمكبس متحرك متصل بنقطة خارجية ومثبت بنابض. نتم تقديم نموذج وحيد للهيكل، في حين تم اقتراح ثلاثة نماذج ذات تعقيد متزايد لحل تدفق المائع. يقودنا نموذج تدفق المائع الأكثر تعقيداً إلى نهج الصدفة لاقتران إيلر. وتناقش مزايا وعيوب كل نموذج. نستخدم تطبيقات الإعلام الآلي نموذج الهيكل، نموذج المائع و الدمج تخطيطات برنامج ماتلاب.

كلمات مفتاحية: تفاعل مائع – هيكل، حركة كتلة – نابض، تدفق على بعد واحد لمائع، عناصر محدودة، انحفاظ الطاقة، تشوه الشبكة

Table des matières

Table des matières:

Liste des figures :	i
Liste des tableaux.....	iii
Abréviations.....	iv
Nomenclature.....	v
Introduction générale	I
Chapitre I. Généralité sur les problèmes d'interaction fluide-structure.....	1
I.1. Introduction.....	1
I.2. Interaction fluide structure :.....	4
I.2.1. Fluide :	4
I.2.2. Structure :.....	5
I.2.2.1. Piston (mécanique)	5
I.2.2.2. Analyse des structures	6
I.2.3. Algorithme de résolution d'une interaction :.....	7
I.2.3.1. Traitement détaillé :	7
I.2.3.2. Caractérisation mathématique des écoulements en milieux déformables :	8
I.2.3.3. Méthodes de description de la cinématique d'un milieu continu :	9
I.2.4. Interaction fluide structure : application Piston-Carburant :	11
I.2.4.1. Introduction :	11
Chapitre II. Méthodes numérique qui analysent les problèmes d'IFS	15
II.1. Introduction.....	15
II.1.1. Définition.....	15
II.1.2. Vitesse de résolution de problème traité.....	15
II.1.3. Stabilité.....	15
II.1.4. Les trois grandes familles de méthodes	16

Table des matières

II.1.4.1. Les avantages et des inconvénients de la méthode de différences finies :	16
II.1.4.2. Les avantages et des inconvénients de la méthode des volumes finis :.....	16
II.1.4.3. Les avantages et des inconvénients de la méthode des éléments finis :	16
II.1.5. Méthodes numériques pour IFS.....	17
II.1.5.1. Introduction.....	17
II.1.5.2. Les différences finies	17
II.1.5.3. Les éléments finis	17
II.1.5.4. Les volumes finis.....	18
II.2. Méthode différences finies	19
II.2.1. Principe - ordre de précision.....	19
II.2.2. Notation indicielle - cas 1D	19
II.2.3. Schéma d'ordre supérieur.....	20
II.2.4. Dérivée d'ordre supérieur.....	21
II.3. Méthodes des éléments finis	22
II.3.1. Les grandes lignes de la méthode	22
II.4. Equations pour le fluide et la structure	23
II.4.1. Equations pour le fluide.....	23
II.4.2. Equation pour la structure.....	25
Chapitre III. Modèle numérique.....	26
III.1. Modèle physique: Description de l'application	26
III.2. Modèles mathématiques: Les équations gouvernantes.....	27
III.2.1. Partie de la structure	27
III.2.2. Partie fluide.....	27
III.2.2.1.Modèle A: Loi des gaz parfaits avec condition d'adiabatique	27
III.2.2.2.Modèle B: Modèle d'analogie de piston	28
III.2.2.3.Modèle C: évolution du débit de fluide compressible 1D.....	29

Table des matières

III.3.	Modèles numériques	33
III.3.1.	Solveur de structure	34
III.3.2.	Solveur de fluide.....	35
III.4.	Technique de déformation de maille de fluide	36
III.5.	Indicateurs de qualité pour le modèle C: analyse post-traitement.....	37
III.5.1.	Conservation de masse	37
III.5.2.	Conservation quantité de mouvement	38
III.5.3.	Conservation de l'énergie.....	38
III.6.	Modèle informatique	39
Chapitre IV.	Modélisation numérique.....	40
IV.1.	Présentation du modèle.....	40
IV.1.1.	Introduction.....	40
IV.1.2.	Méthode de la matrice masse ajoutée :	40
IV.1.3.	Méthodes semi-analytiques :	42
IV.1.4.	Méthode numérique avec FSI.....	43
IV.2.	Présentation du modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis	44
IV.2.1.	La structure	44
IV.2.2.	Le gaz:	45
IV.2.3.	Système couplé (structure-gaz).....	47
Chapitre V.	Résultats et discussions	48
V.1.	Introduction.....	48
V.2.	Exemple de simulation	48
V.2.1.	Les 1 ^{ère} résultats de simulation	49
V.2.2.	Les 2 ^{ème} résultats de simulation	50
V.2.3.	Les 3 ^{ème} résultats de simulation	52
V.3.	Remarques et conclusions :	56

Table des matières

Conclusion et recommandations	a
-------------------------------------	---

Liste des figures

Liste des figures :

Figure 1: La boucle de couplage fluide-structure (Chai 1996).....	4
Figure 2: Un piston permet la conversion d'une pression en un travail ou réciproquement.	6
Figure 3: structure d'un piston qui se déplace dans une chambre de combustion	7
Figure 4: Description Lagrangienne(Belakroum 2011).....	9
Figure 5: Description Eulérienne(Belakroum 2011).....	9
Figure 6: Description ALE(Belakroum 2011)	10
Figure 7: Esquisse problème de piston (Ischinger, Anthonissen et al. 2016).....	12
Figure 8: Principe de FSI(Lefrançois and Boufflet 2010)	12
Figure 9: Etapes générales de la méthode des éléments finis	22
Figure 10: Description eulérienne en mécanique des milieux continus: écoulement de fluide dans un volume de contrôle C (Sigrist 2015)	24
Figure 11: Fluide Newtonien et non-Newtonien (Sigrist 2015)	25
Figure 12: Un gaz enfermé dans une chambre avec un piston en mouvement(Lefrançois and Boufflet 2010)	26
Figure 13: Analogie de piston dans une chambre semi-infinie(Lefrançois and Boufflet 2010)	28
Figure 14: Maillage fluide composé de N nœuds et $N_{elt} = N - 1$ éléments finis à deux nœuds.....	31
Figure 15: Déplacement de la représentation de l'espace physique $\mathbf{x}(\mathbf{t})$.(Lefrançois and Boufflet 2010).....	31
Figure 16: Analogie électrique pour la mesure du débit en fonction du mouvement de la sonde.(Lefrançois and Boufflet 2010)	32
Figure 17: Discrétisation de l'axe temporel et solution correspondante.(Lefrançois and Boufflet 2010).....	34

Liste des figures

Figure 18: Déformation du maillage du fluide entre deux instants successifs t et $t + \Delta t$.(Lefrançois and Boufflet 2010).....	37
Figure 19: Schéma de couplage entre les solveurs de structure et de fluide.(Lefrançois and Boufflet 2010).....	39
Figure 20: élimination de la coordonnée circonférentielle	42
Figure 21: Boucle itérative de l'interaction fluide-structure.....	44
Figure 22: Influence de nombre d'élément sur la pression exercée à la paroi interne du piston pour trois modèle A, B et C ($A = 1 \text{ m}^2$; $L = 1 \text{ m}$).....	50
Figure 23: Influence de nombre d'élément sur la pression exercée à la paroi interne du piston pour trois modèle A, B et C ($A= 1 \text{ m}^2$; $L= 0.5 \text{ m}$)	51
Figure 24: Influence de nombre d'élément sur la pression exercée à la paroi interne du piston pour trois modèle A, B et C ($A= 0.1 \text{ m}^2$; $L= 1 \text{ m}$)	53
Figure 25: Variation des paramètres physique du fluide en fonction de longueur de déplacement du piston ($k = 105; 107; 109 \text{ Nm}$).....	54
Figure 26: Variation des paramètres physique du fluide en fonction de longueur de déplacement du piston ($m = 50 ; 100 ; 200 \text{ kg}$).....	56

Liste des Tableaux

Liste des tableaux

Tableau 1: la fréquence naturel du piston	56
---	----

Abréviations et nomenclature

Abréviations	
--------------	--

IFS	Interaction Fluide-Structure
ALE	Arbitraire Lagrangien Eulérien
MEF	Méthode des Eléments Finis
PFD	Principe Fondamental de la Dynamique
1D	Unidirectionnel (une seule direction)
EDP	Equation Différentielle Partielle
CFD	Computationnelle Fluide Dynamique

Abréviations et nomenclature

Nomenclature

Notation

$\{.\}$: Vecteur colonne

$_._$: Vecteur ligne

$[.]$ matrice

$.o$: Temps initiale à $t = 0$

$.o$: au repos

$.(x, t)$: x et t dépendante

ξ : Espace de référence

j : Index de nœud

$n - 1, n, n + 1$: indices de pas de temps $t - \Delta t, t$, et $t + \Delta t$

f^I : Vecteur pression du gaz

f^E : Vecteur forces volumiques

$_n$: Vecteur normal au piston

E : Matrice contrainte-déformation

ε : Tenseur de déformation

J : Jacobien

Nomenclature pour la structure

A : Section du piston [m^2]

m_p : Masse du piston [kg]

k_p : Rigidité du ressort [N/m]

$L_{so}, L_{se}, L_s(t)$: Longueur du ressort non étirée, au repos et à l'heure t [m]

$u(t), u'(t), u''(t)$: Déplacement du piston, vitesse, et accélération [$m, m/s, m/s^2$]

f_o, T_o : Fréquence naturelle et période de masse-ressort [Hz], [s]

Abréviations et nomenclature

Δt : Pas de temps [s]

E, E_c, E_p : Énergies mécanique, cinétique, et potentielle [J]

Γ_w : La surface immergée de la structure [m^2]

Ω_s : Volume de la structure (domaine structurel) [m^3]

ρ_s : Densité massique de la structure [kg/m^3]

Nomenclature pour le fluide

$\rho(t)$: Masse volumique [kg/m^3]

p : Pression [Pa]

v : vitesse fluide [m/s]

c : vitesse du son [m/s]

L : Longueur de la chambre [m]

w_x : Vitesse du maillage nodal [m/s]

e : Energie volumique totale [J]

C_v : Capacité calorifique spécifique [$m^2/s^2 \cdot K$]

R : Constante du gaz [$m^2/s^2 \cdot K$]

T : Température [K]

V : Volume de la chambre [m^3]

γ : Rapport spécifique de l'air

$F_i(q)$: terme quantité de flux q [$q \times m^3/s$]

$\tilde{F}_i(q)$: terme quantité de flux corrigée q [$q \times m^3/s$]

I : Impulsion [J]

Introduction générale

Introduction générale

La conception des pièces élémentaires des moteurs mécaniques sont relativement bien documentées dans la littérature spécialisée. Une importance est réservée à la modélisation numérique de l'ensemble de ces éléments en état de service en raison des sérieux dégâts engendrés par la destruction et le non fonctionnement des moteurs marqué par l'endommagement des systèmes et des appareillages dans l'industrie pétrolière , station de production de l'électricité par les turbines , ainsi que dans les installations électromécaniques. Ainsi des foyers d'incendie pourraient se propager de manière incontrôlée si l'alimentation en eau était coupée. En outre la destruction des moteurs ou machines thermiques et de leurs systèmes secondaires ainsi que le déversement possible des fluides pourrait conduire à des pertes économiques considérables.

Par ailleurs, un nombre important de problèmes d'engineering concerne les structures renfermant un fluide. La présence de ce dernier influence le comportement de la structure en mouvement et les déformations de la structure sont origine de la modification des charges transmises par le fluide. Dans ce cas, on parle de système couplé et ce type de problème est appelé interaction fluide-structure.

Une des anciennes études des effets dynamiques sur les interactions fluide-structure a porté sur la réponse dynamique des pistons en cours de service. Dans ces investigations, le piston a été considéré comme rigide et la réponse dynamique du fluide a été observée. Un traitement mathématique rigoureux de ce problème a été développé pour le cas des petits déplacements du liquide. Il s'agissait de trouver une expression du potentiel de vitesse du liquide satisfaisant l'équation de Laplace et les conditions aux limites appropriées à la surface du liquide et à l'interface fluide-structure.

Le problème de l'interaction dynamique entre le liquide en mouvement et les déformations élastiques des parois des pistons est d'un intérêt fondamental dans un nombre important d'applications énergétiques. Dans l'analyse de ces structures, la connaissance de leurs caractéristiques dynamiques (fréquences propres et modes propres associés) constitue l'étape la plus importante dont dépend le reste de l'étude de la réponse dynamique. Bien que la méthode des éléments finis ait apporté des réponses relativement précises à un certain nombre de problèmes liés à la complexité du comportement

Introduction générale

dynamique des pistons des moteurs thermiques, aujourd'hui la difficulté majeure rencontrée dans le dimensionnement de ce type des pièces élémentaires est de caractériser les sollicitations ainsi que les nombreux paramètres qui interviennent dans ces modèles. En effet les incertitudes relatives aux chargements, aux propriétés mécaniques et physiques des matériaux, à la géométrie ou encore aux conditions aux limites, sont des caractéristiques intrinsèques de ses systèmes.

L'objet de ce présent travail est de déterminer la réponse dynamique des pistons avec l'interface du carburant en cours de service avec la prise en compte de l'interaction fluide-structure. L'étude se base un modèle d'éléments finis obtenu par la discrétisation en éléments iso-paramétriques linéaires de la paroi intérieur du piston avec le couplage avec un modèle de différences finies pour l'interface en contact du liquide.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres principaux avec cette présente introduction en premier lieu et une conclusion générale.

Dans le premier chapitre on essaye de présenter les principaux modèles de l'interaction fluide structure en tentant de comprendre leurs mécanismes dans le cas des pistons des machines thermiques. Le chapitre deux présente les modèles numériques principales sur lesquelles se basent presque tous les codes avec plus ou moins de modifications. C'est également l'une de ces modèles qui est la plus utilisée par les constructeurs mécaniques souvent sous sa forme brute et son un véritable discernement. Les dangers de cette utilisation y seront également évoqués. Dans le chapitre trois, un modèle d'éléments finis simplifié sera présenté en insistant sur le moyen de la prise en compte de l'interaction fluide-structure. Ce modèle basé sur la méthode des éléments finis est composé d'un élément de structure, d'un élément de fluide et de conditions d'interaction. Ce modèle peut être facilement programmé dans MATLAB pour ses expérimentations numériques.

Le chapitre quatre est réservé à l'application du modèle précédent à des exemples de pistons avec l'interface des carburants. Le cinquième chapitre est réservé aux différents résultats obtenus à l'aide de l'implantation numérique des deux modèles ; le modèle structure et le modèle fluide. À la fin de ce chapitre plusieurs remarques et interprétations des résultats sont documentées. La conclusion résume les différentes conclusions obtenues à travers ce modeste travail.

Chapitre I

Chapitre I. Généralité sur les problèmes d'interaction fluide-structure**I.1. Introduction**

L'interaction fluide-structure (IFS) s'intéresse au comportement d'un système constitué par deux entités mécaniques considérées comme distinctes : une structure mobile (rigide ou déformable) et un fluide (en écoulement ou au repos) autour ou à l'intérieur de la structure. L'évolution des deux entités dépendant l'une de l'autre, un phénomène de couplage apparaît. Plus précisément, le mouvement de la structure est influencé par l'écoulement du fluide à travers les efforts transmis à l'interface, et, réciproquement, le mouvement de la structure influence l'écoulement du fluide par les déplacements de l'interface qui entraîne le fluide dans son mouvement (Figure 1).(Jendoubi 2016)

Les phénomènes d'interaction fluide-structure font partie de la vaste classe des problèmes multi-physiques. Un grand nombre de situations font apparaître à ces phénomènes. Différents régimes peuvent être distingués. Les applications en biomécanique font, en général, intervenir un liquide et une structure déformable de masses volumiques proches: écoulements sanguins dans les vaisseaux, déformation des globules rouges dans les capillaires, mais aussi la nage des poissons. Dans le domaine du génie nucléaire, l'usure d'un faisceau tubulaire d'un échangeur de chaleur, par instabilité sous écoulement, peut prendre à peine quelques secondes ; cet effet de couplage est pris en compte de façon primordiale pour des raisons de sûreté des installations de production d'énergie. La compréhension des effets de vibrations induites par écoulement a initié de nombreuses campagnes expérimentales et justifie aujourd'hui le développement de méthodes de calcul numérique en couplage fluide-structure. Dans le domaine du génie civil, on cite fréquemment l'exemple de destruction du pont de Tacoma dont la compréhension a donné lieu à une littérature scientifique abondante et qui illustre l'importance des effets d'interaction fluide-structure. Dans le génie naval, l'exemple de l'impact hydrodynamique est l'un des effets de couplage fluide-structure des plus parlants : il se pose pour des navires naviguant à grande vitesse et dans des conditions de mer difficiles. Dans le génie mécanique, l'interaction fluide-structure se manifeste dans l'étude du moteur à combustion interne, application sur un piston-carburant, la simulation numérique de l'interaction d'un piston avec un carburant est un domaine de recherche actif dans la dernière décennie. Il s'avère alors primordial d'établir les bases d'une modélisation fine de

l'interaction fluide-structure pour un piston et de proposer de nombreux schémas numériques à cet effet. Les principales difficultés de ce problème sont d'une part, le couplage entre la structure et le fluide à l'interface ; d'autre part, la génération du maillage puisque la structure est mobile, la gestion du temps de calcul et de la mémoire, etc. Toutefois, les comportements non linéaires des fluides et des solides complexes soumis à de grands déplacements ainsi que la déformation des interfaces induisent de nombreuses difficultés à surmonter, la résolution analytique de tels problèmes étant impossible. En régime stationnaire, ces phénomènes d'IFS sont étudiés depuis quelques années déjà mais restent d'une grande complexité et requièrent d'importantes ressources informatiques. En régime in-stationnaire, les temps de calculs sont démultipliés de sorte que ces phénomènes sont extrêmement complexes à modéliser et leur compréhension reste encore délicate. De nombreuses méthodes précises et robustes ont été développées au cours des dernières décennies afin de résoudre l'écoulement du fluide, d'une part, et la déformation de la structure, d'autre part. Avec le développement de la puissance des calculateurs, la simulation numérique du couplage de ces méthodes devient accessible. Cependant, il faut que ce couplage ne dégrade pas la qualité des résultats engendrés par les méthodes dédiées aux fluides et aux solides. En particulier, la simulation numérique se doit d'être stable pour obtenir un résultat de façon assurée. Le fait que les méthodes dédiées aux fluides et aux solides prises séparément soient stables n'assure en aucun cas la stabilité du système couplé. Par ailleurs, il faut assurer que la méthode numérique obtenue est consistante avec les équations résolues afin que le résultat numérique soit «proche», en un certain sens, de la solution physique du problème. On est alors confronté aux problématiques suivantes : assurer la conservation de l'énergie lors de la transmission des données entre les codes (fluide et solide) et gérer l'interface mobile où s'échangent les données et où se crée le couplage. En théorie, on suppose que l'on a une continuité des contraintes et des vitesses à l'interface entre le fluide et la structure. Ces conditions sont très largement utilisées dans les différents modèles d'interaction. La difficulté est de trouver une formulation adaptée pour la résolution des équations fluide-structure qui tient compte des parois mobiles et permet de simuler des écoulements fortement convectifs. Deux types d'approches peuvent être envisagés: une résolution explicite ou une résolution implicite. La résolution explicite découplée consiste, en général, à résoudre le problème fluide sur un domaine fixe, puis à intégrer une seule fois les efforts du fluide sur la structure pour en déduire le déplacement.

Cette approche ne donnera un résultat raisonnable que dans le cas où le mouvement de la structure est extrêmement lent par rapport au temps caractéristique de l'évolution du fluide. Cette approche est instable si le fluide est incompressible. Au contraire, nous souhaitons étudier des problèmes où la dynamique de la structure est comparable à celle du fluide. Dans ce cas, une approche totalement implicite permettant une résolution complète du système est utilisée. (Jendoubi 2016)

Une difficulté majeure tient au fait que le domaine de résolution du fluide varie en fonction du temps suivant le déplacement du solide avec, dans les cas qui nous intéressent, de grandes déformations de ce domaine. Trois principaux types d'approches sont envisageables pour traiter la déformation du domaine fluide : une approche multiphasique, une approche avec déformation de maillage ou une approche par domaine fictif. L'approche multiphasique (lagrangienne ou eulérienne) serait limitée au cas où le solide et le fluide seraient décrits par les mêmes équations avec des paramètres physiques variables affectés à chaque phase et advectés au cours du mouvement de l'interface. En général, les méthodes eulériennes (le domaine de calcul est fixe et ne suit pas le matériau) sont préférées pour le calcul de l'écoulement fluide, afin d'éviter de trop grandes distorsions des mailles de calcul. Au contraire, le solide est plutôt simulé avec des méthodes lagrangiennes (le domaine se déforme en suivant le déplacement matériel), qui permettent de suivre les discontinuités matérielles avec précision. Les approches de déformation de maillage permettent d'assurer une transition lisse entre ces deux types de modélisation. L'exemple typique d'une telle approche est la méthode «Arbitrary Lagrangian – Eulerian» (ALE) : le domaine fluide est déformé de façon à suivre l'interface fluide-solide. Le couplage de ces différentes formulations rend l'étude de ces systèmes complexes, tant d'un point de vue numérique que mathématique. La déformation du maillage induit des termes additionnels dans la résolution des équations du fluide. Cependant, des difficultés apparaissent lorsque le déplacement de la structure est trop important : le domaine fluide se déforme fortement ce qui nécessite l'introduction de nouvelles méthodes de mise à jour du maillage fluide. La troisième approche est la méthode des domaines fictifs. Cette méthode a été développée pour traiter les cas des interactions entre un fluide incompressible et une structure rigide (Jendoubi 2016).

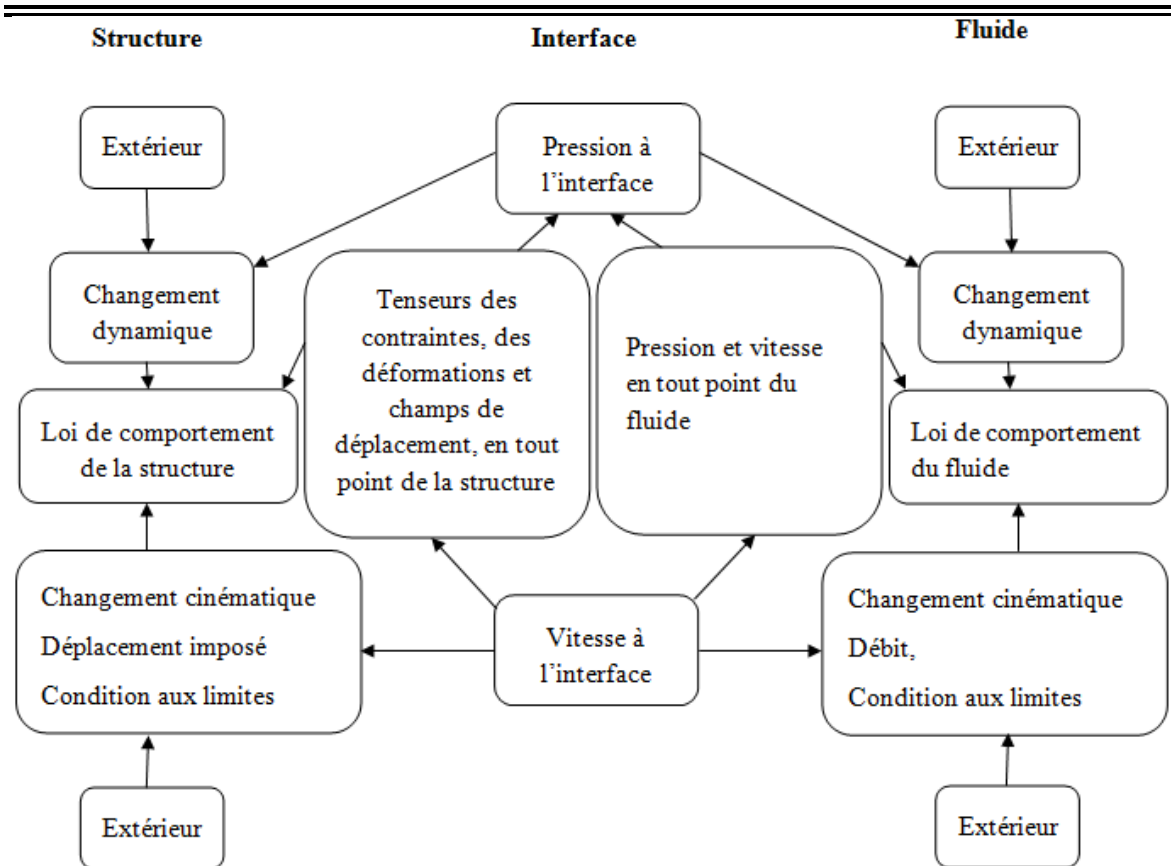


Figure 1: La boucle de couplage fluide-structure (Chai 1996)

I.2. Interaction fluide structure :

I.2.1. Fluide :

Le physicien distingue classiquement 3 états de la matière, solide, liquide et gazeux, en regroupant sous le vocable *fluide* les gaz et la plupart des liquides. À l'échelle microscopique, ce qui caractérise les fluides, c'est que les molécules ne sont pas bloquées dans leurs orientations relatives; elles ont ce degré de liberté (de désordre) que n'ont pas les molécules dans les solides.(Cengel and Cimbala 2017)

Leurs propriétés communes sont qu'ils n'ont pas de forme propre, c'est-à-dire qu'ils sont dépourvus de rigidité; les forces nécessaires pour engendrer des déformations par glissement et assez lentes sont extrêmement petites.(Cengel and Cimbala 2017)

Cette distinction entre solides et fluides n'est pas parfaitement nette, puisqu'on trouve des corps comme les gelées, les peintures, les pâtes, certaines solutions concentrées de polymères, qui manifestent à la fois des comportements de solides (pendant des temps

courts) et des comportements de liquides (pendant des temps longs).(Cengel and Cimbala 2017)

Les liquides: Les molécules sont liées en distance ce qui en limite le désordre. Ils occupent un volume défini et sont susceptibles de s'organiser en gouttes. Leur densité est telle qu'on définit d'ordinaire (assez mal) les liquides par le fait qu'en situation de repos, ils présentent une surface libre discernable et perpendiculaire au champ de gravité local.(Cengel and Cimbala 2017)

Les gaz: Les molécules ne sont pas liées en distance et les gaz occupent tout le volume disponible. Les forces permettant d'engendrer des déformations volumiques (contraction ou dilatation) sont faibles (Cengel and Cimbala 2017).

I.2.2. Structure :

Une structure est défini comme étant un ensemble des matériaux qui sont relient les uns par rapport aux autres, Ayons des formes régulière ou non régulière. On s'intéresse dans notre simulation à la structure mécanique qui comporte seulement des matériaux solides peut être formés de manière déformable sont : un piston mobile placer dans une cylindre cette dernière fixer dans une chambre de combustion .(بسايس 2012 والأخضر).

I.2.2.1. *Piston (mécanique)*

En mécanique, un piston est une pièce rigide de section généralement circulaire coulissant dans un cylindre de forme complémentaire. Le déplacement du piston entraîne une variation de volume de la chambre, partie située au-dessus du piston, entre celui-ci et le cylindre. Un piston permet la conversion d'une pression en un travail, ou réciproquement.

Les pistons sont présents dans de nombreuses applications mécaniques. La plus courante est le moteur à combustion interne, notamment dans l'automobile. On trouve également un ou plusieurs pistons dans les compresseurs, les pompes, les vérins, les détendeurs, les régulateurs, les distributeurs, les valves, les amortisseurs, mais aussi les seringues médicales ou les instruments de musique à pistons.

Il existe deux types de pistons : les pistons à simple effet, où la pression n'agit que sur une face (seringues médicales), et les pistons à double effet, où la pression agit sur ses deux faces (locomotive à vapeur). Le déplacement du piston provoque ou est provoqué par une pression à l'intérieur de la chambre.

La plupart des pistons sont d'une conception simple (un piston plat est tiré ou poussé par une tige), hormis dans les moteurs, où ils connaissent une étude poussée. Ces derniers diffèrent par leur forme, leurs fonctions et leurs dimensions, leur gamme est illimitée. Néanmoins, des « grandes classes » peuvent être distinguées selon le type de moteur (forme de la tête, matériaux utilisés, etc.)

Dans un moteur thermique, les pistons sont soumis à des contraintes mécaniques résultant de la pression de combustion des gaz et de la dynamique du déplacement cyclique, et à des contraintes thermiques, en raison de la différence de température entre le piston et les gaz brûlés. Ces contraintes expliquent le choix, en général, de l'acier.



Figure 2: Un piston permet la conversion d'une pression en un travail ou réciproquement

I.2.2.2. *Analyse des structures*

L'analyse des structures complexes pose pour l'ingénieur à faire des hypothèses simplificatrices, en tentant parfois d'analyser d'un coup la structure entière, aussi complexe qu'elle soit, grâce à la méthode des éléments finis (M.E.F), Cette dernière découpe la structure en composants élémentaires dont l'ensemble est calculé en une fois. La structure est, en général, résolue par une formulation classique en éléments finis. (بسایس and الأخضر, 2012)

Les techniques de calcul des structures ont connu ces vingt dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs. Ainsi, la M.E.F est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie. (بسایس and الأخضر, 2012)

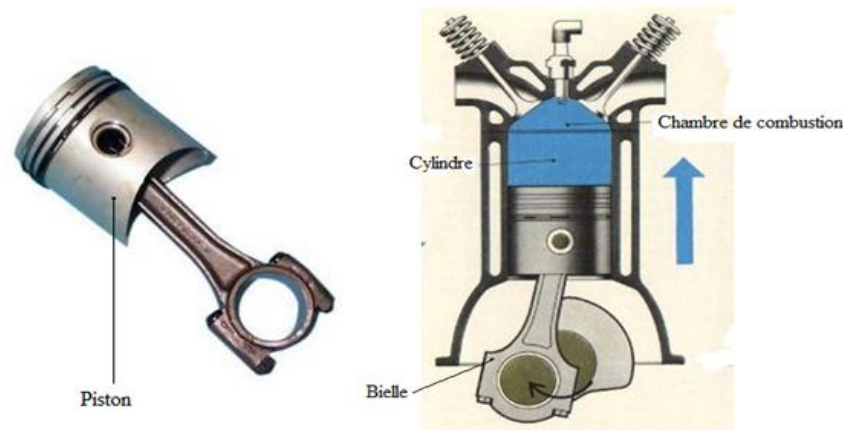


Figure 3: structure d'un piston qui se déplace dans une chambre de combustion

I.2.3. Algorithme de résolution d'une interaction :

I.2.3.1. *Traitement détaillé :*

La complexité de la modélisation mathématique des problèmes d'interactions fluides structures est due au besoin particulier à une description mixte des deux sous-domaines fluide et solide. Pour la partie solide le point de vue naturel c'est la description Lagrangienne, tandis que pour le fluide c'est la description Eulérienne qui est la mieux adaptée. Dans le cas de leur combinaison, une sorte de description hybride -généralement appelée description Arbitraire Lagrange-Euler où ALE- doit être utilisée. Cela est à l'origine d'une non-linéarité supplémentaire dans les équations qui en résultent.(Belakroum 2011)

Une approche numérique rigoureuse des problèmes d'interaction fluide-structure exige une modélisation numérique et des outils de simulation fiables. Des techniques robustes et efficaces sont essentielles à l'étude détaillée de tels phénomènes. Dans leurs contributions Legay et al. ont proposé une méthode basée sur une description Eulérienne pour le fluide et Lagrangienne pour la structure (Eulerian-Lagrangian). Contrairement à la formulation ALE, dans ce cas le traitement du fluide n'engage pas un mouvement du maillage afin de traquer le mouvement de l'interface fluide-structure. L'unique particularité de l'approche proposée réside dans la description de l'interface fluide solide par la technique dite de niveau fixe. Zhang et Gay se sont basés sur les mêmes formulations des sous domaines, mais ils ont utilisé la méthode des frontières immergées afin de déterminer la position de l'interface fluide-structure dans le temps et de résoudre ainsi le problème en sa globalité. Gestenberger et Wall ont présenté une méthode de résolution basée aussi sur une grille de

maillage fixe qui peut être appliquée à la plupart des interactions des structures et des fluides incompressibles. Cette approche est basée sur la stratégie des éléments finis enrichis. Le domaine fluide Eulérien et le solide Lagrangien sont partitionnés et couplés itérativement en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Cette approche permet la simulation de l'interaction de fluide et de structures minces ou volumineuses présentant de grandes déformations.(Belakroum 2011)

Récemment, une nouvelle méthode de simulation pour résoudre les problèmes de couplage fluide-structure a été développée par Sugiyama et al. Dans cette approche, toutes les équations de base sont résolues numériquement sur une grille fixe en utilisant un schéma des différences finies et la méthode de volume de fluide qui a été largement utilisée pour les simulations des écoulements polyphasiques. L'évolution temporelle de la déformation du solide est décrite dans un cadre Eulérien en mettant à jour à chaque pas de temps le tenseur de déformation de Cauchy-Green. Cette dernière approche traite les interactions fluides-structures impliquant des matériaux flexibles hyper-élastiques.

Les approches les plus précises sont celles basées sur une formulation ALE ou bien celles utilisant un domaine spatio-temporel déformé. Ces approches sont désignées comme étant des méthodes avec des capacités à traquer les interfaces de manière rigoureuse. A l'interface fluide-structure, les nœuds du maillage sont partagés entre les deux sous domaines et donc satisfont automatiquement la condition de continuité cinématique. Comme l'écoulement est résolu sur la totalité du domaine fluide déformé, l'interaction dynamique peut être correctement réalisée à travers des procédures itératives adaptées. Une fois, la méthode de remaillage est bien établie, des problèmes de différentes natures en matière d'interaction fluide-structure peuvent être abordés de manière satisfaisante et pouvant réaliser des prévisions précises. Toutefois, l'ensemble du domaine de calcul doit être remaillé à chaque pas de temps quand l'objet solide se déplace ou bien se déforme, ce qui est coûteux en matière de calcul.(Belakroum 2011)

1.2.3.2. Caractérisation mathématique des écoulements en milieux déformables :

Dans le but de faire le point sur la méthode utilisée dans ce travail pour la description de l'écoulement de fluide en domaine déformable. Nous allons présenter en premier lieu, les méthodes classiques relativement plus connues en matière de description de la cinématique des milieux continus. Vérifier les points forts et les points faibles de chaque

technique et mettre en évidence les capacités intéressantes de la méthode utilisée. Nous établirons aussi les équations de conservation et nous discuterons les spécificités et contraintes propres au traitement d'un écoulement en milieu à frontière mobile.(Belakroum 2011)

I.2.3.3. *Méthodes de description de la cinématique d'un milieu continu :*

Quand un milieu continu et en mouvement, ses grandeurs caractéristiques (température, vitesse, Tenseur de contrainte, ...) vont évoluer dans le temps. On peut décrire cette évolution soit en traquant les particules dans leur mouvement ou bien en observant l'évolution à des endroits fixes. Si on suit les particules de matière dans leurs mouvements, par conséquent, on exprimera les grandeurs caractéristiques comme fonctions de la particule identifiée par ses coordonnées et le temps. Cette méthode est nommée description matérielle ou *Lagrangienne*. Par contre, en observant les changements à des endroits fixes, on exprime les grandeurs caractéristiques comme des fonctions de point fixe et du temps. Cette description est connue sous le nom de description spatiale ou *Eulérienne*.(Belakroum 2011)

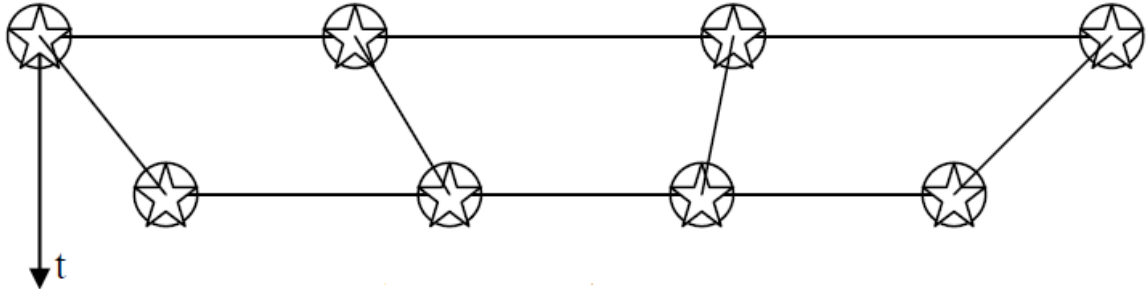


Figure 4: Description Lagrangienne(Belakroum 2011)

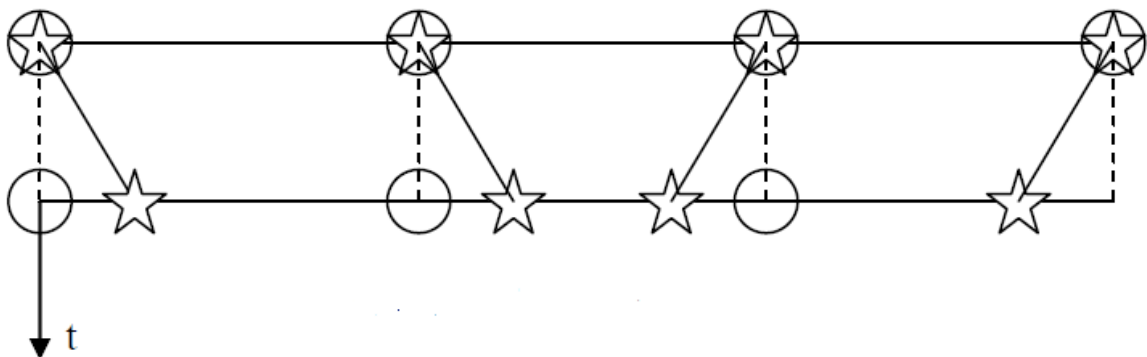


Figure 5: Description Eulérienne(Belakroum 2011)

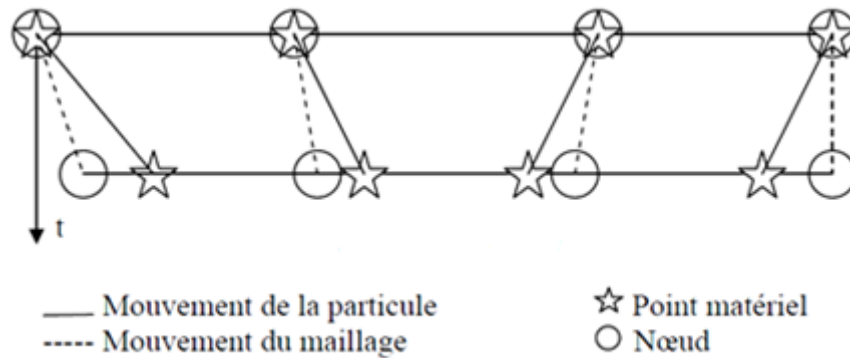


Figure 6: Description ALE(Belakroum 2011)

Par rapport au point de vue Lagrangien dans un algorithme de calcul, chaque nœud du maillage suit le point matériel durant son mouvement (Figure 4). Cette méthode est employée principalement en mécanique des structures. Les applications classiques de cette méthode dans les problèmes à grande déformation sont la simulation des crashes tests des véhicules ainsi que la modélisation des opérations de mise en forme des matériaux. L'utilisation d'une description Lagrangienne permet de traquer facilement le mouvement des surfaces libres et les interfaces entre les différents matériaux. Son point faible c'est l'inhabilité à suivre les grandes déformations du domaine de calcul sans avoir recours à de fréquentes opérations de remaillage.(Belakroum 2011)

La méthode Eulérienne est largement utilisée en mécanique des fluides. Dans ce cas de (Figure 5) le milieu continu est en mouvement par rapport au maillage. Cette formulation facilite le traitement des grandes déformations dans les mouvements des fluides et elle est indispensable pour la simulation des écoulements turbulents. Son handicap c'est la difficulté à traquer les surfaces libres et l'interaction entre différents milieux.(Belakroum 2011)

A cause des inconvénients des descriptions purement Lagrangienne et Eulérienne une nouvelle technique a été développée. Cette dernière combine les points forts des deux autres approches classiques. Cette technique est nommée, description arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (Arbitrary Lagrangian-Eulerian ALE).(Belakroum 2011)

En se ramenant à un domaine qui suit le mouvement de l'interface, sans être attaché aux particules fluides, cette modélisation permet de combiner les avantages du Lagrangien (traitement des mouvements de l'interface) et de l'Eulérien (traitement de la convection).

Dans la Méthode ALE, les nœuds du domaine de calcul peuvent se déplacer avec les points matériels comme dans une description purement Lagrangienne, ou bien, être fixes de façon Eulérienne, et aussi comme c'est suggéré sur la (Figure 6) être animés d'un mouvement arbitraire spécifié. A cause de cette liberté à déplacer le maillage offerte par la méthode ALE, les problèmes des distorsions excessives du milieu continu peuvent être résolus en préservant les limites claires aux interfaces typiquement comme cela est fait dans une configuration Lagrangienne. Les algorithmes de calcul basés sur la méthode ALE sont particulièrement adaptés à l'étude des écoulements de fluides dans les domaines déformables ou présentant des frontières mobiles. Avec le degré de liberté additionnel par rapport aux deux autres approches Eulérienne et Lagrangienne, la méthode ALE permet un certain degré de facilité dans les problèmes rencontrés dans les descriptions classiques.(Belakroum 2011)

Le concept de l'approche Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE) a été introduit la première fois pour la méthode des différences finies. Après, la méthode a été étendue à la méthode des éléments finis par plusieurs spécialistes. Cette approche est basée sur le mouvement arbitraire du référentiel (ou le mouvement du maillage) comme un système de coordonnées en addition aux deux domaines matérielle et spatial. Avec l'introduction de ce nouveau référentielle, ensemble avec une méthode de remaillage, l'écoulement dans des domaines déformables peut être simulé efficacement.(Belakroum 2011)

I.2.4. Interaction fluide structure : application Piston-Carburant :

I.2.4.1. Introduction :

Une modèle unique est introduite pour la structure, tandis que trois modèles de complexité croissante sont proposés pour le solveur d'écoulement de fluide. Le modèle d'écoulement des fluides le plus complexe nous conduit à l'approche ALE. Les implémentations informatiques du modèle de structure, du modèle fluide et du couplage utilisé des scripts MATLAB.(Lefrançois and Boufflet 2010)

Nous illustrons cette approche en examinant l'interaction entre un gaz (carburant) contenu dans une chambre unidimensionnelle fermé par un piston mobile attaché à un point externe et fixe avec un ressort (Lefrançois and Boufflet 2010) (**Figure 7**).

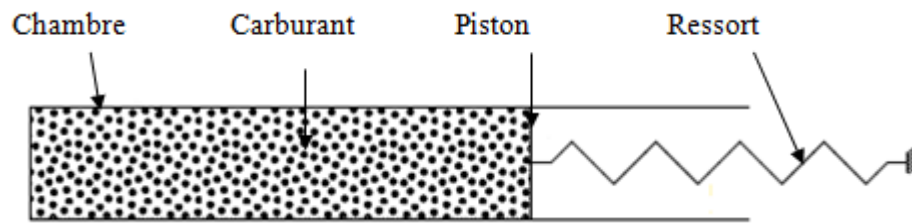


Figure 7: Esquisse problème de piston (Ischinger, Anthonissen et al. 2016)

L'équation générale pour *IFS* résulte de l'application du principe fondamental de la dynamique (*PF**D*), ou la deuxième loi de Newton, au système mécanique. (Lefrançois and Boufflet 2010)

$$m\vec{\gamma} = \sum_{\text{forces}} \vec{F}_i \quad \text{I.1}$$

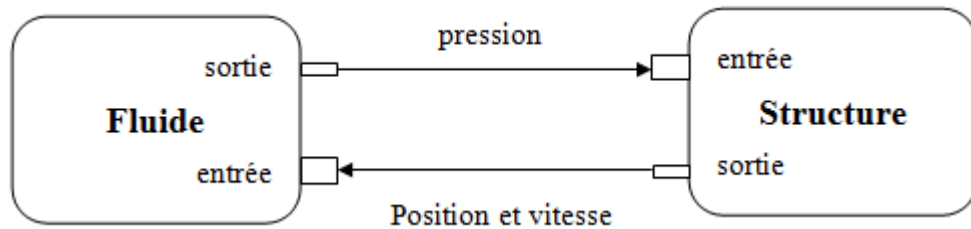


Figure 8: Principe de FSI (Lefrançois and Boufflet 2010)

avec m la masse du système, $\vec{\gamma}$ le vecteur d'accélération, et \vec{F}_i les forces appliquées (par ex. gravité, aérodynamique). Une approche simple consiste à associer un solveur spécialisé avec chaque partie de l'équation, en utilisant une technique de couplage pour fournir l'égalité terme, ainsi (I.1) peut être décomposé comme suit:

Terme à gauche: calculé avec un solveur de structure.

Terme à droite: calculé avec un solveur d'écoulement de fluide.

Egalité: un schéma de couplage pour mettre à jour les données communes entre les solveurs. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Avec ce type de couplage, nous devons identifier les données communes qui sont entrées et sortie pour chacun des solveurs. Dans le cas d'un calcul *IFS*, les données échangées

correspondent à la pression pariétale et le champ de position et de vitesse d'un système mécanique (**Figure 8**). (Lefrançois and Boufflet 2010)

Historiquement, les modèles numériques ont été d'abord utilisés pour étudier le comportement élastique. Les calculs de fluides sont plus complexes, en raison de la convection et les effets de turbulence, par exemple. Des niveaux d'approximation peuvent être utilisés, selon le niveau de précision requis. Dans tous les cas, la prudence est nécessaire la structure de couplage et les solveurs de fluide. Masse, la quantité de mouvement, et la conservation de l'énergie doit être respectée entre les termes de (I.1); ce n'est pas automatiquement le cas lorsque les solveurs sont utilisés pour calculer les termes gauche et droit. Ces critères fournissent la base principale pour vérifier la qualité des calculs *IFS*. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Notre but est de fournir une compréhension basique mais solide des chiffres sous-jacents physique de *IFS*. Différents modèles de fluides sont considérés et comparés. Nous devons utiliser l'application suivante à titre d'illustration: l'interaction entre un liquide contenu dans une chambre unidimensionnelle (1D) fermée par un piston mobile. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Résoudre le problème nécessitera les éléments suivants:

- ✎ Un modèle structurel pour résoudre la dynamique du piston. N'importe quoi l'entrée est la pression de fluide exercée sur sa section par l'air enfermé, et les sorties sont la position et la vitesse du piston.
- ✎ Un modèle d'écoulement de fluide pour calculer la pression changeante sur le piston. Les entrées sont la position et la vitesse du piston, et la sortie est la pression du fluide.

La résolution de tout problème physique à l'aide d'outils numériques sur un ordinateur fait partie d'un processus général qui peut être résumé comme suit:

- ✎ Construire un modèle physique: cela consiste à lister les variables inconnues, dans le but de définir la géométrie du système à étudier, les conditions aux limites, et les propriétés physiques, et d'établir des hypothèses (par exemple, fixes ou non, 1, 2 ou 3 dimensions, et le type de physique des solides, de mécanique des fluides ou de thermique) .
- ✎ Construire le modèle mathématique: c'est la formulation mathématique. des relations régissant l'équilibre mécanique.

- ✎ Construire un modèle numérique en utilisant la différence finie, le volume fini, ou méthodes par éléments finis, par exemple. Le modèle numérique consiste en système d'équations algébriques à résoudre.
- ✎ Développer un modèle informatique afin de résoudre le modèle numérique avec un grand nombre d'inconnues.(Lefrançois and Boufflet 2010)

Chaque étape de ce processus traite du même problème, mais chacun utilise son propre langage. Ce qu'on appelle la pression dans le modèle physique est indiqué par la variable $p(x, t)$ dans le modèle mathématique, par la variable nodale indexée p_i^n (situé à la discrète position x_i au temps indexé n) dans le modèle numérique, et finalement par un ensemble d'adresses de mémoire dans le modèle d'ordinateur.(Lefrançois and Boufflet 2010)

Trois modèles fluides de complexités croissantes sont considérés: l'équilibre classique la loi de gaz d'état avec l'hypothèse adiabatique, l'analogie de piston, et les équations générales régissant un écoulement compressible 1D basé sur la méthode des éléments finis. Afin de vérifier la qualité du couplage et de comparer les différents modèles, indicateurs de la masse, de la quantité de mouvement et de la conservation de l'énergie sont systématiquement calculés. Modèle informatique constitué de scripts écrits en langage MATLAB.(Lefrançois and Boufflet 2010)

On utilise la méthode des différences finies pour la discrétisation temporelle, la méthode des éléments finis (en 1D) pour la discrétisation de l'espace.(Lefrançois and Boufflet 2010)

Chapitre II

Chapitre II. Méthodes numérique qui analysent les problèmes d'IFS

II.1. Introduction

II.1.1. Définition

L'analyse numérique traite de nombreux problèmes de sciences physiques, biologiques, technologiques ou des problèmes issus de modèles économiques et sociaux. Elle intervient dans le développement de codes de calcul (météorologie, physique des particules...), mais aussi dans les problèmes de simulations (aéronautique, industrie nucléaire...) ou d'expérimentations mathématiques. Elle entretient des liens étroits avec l'informatique. Si sa partie théorique relève plus des mathématiques, sa mise en pratique aboutit généralement à l'implémentation d'algorithmes sur ordinateur. Ses méthodes se fondent à la fois sur la recherche de solutions exactes comme dans le cas de l'analyse matricielle ou du calcul symbolique, sur des solutions approchées qui résultent le plus souvent de processus de discrétisation comme dans le traitement des équations différentielles.(Jedrzejewski 2006)

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre un problème approché conduisent à un résultat qui est toujours entaché d'erreur. Cette erreur doit être suffisamment petite pour que la solution numérique converge vers la solution réelle. Dans ce cas l'algorithme (ou la méthode) est dit convergent. Si un raisonnement mathématique permet de montrer qu'une méthode diverge, elle ne pourra en aucun cas être utilisée sur un calculateur. En revanche, si la méthode converge il se peut qu'en pratique elle diverge.(Jedrzejewski 2006)

II.1.2. Vitesse de résolution de problème traité

La vitesse de convergence est un facteur important de la qualité des algorithmes. Si la vitesse de convergence est élevée, l'algorithme converge rapidement et le temps de calcul est moindre. Ces préoccupations de rapidité de convergence ont conduit à diversifier les modes de convergence et à chercher des processus optimaux.(Jedrzejewski 2006)

II.1.3. Stabilité

La stabilité garantit que les erreurs ne s'amplifient pas au cours du déroulement de l'algorithme et que la méthode reste stable. À côté de cette stabilité numérique, il y a aussi

Chapitre II Méthodes numériques analysent les problèmes d'IFS

la stabilité des solutions qui intervient dans les problèmes équationnels et qui est bien mise en évidence par les techniques perturbatives.(Jedrzejewski 2006)

Une méthode est dite instable si elle est sujette à une propagation importante des erreurs numériques de discrétisation et d'arrondi.(Goncalvès 2005)

Un problème peut être bien conditionné alors que la méthode numérique choisie pour le résoudre est instable. Dans ce cas, il est impératif de changer de méthode numérique. Par contre, si le problème de départ est mal conditionné, aucune méthode numérique ne pourra y remédier. Il faudra alors essayer de trouver une formulation mathématique différente du même problème, si on sait que le problème physique sous-jacent est stable.(Goncalvès 2005)

II.1.4. Les trois grandes familles de méthodes

Pour passer d'un problème exact continu régi par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes : les différences finies, les volumes finies et les éléments finies. Mais chacune de ces méthodes ont des avantages et des inconvénients.(Goncalvès 2005)

II.1.4.1. *Les avantages et des inconvénients de la méthode de différences finies :*

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.(Goncalvès 2005)

II.1.4.2. *Les avantages et des inconvénients de la méthode des volumes finis :*

Avantages : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.

Inconvénient : peu de résultats théoriques de convergence.(Goncalvès 2005)

II.1.4.3. *Les avantages et des inconvénients de la méthode des éléments finis :*

Avantages : traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.

Inconvénient : complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.(Goncalvès 2005)

II.1.5. Méthodes numériques pour IFS

II.1.5.1. *Introduction*

Pour analyser un phénomène naturel en générale ou un problème d'ingénierie en particulier, on est souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question. Le développement d'un modèle mathématique s'appuie généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes qui sont souvent des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites. Exemple, la théorie d'élasticité s'appuie sur le postulat fondamental de l'existence du vecteur contrainte et les équations générales d'élasticité linéaire isotrope sont obtenues avec les hypothèses de petites déformations, d'homogénéité et d'isotropie des matériaux ainsi que la linéarité des relations liant les contraintes et les déformations. La résolution analytique d'équations différentielles pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d'une solution analogue à la solution recherchée peut s'avérer coûteux en temps et en moyens. Avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est devenu possible de résoudre des systèmes d'équations différentielles très complexes. Plusieurs techniques de résolution numérique ont été ainsi développées et appliquées avec succès pour avoir des solutions satisfaisantes à des problèmes d'ingénierie très variés. (SEGHIR 2014)

II.1.5.2. *Les différences finies*

La méthode de différences finies consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage. (Goncalves 2005)

On utilise cette méthode pour la discrétisation temporelle (Lefrançois and Boufflet 2010), ou le domaine est un fluide à simuler.

II.1.5.3. *Les éléments finies*

La méthode consiste à approcher, dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle. Cette forme est équivalente à une forme de minimisation

Chapitre II Méthodes numériques analysent les problèmes d'IFS

de l'énergie en général (principe des travaux virtuels) dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou nœuds du maillage(Goncalvès 2005).

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis. Cette méthode consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.(SEGHIR 2014)

On utilise cette méthode (en 1D) pour la discrétisation de l'espace (Lefrançois and Boufflet 2010), où le domaine est une structure à simuler.

II.1.5.4. *Les volumes finis*

La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et est particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation, contrairement aux Eléments Finis, et est ainsi très utilisée en mécanique des fluides. Sa mise en œuvre est simple si les volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" sont des rectangles en 2D ou des parallélépipèdes en 3D. Cependant, la méthode des Volumes Finis permet d'utiliser des volumes de forme quelconque et donc de traiter des géométries complexes, contrairement aux Différences Finies. De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur cette méthode : Fluent, StarCD, CFX, FineTurbo, elsA...(Goncalvès 2005)

II.2. Méthode différences finies

II.2.1. Principe - ordre de précision

Cette méthode consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor et se déduit directement de la définition de la dérivée. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18^{ème} siècle (Euler, Taylor, Leibniz...).(Goncalvès 2005)

Soit $u(x, y, z, t)$ une fonction de l'espace et du temps. Par définition de la dérivée, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} \quad \text{II.1}$$

Si Δx est petit, un développement de Taylor de $u(x + \Delta x, y, z, t)$ au voisinage de x donne:

$$u(x + \Delta x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y, z, t) + \dots \quad \text{II.2}$$

En tronquant la série au premier ordre en Δx , on obtient :

$$\frac{u(x + \Delta x, y, z, t) - u(x, y, z, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) + O(\Delta x) \quad \text{II.3}$$

L'approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}(x)$ est alors d'ordre 1 indiquant que l'erreur de troncature $O(\Delta x)$ tend vers zéro comme la puissance première de Δx .

II.2.2. Notation indicielle - cas 1D

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage (ou grille de calcul) composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0, \dots, N$ régulièrement espacés avec un pas Δx . Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés les nœuds du maillage.

Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents nœuds du maillage.(Goncalvès 2005)

Chapitre II Méthodes numériques analysent les problèmes d'IFS

Notation : on note u_i la valeur discrète de $u(x)$ au point x_i soit $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée de $u(x)$ au nœud x_i , on note $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \dot{u}_i$. Cette notation s'utilise de façon équivalente pour toutes les dérivées d'ordre successif de la grandeur u .

Le schéma aux différences finies d'ordre 1 présenté au-dessus s'écrit, en notation indicielle :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O\Delta x \quad \text{II.4}$$

Ce schéma est dit "avant" ou "décentré avant" ou **upwind**.

Il est possible de construire un autre schéma d'ordre 1, appelé "arrière" :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O\Delta x \quad \text{II.5}$$

II.2.3. Schéma d'ordre supérieur

Des schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de x_i . On écrit :

$$u_{i+1} = u(x_i + \Delta x) = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O\Delta x^3 \quad \text{II.6}$$

$$u_{i-1} = u(x_i - \Delta x) = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O\Delta x^3 \quad \text{II.7}$$

La soustraction de ces deux relations donne : $u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O\Delta x^3$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O\Delta x^2 \quad \text{II.8}$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il faut utiliser plusieurs nœuds voisins de x_i . Le nombre de points nécessaire à l'écriture du schéma s'appelle le stencil. Par exemple, un schéma aux différences finies d'ordre 3 pour la dérivée première s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-u_{i+2} + 6u_{i+1} - 3u_i - 2u_{i-1}}{6\Delta x} + O\Delta x^3 \quad \text{II.9}$$

II.2.4. Dérivée d'ordre supérieur

Le principe est identique et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i . Par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u , on écrit :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + O\Delta x^4 \quad \text{II.10}$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + O\Delta x^4 \quad \text{II.11}$$

En faisant la somme de ces deux égalités, on aboutit à:

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O\Delta x^4 \quad \text{II.12}$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit "centré" pour approximer la dérivée seconde de u :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O\Delta x^2 \quad \text{II.13}$$

Il existe aussi une formulation "avant" et "arrière" pour la dérivée seconde, toute deux d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O\Delta x \quad \text{II.14}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta x^2} + O\Delta x \quad \text{II.15}$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées deuxième, troisième, etc...(Goncalvès 2005)

II.3. Méthodes des éléments finies

Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux problèmes d'équilibre. Elle permet de traiter, des géométries complexes contrairement aux Différences Finies mais elle demande un grand coût de temps de calcul et de mémoire.

De nombreux codes de calculs de structure reposent sur les Eléments Finis : ANSYS, CADD5, CATIA...(Goncalvès 2005)

II.3.1. Les grandes lignes de la méthode

Dans ce paragraphe, nous essayerons de présenter d'une manière simplifiée, les étapes d'application de la méthode des éléments finis et les outils nécessaires à sa mise en œuvre. La résolution d'un problème physique par éléments finis suit grosso modo les étapes suivantes : (Figure 9)

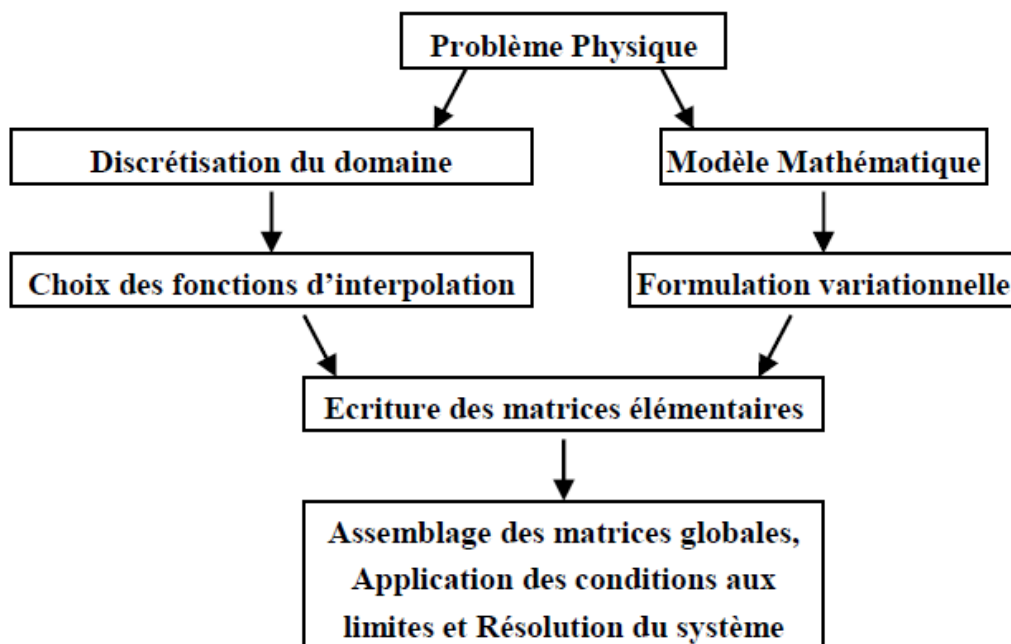


Figure 9: Etapes générales de la méthode des éléments finis

Etape 1 : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.

La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour. L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites.

Etape 2 : Division du domaine en sous domaines.

Chapitre II Méthodes numériques analysent les problèmes d'IFS

Cette étape consiste à discrétiser le domaine en éléments et calculer les connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses nœuds. Elle constitue ainsi la phase de préparation des données géométriques.

Etape 3 : Approximation sur un élément.

Dans chaque élément la variable tel que le déplacement, la pression, la température, est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autre. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

Etape 4 : Assemblage et application des conditions aux limites.

Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité,...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

Etape 5 : Résolution du système global :

Le système global peut être linéaire ou non linéaire. Il définit soit un problème d'équilibre qui concerne un cas stationnaire ou statique ou un problème de valeurs critiques où il faut déterminer les valeurs et vecteurs propres du système qui correspondent généralement aux fréquences et modes propres d'un système physique. Un problème de propagation qui concerne le cas transitoire (non stationnaire) dans lequel il faut déterminer les variations dans le temps des variables physiques et la propagation d'une valeur initiale. Les méthodes d'intégration pas à pas sont les plus fréquentes telles que, méthode des différences finies centrales, méthode de Newmark, méthode de Wilson. A ces méthodes doivent être associées des techniques d'itération pour traiter le cas non linéaire. La plus célèbre est la méthode de Newton Raphson.

II.4. Equations pour le fluide et la structure

II.4.1. Equations pour le fluide

Comme la forme d'un fluide qui s'écoule change avec le temps, la description de l'écoulement peut être réalisée dans le cadre eulérien. Alors que la formulation lagrangienne suit l'évolution d'un ensemble défini de matière, la formulation eulérienne se concentre sur le taux de changement de la quantité d'intérêt. La masse et la quantité de

Chapitre II Méthodes numériques analysent les problèmes d'IFS

mouvement d'un fluide sont établies à l'instant t dans un volume élémentaire C , le dit volume de contrôle tel que représenté à la Figure 10, quand le volume disparaît à zéro. Le jeu d'équations suivant, écrit ici avec une variable externe force de volume, est obtenue; ils tiennent pour un point donné $M \in C$ (Sigrist 2015)

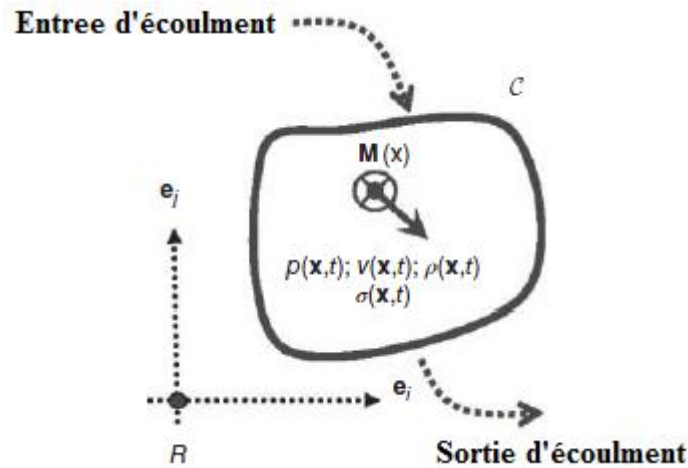


Figure 10: Description eulérienne en mécanique des milieux continus: écoulement de fluide dans un volume de contrôle C (Sigrist 2015)

Equation de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{II.16}$$

Equation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}(v)}{\partial x_j} \quad \text{II.17}$$

$p(x, t)$ est le champ de pression; les composantes du champ de vitesse $v(x, t)$ dans un système de coordonnées cartésiennes sont notés $v_i(x, t)$ ou $i \in [1, d]$, où d est la dimension du problème. $\sigma(x, t)$ et $\rho(x, t)$ désignent les champs de contrainte et de densité en un point donné. La force du volume externe est notée f , et ses composants sont f_i : dans la suite, il représente la gravité. Le tenseur de contrainte est exprimé comme $\sigma_{ij}(v) = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}(v)$ avec $\tau(v)$ le tenseur de contrainte de cisaillement. (Sigrist 2015)

Les équations (II.16) et (II.17) sont complétées par l'équation d'état du fluide $\rho(p)$, lequel relie la densité au champ de pression. (Sigrist 2015)

Chapitre II Méthodes numériques analysent les problèmes d'IFS

Pour les fluides newtoniens, la relation contrainte de cisaillement – déformation est linéaire, comme illustré dans la Figure 11 ; il est écrit comme suit:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \dot{\mu} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad \text{II.18}$$

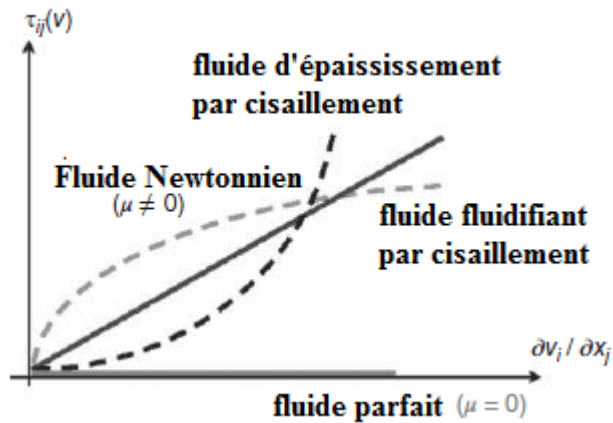


Figure 11: Fluide Newtonien et non-Newtonien (Sigrist 2015)

II.4.2. Equation pour la structure

Equation de mouvement

Le mouvement de la structure est décrit par l'équation d'équilibre de la quantité de mouvement: (Sigrist 2015)

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \dot{\mu} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad \text{II.19}$$

Chapitre III

Chapitre III. **Modèle numérique****III.1. Modèle physique: Description de l'application**

Comme illustré à la Figure 12 on considère un gaz contenu dans une chambre 1D, fermé sur son côté droit par un piston mobile et sur sa gauche par une paroi fixe. Le piston est de masse m_p et attaché à un point fixe externe avec un ressort (de rigidité k_p). Le ressort est défini par trois différentes longueurs, à savoir, non étiré (L_{so}), au repos sous pression (L_{se}), et à temps donné t au cours du processus *ISF* ($L_s(t)$). Le déplacement actuel, la vitesse et l'accélération du piston est, respectivement, donnée par $u(t)$, $\dot{u}(t)$ et $\ddot{u}(t)$ en ce qui concerne à sa position au repos. (Lefrançois and Boufflet 2010)

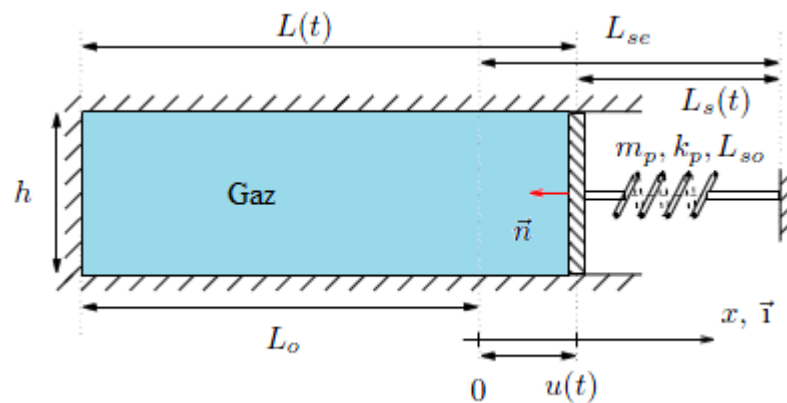


Figure 12: Un gaz enfermé dans une chambre avec un piston en mouvement(Lefrançois and Boufflet 2010)

Le gaz contenu c'est un carburant. Toutes les variables de fluide sont considérées comme uniformes pour toutes les sections. de la chambre (hypothèse 1D) et ne sont par conséquent dépendants que de x et de t . fluide est défini par sa masse volumique ρ , la vitesse v , la pression p , et la température T , comme ainsi que par certaines propriétés thermodynamiques qui seront décrites plus tard. initialement au repos à la pression p_0 . nous supposons qu'il n'y a pas de flux thermique entre le gaz et la chambre: le processus est considéré comme adiabatique. la chambre correspond à sa hauteur h et à sa longueur, définie comme L_0 au repos et $L(t) = L_0 + u(t)$ à l'instant t . (Lefrançois and Boufflet 2010)

L'objectif est d'étudier l'effet de gaz enfermé et compressible sur la réponse dynamique du piston. On considère des masses de piston multiples, pour illustrer modèle de flux de fluide doit être choisi avec soin, en fonction de sa réponse en fréquence.(Lefrançois and Boufflet 2010)

III.2. Modèles mathématiques: Les équations gouvernantes

III.2.1. Partie de la structure

Le mouvement du piston est régi par (I.1). Pour un piston mobile avec un seul degré de liberté (c'est-à-dire inconnu), $u(t)$ peut être écrit comme

$$m_p \ddot{u} = -k_p(L_s(t) - L_{s0}) \vec{n} \cdot \vec{i} + Ap(t) \quad \text{III.1}$$

avec A la section du piston, $L_s(t) = L_{se} - u(t)$ la longueur du courant, i le vecteur d'unité sur l'axe des x , et $n = -1$ le vecteur normal du piston. Le côté droit de (III.1) représente la force restaurée du ressort et la pression du fluide exercée sur le piston. La position statique au repos est définie par $u = \dot{u} = \ddot{u} = 0$ pour $p = p_0$. On déduit de (I.1)

$$k_p(L_{se} - L_{s0}) + Ap_0 = 0 \quad \text{III.2}$$

avec $p_0 =$ pression de la chambre au repos.

En substituant (III.2) en (III.1), on obtient finalement

$$m_p \ddot{u} + k_p u(t) = A(p(t) - p_0) \quad \text{III.3}$$

avec $u(0) = u^0$ et $\dot{u}(0) = 0$,

la forme classique d'un système masse-ressort complété par des conditions initiales sur $u(0)$ et $\dot{u}(0)$. Nous définissons $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k_p m_p}$ comme la fréquence naturelle en (Hz) et $\mathcal{T}_0 = \frac{1}{f_0}$ comme la période naturelle en (sec) du système masse-ressort. A ce stade, ce modèle est incomplet: la pression $p(t)$ exercée sur le piston est inconnue. Cette expression ne peut être calculée que par un modèle d'écoulement de fluide qui doit être couplé au modèle de piston (voir (III.3)). (Lefrançois and Boufflet 2010)

III.2.2. Partie fluide

Trois modèles de complexité croissante sont présentés pour l'informatique le terme de pression $p(t)$ dans (III.3).

III.2.2.1. *Modèle A: Loi des gaz parfaits avec condition d'adiabatique*

la pression interne dans la chambre est supposée être homogène (non dépendante de x) et directement dépend du mouvement du piston. Le processus de compression est supposé être adiabatique: il n'y a pas d'échanges entre le fluide et son environnement externe. Le

changement de pression $p(t)$ est donc régi par la loi adiabatique des gaz parfaits,(Lefrançois and Boufflet 2010)

$$p(t)V(t)^\gamma = p_0V_0^\gamma \text{ ou } \frac{p(t)}{\rho(t)^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}, \text{ avec } p(t) = \rho(t)RT(t) \quad \text{III.4}$$

$V(t) = V_0 + Au(t)$ définit le volume actuel de gaz, $T(t)$ et $\rho(t)$ sont la température et la masse volumique du gaz, R est la constante individuelle du gaz, et $\gamma = 1.4$ est le coefficient de chaleur spécifique du gaz. Termes avec un o indice se réfèrent aux conditions au repos.

L'hypothèse d'homogénéité (non dépendante de x) n'est valable que pour les vitesses de piston faibles, et il est donc supposé que le fluide s'adapte instantanément.(Lefrançois and Boufflet 2010)

Remarque 1 :

Pour ce modèle, il n'est pas possible de considérer simplement le cas d'une température constante (loi de Boyle-Mariotte, 1662, qui stipule $p(t) V(t)$ est maintenue constante).

Cette approche est en contradiction avec l'hypothèse adiabatique du modèle physique présenté: les flux thermiques sont en effet vitaux pour maintenir une température constante Processus de Boyle-Mariotte.(Lefrançois and Boufflet 2010)

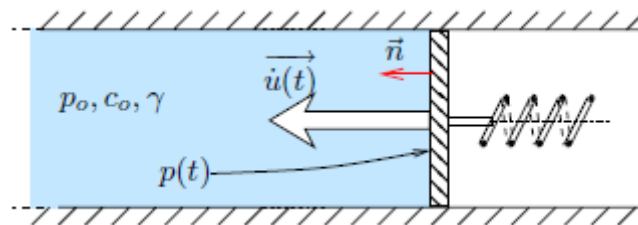


Figure 13: Analogie de piston dans une chambre semi-infinie(Lefrançois and Boufflet 2010)

III.2.2.2. *Modèle B: Modèle d'analogie de piston*

Ce modèle donne une relation analytique pour la variation de pression résultant du déplacement d'un piston dans un semi-infini chambre. Le concept est illustré à la Figure 13 La pression exacte exercé sur le piston en mouvement est alors donné par

$$p(t) = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{\overrightarrow{u}(t) \cdot \vec{n}}{c_0} \right) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \quad \text{III.5}$$

où p_0 et c_0 sont respectivement la pression et la vitesse du son ambiant conditions en face de l'onde générée par le piston et $\gamma = 1.4$ est la chaleur spécifique. Le modèle B, cependant, ne peut être utilisé que pour calculer la pression sur le piston, et pas à tout moment dans la chambre. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Remarque 2

Cette relation tient quand il y a une seule onde simple (sans onde réfléchissante due à des conditions aux limites inappropriées, par exemple). (Lefrançois and Boufflet 2010)

III.2.2.3. *Modèle C: évolution du débit de fluide compressible 1D*

Ce modèle est basé sur un ensemble de trois équations couplées régissant l'évolution non stationnaire d'un écoulement 1D compressible. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Équations de flux fluide 1D générales pour un domaine fixe

Pour un domaine fixe de longueur constante L , ces équations correspondent aux lois de conservation de :

$$\text{Masse: } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0,$$

$$\text{Quantité de mouvement: } \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial x} = 0, \text{ pour tout } x \in [0, L], t \geq 0,$$

$$\text{Energie totale: } \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p)v}{\partial x} = 0,$$

Toutes les variables sont (x, t) -dépendantes, mais cette notation a été supprimée pour plus de clarté. L'énergie volumique totale $e(x, t)$ est donnée par

$$e = C_v T + \frac{v^2}{2}, \text{ avec } C_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \gamma = 1.4, \text{ et } R = 287 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}.$$

C_v est la capacité calorifique spécifique du gaz dans un processus à volume constant, et R est la constante individuelle du gaz. La pression locale $p(x, t)$ est liée à la température $T(x, t)$ selon la loi des gaz parfaits:

$$p = \rho R T = (\gamma - 1) \left(\rho e - \frac{1}{2} \rho v^2 \right).$$

Aucuns effets visqueux ne sont considérés. Ces trois équations sont généralement combinées dans une forme vectorielle comme

$$\frac{\partial}{\partial t}\{U\} + \frac{\partial}{\partial x}\{F\} = \{0\}, \text{ avec } \{U\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho e \end{Bmatrix} \text{ et } \{F\} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{Bmatrix}, \quad \text{III.6}$$

qui est réécrit sous une forme indicative:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x} = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3., \quad \text{III.7}$$

L'index i est lié à la forme correspondant à la masse ($i = 1$), quantité de mouvement ($i = 2$), et la conservation de l'énergie ($i = 3$), respectivement.

Le terme $\{F\}$ est lié à un phénomène de transport: il est connu sous le nom de flux. Le flux $F = f(q)$ de n'importe quelle quantité q (par exemple, masse, quantité de mouvement et énergie) est défini comme la quantité circulant à travers une section S par unité de temps. Pour une section constante, il est lié à la vitesse du fluide local:

$$F(q) = \int_S q \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \quad \text{III.8}$$

où \vec{n} définit le vecteur d'orientation de la section (le long de l'axe des abscisses dans ce cas).

Notion de domaines mobiles

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre les équations d'écoulement des fluides. Cela implique de calculer la solution à discrète des emplacements, appelés nœuds, dans le domaine des fluides; deux nœuds successifs forment un élément fini. Le domaine de calcul est appelé un maillage et est illustré à la Figure 14. Les éléments finis à deux nœuds sont également représentés et numérotés à l'aide de parenthèses. Un nœud attaché à une limite mobile (comme le piston à $x = L(t)$) doit suivre. Pour éviter que les nœuds ne se heurtent ou ne se déplacent, les nœuds intérieurs doivent être déplacés, sauf pour le nœud attaché à la frontière fixe située à $x = 0$. Ceci est similaire à la compression ou à l'expansion du soufflet d'un accordéon. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Malheureusement, (III.7) n'est pas valide pour les nœuds mobiles: le terme d'écoulement F_i doit être corrigé pour prendre en compte le mouvement des nœuds où il est calculé. Considérons que tout point du domaine fluide est mobile à une vitesse donnée $w_x(x, t)$. Ce concept de coordonnées mobiles est illustré à la Figure 15.

La chambre est superposée en lignes droites, respectivement, pour les deux temps successive t et $t + \Delta t$. On considère un maillage composé de cinq nœuds situés à un intervalle régulier le long du domaine et indexés de 1 à 5. Ils sont représentés par

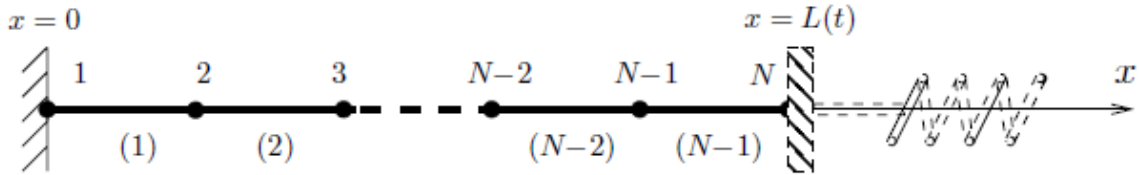


Figure 14: Maillage fluide composé de N nœuds et $N_{elt} = N - 1$ éléments finis à deux nœuds.

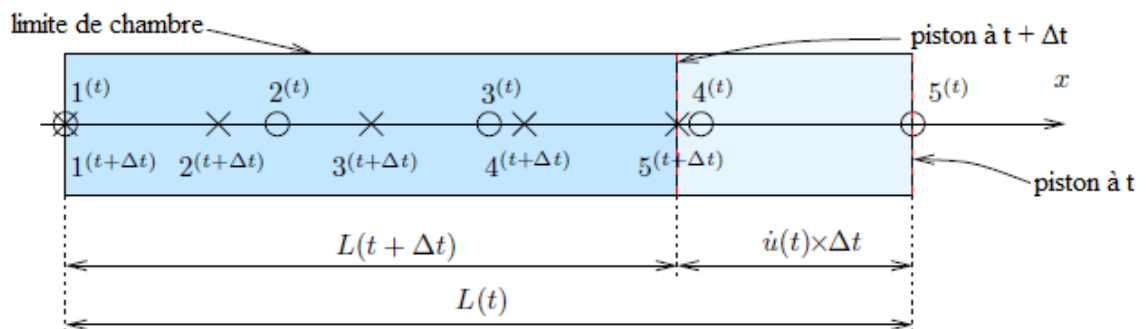


Figure 15: Déplacement de la représentation de l'espace physique $x(t)$. (Lefrançois and Boufflet 2010)

- un symbole de cercle (o) pour représenter leur position à l'instant t ;
- un symbole de croix (x) pour représenter leur position à l'instant $t + \Delta t$;

Il est clairement essentiel de pouvoir déplacer des nœuds afin d'éviter le déplacement effet de nœud, visible dans la Figure 15 entre les nœuds 4 et 5: si les nœuds 4 et 5 sont fixes, alors l'élément fini (4) est en dehors du domaine à $t + \Delta t$. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Formulations d'écoulement de fluide

A ce stade, deux formulations classiques basées sur les relations entre l'observateur attaché à un nœud et les particules de fluide peuvent être exploitées pour exprimer les relations d'écoulement de fluide:

- **Euler:** l'observateur est fixe ($w_x(x, t) = 0$) et voit passer les particules.
- **Lagrangien:** l'observateur est attaché à la particule fluide ($w_x(x, t) = v(x, t)$).

L'ensemble des équations (III.7) correspond à l'approche Eulérienne. Le Lagrangien approche est essentiellement utilisée pour les domaines fermés pour lesquels il n'y a pas de

conditions d'entrée ou de sortie (les mêmes particules peuvent être observées tout au long du processus). Dans le cas d'un écoulement dans une conduite, l'approche Lagrangienne souffre de la limitation la particule quittant le domaine (sortie) doit être remplacée par une nouvelle (entrée) .Une troisième formulation est proposée pour les cas généraux d'écoulement de fluide, sur la base d'une approches combinée Eulériennes et Lagrangiennes et connues sous le nom d'ALE (Lagrangien arbitraire Eulérienne).(Lefrançois and Boufflet 2010)

Calculer correctement les flux traversant une section mobile à la vitesse w_x est vital pour assurer la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ceci est illustré à la Figure 16 par une analogie électrique, à savoir la mesure dans un câble de l'écoulement des électrons passant à travers une sonde mobile. Trois cas différents sont considérés: une sonde fixe (Euler), une sonde mobile à la vitesse des électrons (Lagrangien), et enfin une sonde se déplaçant dans des directions opposées (ALE). Les sures sont illustrées avec une graduation de type ampérométrique en haut de la sonde. Le débit mesuré est alors fonction de la vitesse de jauge de la particule par rapport au mouvement de la sonde. Une section mobile à la vitesse w_x (voir les Figure 16 (b) et (c)), l'écoulement à travers cette section, donnée par (III.8), est corrigée comme suit pour prendre en compte le mouvement de section

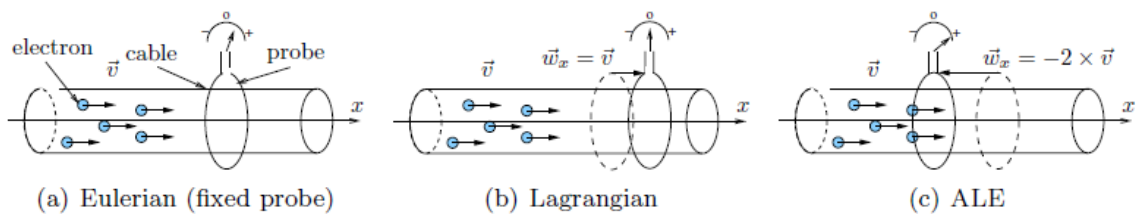


Figure 16: Analogie électrique pour la mesure du débit en fonction du mouvement de la sonde.(Lefrançois and Boufflet 2010)

(vitesse de jauge):

$$F(q) = \int_S q(\vec{v} - \vec{w}_x) \cdot \vec{n} dS.$$

Notez que si $\vec{v} = \vec{w}_x$, le flux mesuré est égal à zéro: l'observateur attaché au nœud en mouvement ne voit aucune particule passer.

Équations générales d'écoulement de fluide 1D pour la formulation d'ALE

Appliquer la même stratégie correctrice à la forme vectorielle donnée par (III.7) conduit à

$$\frac{\partial}{\partial t}(JU_i) + J \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{(F_i - w_x U_i)}_{\tilde{F}_i} = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3. \quad \text{III.9}$$

Le second terme \tilde{F}_i dans la dérivée spatiale est le flux corrigé par rapport à la coordonnée d'espace mobile. U_i, F_i restent fixes (voir (III.7)), et $w_x(x, t)$ définit le vitesse locale du domaine.

Cet ensemble d'équations est placé dans un espace fixe noté ξ (appartenant à $[0, L_0]$ afin de faciliter l'intégration mathématique. La variable $J(x, t)$ apparaît dans (III.7) est appelé Jacobien et est lié à la règle de substitution entre $x(t)$ et ξ . Il est défini par

$$J(x, t) = \frac{dx(\xi, t)}{d\xi} \text{ ou } \frac{d}{dx} = J \frac{d}{d\xi} \text{ tel que } \int_{x(t)} f(x, t) dx = \int_{\xi} f(x(\xi), t) d\xi.$$

Remarque 3

Cette forme est générale, couvrant à la fois la formulation Eulérienne en considérant $w_x(x, t) = 0$ et l'approche Lagrangienne en considérant $w_x(x, t) \equiv v(x, t)$, pour tous (x, t) . L'approche ALE combine les meilleures caractéristiques du Lagrangien description (suivi des surfaces libres et des interfaces entre différents matériaux sont typiques exemples) et la description Eulérienne. L'approche ALE permet aux nœuds sur la grille de calcul pour se déplacer de toute manière prescrite, et ici se trouve le pouvoir de l'approche ALE. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Les conditions aux limites sont données par une condition d'écoulement nul à $x = 0$ et en assurant compatibilité cinématique entre l'écoulement du fluide et la vitesse du piston à $x = L(t)$, c'est-à-dire,

$$v(0, t) = 0 \text{ et } v(L(t), t) = \dot{u}(t) \text{ pour } t \geq 0.$$

III.3. Modèles numériques

Techniques numériques avec un niveau croissant de complexité sont décrites dans cette section, à partir de l'équation différentielle scalaire classique pour le solveur de structure à l'approche par éléments finis pour le solveur d'écoulement de fluide du modèle C. (Lefrançois and Boufflet 2010)

III.3.1. Solveur de structure

La résolution temporelle du scalaire (III.3) est assurée en utilisant une différence finie implicite. Il est basé sur ce qui suit expansions de séries chronologiques sur u et \dot{u} :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \dot{u}^n + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{u}^n + \ddot{u}^{n+1}) \text{ et } \dot{u}^{n+1} = \dot{u}^n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}^n + \ddot{u}^{n+1}). \quad \text{III.10}$$

Les indices $n - 1$, n et $n + 1$ correspondent aux temps $t - \Delta t$, t , et $t + \Delta t$, comme illustré à la Figure 17. Δt est le pas de temps entre deux solutions successives. On déduit de la première relation donnée en (III.10)

$$\ddot{u}^{n+1} = \frac{4}{\Delta t^2} \Delta u - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}^n - \ddot{u}^n. \quad \text{III.11}$$

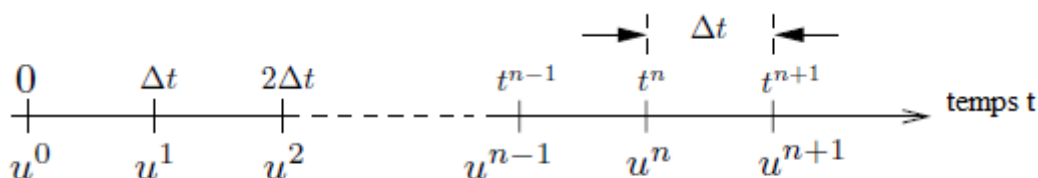


Figure 17: Discretisation de l'axe temporel et solution correspondante. (Lefrançois and Boufflet 2010)

La variation $\Delta u = u^{n+1} - u^n$ entre deux temps successifs est obtenue par injection (III.10) et (III.11) en (III.3), où toutes les variables de structure sont prises à l'instant $n + 1$:

$$\left(\frac{4m_p}{\Delta t^2} + k_p\right) \Delta u = A(p^n - p_0) + k_p u^n + m_p \left(\frac{4}{\Delta t} \dot{u}^n + \ddot{u}^n\right). \quad \text{III.12}$$

Cette relation de récurrence permet de calculer la nouvelle position du piston u^{n+1} à partir de u^n , \dot{u}^n , et \ddot{u}^n . La position de la structure est ensuite mise à jour en fonction de

$$u^{n+1} = u^n + \Delta u. \quad \text{III.13}$$

et la vitesse et l'accélération sont également mises à jour selon (III.10) et (III.11). La première étape ($n = 1$) de (III.12) requiert que les conditions initiales notées u^0 et \dot{u}^0 soient pris en compte pour que \ddot{u}^0 soit déduit. Il est facile de montrer à partir de (III.3) que

$$\ddot{u}^0 = \frac{1}{m_p} (-k_p u^0 + A(p(0) - p_0)),$$

où $p(0)$ est la pression uniforme dans la chambre résultant d'une variation adiabatique entraîné par le changement initial dans la position du piston u^0 . (Lefrançois and Boufflet 2010)

III.3.2. Solveur de fluide

Les modèles A et B expriment explicitement le changement de pression en fonction de la position du piston. Cette section est consacrée à la mise en le modèle C, qui est le plus complexe des modèles numériques présentés. Il est basé sur une approche par éléments finis pour la discrétisation spatiale et un schéma de Lax-Wendroff pour la résolution temporelle. Afin d'éviter les développements mathématiques fastidieux nous évitons délibérément d'entrer dans trop de détails ici. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Pour résumer, le modèle C basé sur la méthode des éléments finis nécessite un forme W du système (III.14),

$$W = \int_0^{L_0} \psi \frac{\partial J U_i}{\partial t} d\xi - \int_0^{L_0} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \tilde{F}_i d\xi + [\psi \tilde{F}_i]_0^{L_0} = 0 \quad \forall \psi(\xi) \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \quad \text{III.14}$$

où $\psi(\xi)$ est une fonction de test de classe C^1 (la première dérivée existe et est continue). L'intégration est effectuée sur l'espace fixe ($\xi \in [0, L_0]$) et les deux derniers termes résultent d'une intégration par parties du terme de flux.

Une intégration temporelle entre deux temps successifs (indexés n et $n + 1$) conduit à

(III.15)

$$\int_0^{L_0} \psi (J U_i)^{n+1} d\xi - \int_0^{L_0} (J U_i)^{n+1} d\xi - \Delta t \left(\int_0^{L_0} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \tilde{F}_i^{n+\frac{1}{2}} d\xi + \left[\psi \tilde{F}_i^{n+\frac{1}{2}} \right]_0^{L_0} \right) = 0 \quad \text{III.15}$$

La dernière étape est une discrétisation spatiale sur les éléments finis du maillage suivi par un processus d'assemblage pour obtenir

$$[M]^{n+1} \{U_i\}^{n+1} - [M]^n \{U_i\}^n - \Delta t \{R_i\}^{n+1/2} = \{0\} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \quad \text{III.16}$$

où $\{U_i\}^n$ est le vecteur global ($N \times 1$) des inconnues de l'équation de $i^{\text{ème}}$ de (III.9). $[M]^{n+1}$ et $[M]^n$ sont ($N \times N$) des matrices de masse globale ($N \times N$) (aux moments n et $n + 1$). Le terme $\{R_i\}^{n+1/2}$ est un vecteur résiduel global ($N \times 1$) calculé à l'étape du demi-temps. L'équation (III.16) représente le système d'équations à résoudre pour chaque pas de temps.

Remarque 4

A ce stade, les matrices de masse $[M]^n$ et $[M]^{n+1}$ sont calculées sur les mailles se déforment aux moments n et $n + 1$, respectivement. Dans l'analyse 1D, le résidu le vecteur $\{R_i\}^{n+1/2}$ peut être calculé sur n'importe quel maillage entre les temps n et $n + 1$, puisque le résultat du calcul est indépendant du maillage particulier choisi. Ce n'est pas, cependant, le cas dans les analyses 2D et 3D, où une loi de conservation de l'espace doit être respecté. (Lefrançois and Boufflet 2010)

La nature explicite du schéma Lax-Wendroff permet de résoudre le problème trois systèmes ($i = 1,2,3$) séparément pour chaque nouvelle étape $n + 1$. A stabilité temporelle critère doit néanmoins être satisfait afin d'éviter les fausses et non physiques oscillations qui se produisent lorsque le pas de temps choisi Δt dépasse le temps numérique nécessaire pour que l'information couvre une distance L^e correspondant à la longueur d'un élément. Ce critère, connu sous le nom de CFL (Courant, Friedrichs, et Levy), peut être écrit

$$\Delta t = CFL \times \min\left(\frac{L^e}{|v+c+w_x|}\right), \text{ ou } CFL < 1, \quad \text{III.17}$$

la stabilité spatial en présence d'effets convectifs significatifs (non développés ici mais disponibles dans le Scripts MATLAB). (Lefrançois and Boufflet 2010)

III.4. Technique de déformation de maille de fluide

Déformation de la maille fluide à chaque fois l'étape du couplage est nécessaire (voir section III.2.2.3.) pour

1. assurer compatibilité cinématique entre le domaine du fluide et la position du piston;
2. prévenir événement le phénomène de traversée par des nœuds fluides près du piston.

La Figure 18 illustre deux configurations de maillage successives aux instants t et $t + \Delta t$ résultant à partir d'un mouvement de piston positif égal à $\dot{u} \times \Delta t$, où \dot{u} est la vitesse du piston calculée par le solveur de la structure. La nouvelle position x_j^{n+1} pour le noeud j est donnée par une simple interpolation linéaire,

$$x_j^{n+1} = x_j^n + \frac{j-1}{N-1} \times u \times \Delta t \text{ pour } j = 1, \dots, N, \quad \text{III.18}$$

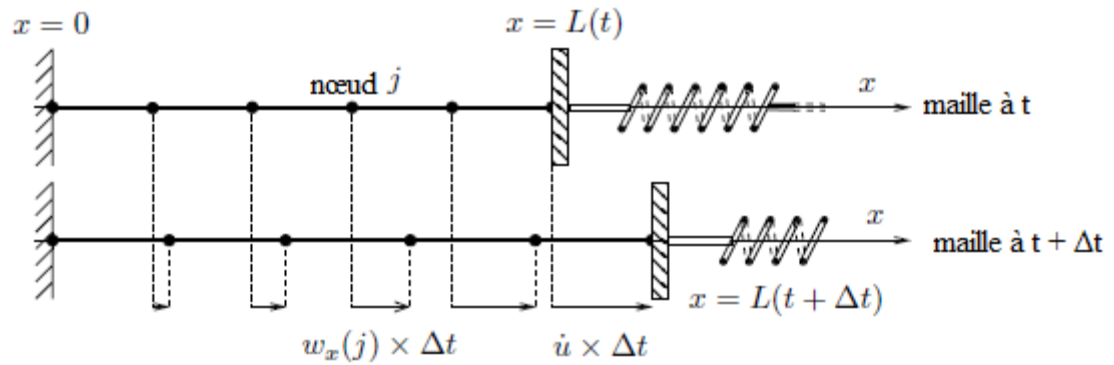


Figure 18: Déformation du maillage du fluide entre deux instants successifs t et $t + \Delta t$. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Où N est le nombre total de nœuds pour le maillage fluide. On déduit alors le nœud vitesse $w_x(j)$:

$$w_x(j) = \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{\Delta t} = \frac{j-1}{N-1} \times \dot{u} \text{ pour } j = 1, \dots, N, \quad \text{III.19}$$

III.5. Indicateurs de qualité pour le modèle C: analyse post-traitement

Trois indicateurs sont calculés pour vérifier les capacités de conservation de l'approche ALE (modèle C seulement) et le schéma de couplage. Tous trois sont obtenus en intégrant sur le domaine de (III.9) avec ($i = 1$) pour la masse, ($i = 2$) pour la force (ou l'impulsion), et ($i = 3$) pour l'énergie, telle que

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{L(t)} U_i A dx + A [F_i - w_x U_i]_0^{L(t)} = 0 \quad \text{III.20}$$

Le terme de flux a été modifié en utilisant le théorème de divergence. Considérant les définitions de U_i et F_i données par (III.6) et les conditions aux limites ($v(L(t)) = w_x(L(t)) = \dot{u}(t)$ et $v(0, t) = w_x(0, t) = 0$), on déduit de (III.20) les trois indicateurs suivants. (Lefrançois and Boufflet 2010)

III.5.1. Conservation de masse

Le premier composant de (III.20) correspond au fluide conservation de masse (M_f) dans un domaine fermé:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{L(t)} \rho A dx = 0 \Rightarrow M_f(t) = \int_0^{L(t)} \rho A dx = cte = M_f(0) \quad \text{III.21}$$

Le solveur de fluide calcule la masse $M_f(t)$ qui est comparée à la masse initiale $M_f(0)$. (Lefrançois and Boufflet 2010)

III.5.2. Conservation quantité de mouvement

Le deuxième élément de (III.20) exprime que la variation du moment de fluide résulte de la force du piston:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{L(t)} Av dx + p(0)A = -p(L)A \equiv \underbrace{-k_p u(t)}_{\mathcal{F}_p^s}. \quad \text{III.22}$$

Le terme de gauche (l'intégrale) est la force \mathcal{F}_p^s calculé par le solveur de fluide et est par rapport à la force du piston \mathcal{F}_p^s calculé par le solveur de structure. (Lefrançois and Boufflet 2010)

III.5.3. Conservation de l'énergie

Intégration temporelle du troisième composant de (III.20) entre la condition initiale et le temps actuel t donne l'impulsion $\mathfrak{T}(t)$ correspondant à la variation totale de l'énergie du fluide (terme à gauche) ou l'énergie du fluide nécessaire pour le mouvement du piston (terme à droite):

$$\mathfrak{T}(t) = \int_0^{L(t)} \rho A e dx - \int_0^{L(0)} \rho A e dx = - \int_0^t Ap(L, t) v(L, t) dt. \quad \text{III.23}$$

D'autre part, l'intégration temporelle de (III.3) permet de définir la variation de l'énergie mécanique du piston,

$$\varepsilon(t) - \varepsilon(0), \text{ avec } \varepsilon(t) = \frac{1}{2} m_p \dot{u}(t)^2 + \frac{k_p}{2} (L_{s_e} - u(t) + L_{s_o})^2. \quad \text{III.24}$$

L'énergie mécanique est composée d'une partie cinétique $\varepsilon_c(t)$ et d'une partie potentielle $\varepsilon_p(t)$. (Lefrançois and Boufflet 2010)

La conservation de l'énergie est alors assurée si

$$\mathfrak{T}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(0) \text{ ou } t \geq 0,$$

où $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} k_p (L_{s_e} - u(0) + L_{s_o})^2$ résulte des conditions initiales. $\mathfrak{T}(t)$ est calculé par le solveur fluide, tandis que $\varepsilon(t) - \varepsilon(0)$ est calculé par le solveur de structure. (Lefrançois and Boufflet 2010)

III.6. Modèle informatique

Le schéma de couplage met régulièrement à jour les données communes entre les solveurs de fluide et de structure, à savoir la pression et la position du piston et la vitesse. Le schéma de couplage est basé sur une méthode d'intégration temporelle échelonnée et est illustré à la Figure 19. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Ce schéma de couplage doit être lu comme suit:

- Etape (1): Transfert de $p(t)$ du fluide à la structure.
- Etape (2): Calcul de la nouvelle position et de la vitesse du piston.
- Etape (3): Transfert de $u(t + \Delta t)$ et $\dot{u}(t + \Delta t)$ de la structure au fluide.
- Etape (4): Calcul du fluide pour la nouvelle pression $p(t + \Delta t)$ et l'adaptation du maillage.

Revenez à l'étape (1) jusqu'à ce qu'un nombre d'étapes donné soit atteint.

Le modèle informatique a été développé en utilisant MATLAB, sous la forme d'un ensemble de modules L'instruction scripts. Documentation, y compris un tutoriel, est disponible à partir de <http://www.utc.fr/~elefra02/ifs> ou <http://www.hds.utc.fr/~boufflet/ifs>. (Lefrançois and Boufflet 2010)

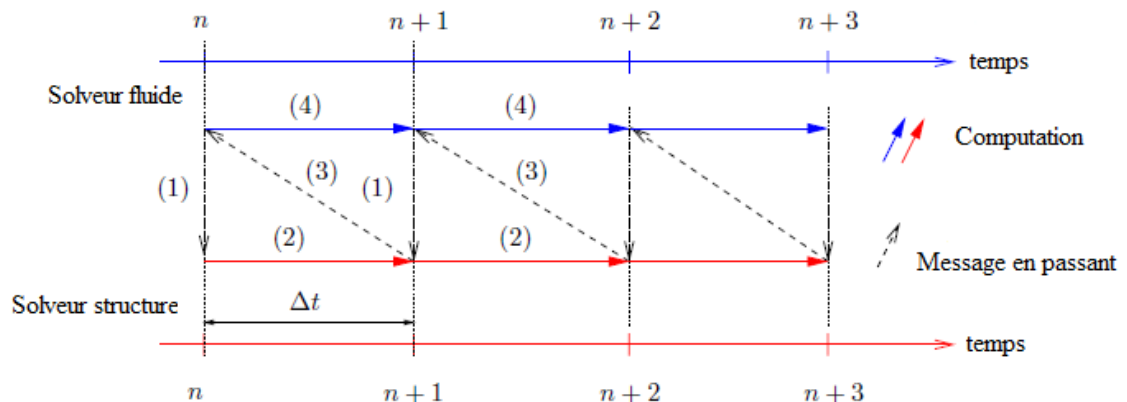


Figure 19: Schéma de couplage entre les solveurs de structure et de fluide. (Lefrançois and Boufflet 2010)

Chapitre IV

Chapitre IV. Modélisation numérique

IV.1. Présentation du modèle

IV.1.1. Introduction

Même si l'utilisation des méthodes numériques dans l'analyse des problèmes de l'interaction fluide structure date depuis l'apparition des premiers ordinateurs, elle s'est limitée souvent aux problèmes de la mécanique et de l'aéronautique ainsi qu'à ceux utilisés dans les enceintes nucléaires. Le comportement mécanique des pistons avec l'interaction avec le fluide qui nous intéressent ont néanmoins bénéficié de cet effort de recherche. Dans ce chapitre et le chapitre précédent, nous tenterons d'abord de classer les différentes méthodes numériques utilisées, avant de donner les détails de la formulation de la méthode 1D utilisée à travers des modèles fiables. (Capra and Davidovici 1980)

On distingue, historiquement, l'émergence de trois méthodes d'analyse principales :

1. La méthode de la masse ajoutée
2. Les méthodes semi-analytiques.
3. La méthode des éléments finis simplifiée.

La réponse dynamique du fluide a une très grande influence sur la réponse du piston. Une erreur résultant d'une approximation inappropriée du mouvement du gaz peut engendrer une grande erreur dans l'estimation de la réponse dynamique du piston. Les pressions du fluide ainsi que les forces d'impact sont les causes du principal transfert d'énergie aux surfaces internes attachées au piston. Le mouvement de la paroi est en outre la première source de l'énergie du fluide. Eu égard à la simultanéité de ce transfert d'énergie à travers la frontière du fluide, il est essentiel dans l'analyse par la méthode des éléments finis de tels problèmes d'utiliser des modèles permettant de traiter effectivement le couplage entre le fluide et la paroi du piston. (Clough 1977)

IV.1.2. Méthode de la matrice masse ajoutée :

C'est la méthode numérique la plus utilisée dans l'analyse de l'interaction fluide structure. Elle est exposée en détails dans tous les manuels spécialisés, voir par exemple les ouvrages de Zienkiewicz et Taylor [ZIE 91] et de Bathe [BAT 96]. Cette méthode présente l'avantage de ramener l'analyse à un problème de structure en ajoutant des

termes appropriés de masse et d'interaction. En considérant un fluide incompressible l'équation d'équilibre peut se mettre sous la forme :

$$(M + QH^{-1}Q^T)\ddot{\bar{u}} + C\dot{\bar{u}} + K\bar{u} + f = 0. \quad \text{IV.1}$$

avec :

$M_a = QH^{-1}Q^T$: Terme de la masse ajoutée

$$\tilde{C} = \int_{\Gamma_4} N_p^T \frac{1}{c^2} N_p d\Omega$$

$$H = \int_{\Omega} \nabla N^T \nabla N d\Omega$$

$$Q = \int_{\Gamma_1} N_u^T \cdot n \cdot N_p d\Gamma$$

Où n est la normale à l'interface. N_u et N_p sont les fonctions d'interpolation pour le déplacement et la pression respectivement.

On utilise ensuite un programme d'analyse de structure pour continuer l'analyse dynamique. Cette méthode qui trouve sans doute son origine dans les modèles théoriques présentés dans le chapitre trois, donne dans la majorité des cas pratiques des résultats satisfaisants avec des coûts de calcul modérés. Cette méthode est utilisée dans les logiciels NASTRAN ABAQUS[ABA 2004a]. Ce dernier logiciel utilise également la méthode IFS mais combiné avec le logiciel FLUENT à travers l'interface MPCCI

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne prend pas (sous sa forme initiale), ou pas de façon satisfaisante (sous sa forme modifiée) les mouvements de fluides. Cette limitation rend déconseillée son utilisation dans certains cas pratiques:

Exigeant une haute précision (réservoirs des enceintes nucléaires, des constructions aérospatiales)

Ou s'intéressant particulièrement aux mouvements des fluides comme c'est le cas des analyses donnant lieu à des résultats exploitables sous forme de recommandations réglementaires. (Hamdan 2000)

IV.1.3. Méthodes semi-analytiques :

Le principe de ces méthodes est de simplifier le modèle numérique en tirant profit de certaines particularités liées à la nature du problème (géométrie, chargement). L'objectif recherché est de diminuer la taille des matrices et/ou le nombre des algorithmes itératifs requis dans la modélisation numérique complète. Plusieurs méthodes ont été donc développées selon le développement analytique utilisé.

MinZhou et al [MIN 92] éliminent par exemple la coordonnée circonférentielle θ en considérant les variables (ici déplacements) comme des développements en séries de Fourier du type :

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)} \cos(n\theta)$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} v^{(n)} \sin(n\theta)$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} w^{(n)} \cos(n\theta)$$

IV.2

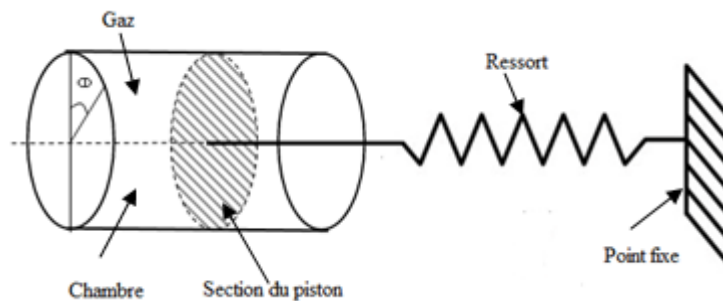


Figure 20: élimination de la coordonnée circonférentielle

Avantages :

1. Simplification considérable du modèle numérique complet surtout en présence de certaines complications supplémentaires telles les raidisseurs, les baffles, etc.
2. Une meilleure mise en évidence des phénomènes physiques que l'automatisation des méthodes numériques risque souvent de masquer.

Inconvénients :

1. Précision : La précision de ces méthodes est souvent insuffisante même pour les cas pratiques d'ingénieurs. Il faut souvent faire une lecture critique qualitative des résultats obtenus par les moyens bien connus des praticiens.
2. Dans certains cas ces méthodes sont totalement désuètes vu la diminution des prix de certains traitements numériques.

IV.1.4. Méthode numérique avec FSI

Dans cette méthode l'interaction fluide structure (FSI) est prise sous sa forme la plus complète, ce qui nécessite l'utilisation de programmes de résolution de structure et de fluide (CFD).

Interaction fluide-structure :

Le phénomène de l'interaction fluide-structure est d'une importance considérable dans plusieurs domaines pratiques. C'est le cas notamment dans la conception des structures automobiles et aéronautiques, dans la modélisation des structures offshore, des viaducs et bâtiments de grandes hauteurs. L'interaction fluide-structure joue un rôle primordial dans la réponse de certaines structures : châteaux d'eau, réservoir, barrages et dans plusieurs autres constructions industrielles.

Le thème interaction fluide-structure est un sujet général dans le sens qu'il rassemble tous les aspects associés simultanément à la mécanique des structures et à la mécanique des fluides. Et si l'on sait la complexité du comportement des deux corps associés pris séparément, on imagine aisément que le comportement de leur interaction serait encore plus complexe. En effet, l'interaction ou le couplage entre un fluide et un solide peut être présenté comme la boucle de la Figure 21 : le chargement surfacique de la structure est inconnu à priori mais dépend des pressions de l'interface dans le fluide, lesquelles pressions dépendent du mouvement de la surface de la structure.

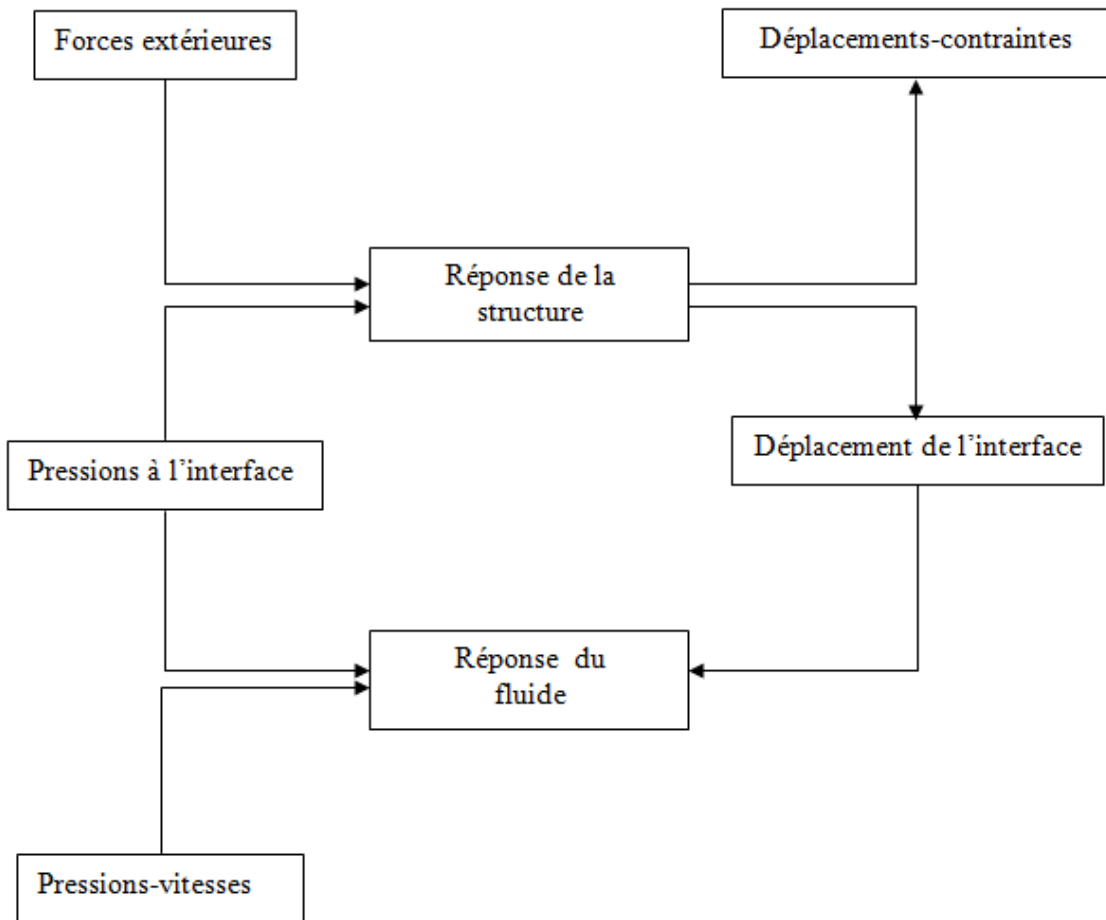


Figure 21: Boucle itérative de l'interaction fluide-structure

Les spécialistes de la MDF adoptent, selon le besoin, plusieurs modèles du fluide, Cette hypothèse est en fait justifiée par le niveau d'incertitude admis sur les diverses données utilisées dans ces mêmes projets. Des algorithmes pour l'interaction fluide-structure avec des modèles plus élaborés du fluide ont été développés par des chercheurs pour des besoins spécifiques, voir par exemple les travaux de Liu et al pour les fluides visqueux [LIU 88], [LIU 91]. (Krimat, Manseri et al. 2012)

IV.2. Présentation du modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis

Discretisation

IV.2.1. La structure

En utilisant le principe général d'Hamilton, on peut exprimer la fonctionnelle énergie de la structure par :

$$\Pi_s = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \varepsilon^T E \varepsilon d\Omega_s - \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \rho_s \dot{u}^T \dot{u} d\Omega_s - \int_{\Gamma_w} u^T f^I d\Gamma_w - \int_{\Omega_s} u^T f^E d\Omega_s \right] dt \quad \text{IV.3}$$

E : matrice contrainte-déformation

ε : tenseur de déformation

Ω_s : volume de la structure (domaine structurel)

Γ_w : la surface immergée de la structure

f^I : vecteur pression du gaz

f^E : vecteur forces volumiques

ρ_s : densité massique de la structure

En annulant les variations de la fonctionnelle précédente, on obtient le principe des déplacements virtuels :

$$\delta \Pi_s = \int_{\Omega_s} \delta \varepsilon^T E \varepsilon d\Omega_s - \int_{\Omega_s} \rho_s \delta u^T \ddot{u} d\Omega_s - \int_{\Gamma_w} \delta u^T f^I d\Gamma_w - \int_{\Omega_s} \delta u^T f^E d\Omega_s = 0 \quad \text{IV.4}$$

IV.2.2. Le gaz:

Dans ce paragraphe, la démarche utilisée est celle utilisée par El-Zeiny [ELZ 95], consistant à définir un indicateur variationnel en prenant la différence entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique pour un élément infinitésimale $d\Omega_f$, et en intégrant ensuite sur le volume du gaz Ω_f , soit :

$$\Pi_f = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega_f} \left\{ \rho_f g y - \frac{1}{2} \rho_f V \cdot V \right\} d\Omega_f \right] dt \quad \text{IV.5}$$

ρ_f : densité massique du gaz

y : coordonnée cartésienne mesurée sur une direction opposée à l'accélération de la pesanteur g

V : vecteur vitesse

Il reste encore à prendre en compte les conditions de continuité de glissement à la paroi (cinématique).

La condition cinématique assure que la vitesse normale du gaz à l'interface est égale au taux normal du déplacement de cette interface. Ces deux conditions sont ajoutées à la fonctionnelle précédente au moyen des multiplicateurs de Lagrange comme suit :

$$\Pi_f = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega_f} \left\{ \rho_f g y - \frac{1}{2} \rho_f \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} - \lambda_1 \rho_f \nabla \mathbf{V} \right\} d\Omega_f + \int_{\Gamma_f} \lambda_2 \{v_n - \dot{u}_n\} d\Gamma_f \right] dt \quad \text{IV.6}$$

où λ_i se réfère au $i^{\text{ème}}$ multiplicateur de Lagrange, \dot{u}_n est la dérivée temporelle du déplacement normal à la frontière et v_n est la vitesse normale à la frontière du gaz. En prenant les variations par rapport à V , on obtient les équations suivantes d'Euler-Lagrange :

$$\delta V: \quad -\rho_f \cdot V + \rho_f \cdot \nabla \lambda_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad \text{IV.7}$$

$$\delta v_n: \quad \lambda_2 - \rho_f \lambda_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \quad \text{IV.8}$$

D'où

$$V = \nabla \lambda_1 \quad \text{IV.9}$$

$$\lambda_2 = \rho_f \lambda_1 \quad \text{IV.10}$$

Il est clair dans l'équation (IV.9) que λ_1 n'est physiquement que le potentiel vitesse. L'équation (III.6) peut alors s'écrire :

$$\Pi_f = \int_{t_1}^{t_2} \rho_f \left[\int_{\Omega_f} \left\{ g y - \frac{1}{2} \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi \right\} d\Omega_f + \int_{\Gamma_f} \phi \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} - \dot{u}_n \right\} d\Gamma_f \right] dt \quad \text{IV.11}$$

En intégrant par parties, l'équation (IV.11) peut s'écrire :

$$\Pi_f = \int_{t_1}^{t_2} \rho_f \left[\int_{\Omega_f} \left\{ g y + \frac{1}{2} \nabla^2 \phi + \dot{\phi} \right\} d\Omega_f \right] dt \quad \text{IV.12}$$

Ou de façon plus concise :

$$\Pi_f = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega_f} P d\Omega_f \right] dt \quad \text{IV.13}$$

Où P est la pression totale pouvant s'exprimer par :

$$P = P_0 - \gamma_f \left[\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \phi}{2g} + y \right] \quad \text{IV.14}$$

Où P_0 est la pression hydrostatique du point.

IV.2.3. Système couplé (structure-gaz)

Afin d'appliquer le principe variationnel au problème couplé, les fonctionnelles de la structure et du liquide, données par les équations (IV.3) et (IV.12) seront couplées à leur interface par :

$$\dot{u}_s = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \text{IV.15}$$

$$f^l = P \cdot n \quad \text{IV.16}$$

Où $n = (n_x, n_y, n_z)$ est le vecteur normal unitaire sortant du liquide vers la structure.

Chapitre V

Chapitre V. Résultats et discussions

V.1. Introduction

Le but de ce chapitre consiste à présenter et interpréter les résultats de simulation et de développer un modèle informatique afin de résoudre le modèle numérique avec un grand nombre d'inconnues. Les résultats des calculs 1D IFS avec A, B et Les modèles de flux de fluides C sont présentés en mettant l'accent sur l'analyse physique. Fournissent également des comparaisons avec des versions dérivées du modèle C (Eulérien pur et approches Lagrangiennes pures) pour illustrer les avantages et les inconvénients particuliers des différentes techniques.

V.2. Exemple de simulation

Les valeurs des paramètres généraux sont :

Structure (Piston) :

Rigidité k du ressort : $k = 10^7 \text{ N/m}$

Section du piston : $A = 1 \text{ m}^2$

Longueur de la chambre au repos : $L = 1 \text{ m}$

Le fluide (Carburant) :

$\gamma = 1.4$: le rapport de chaleur spécifique du gaz

$R = 287 \text{ J/Kg.K}$: la constante des gaz

$C_v = \frac{R}{\gamma-1}$ (J/Kg.K) : la capacité calorifique spécifique des gaz à volume constant

$p_0 = 10^5 \text{ Pa}$: la pression initiale

$T_0 = 300 \text{ K}$: la température initiale dans la chambre

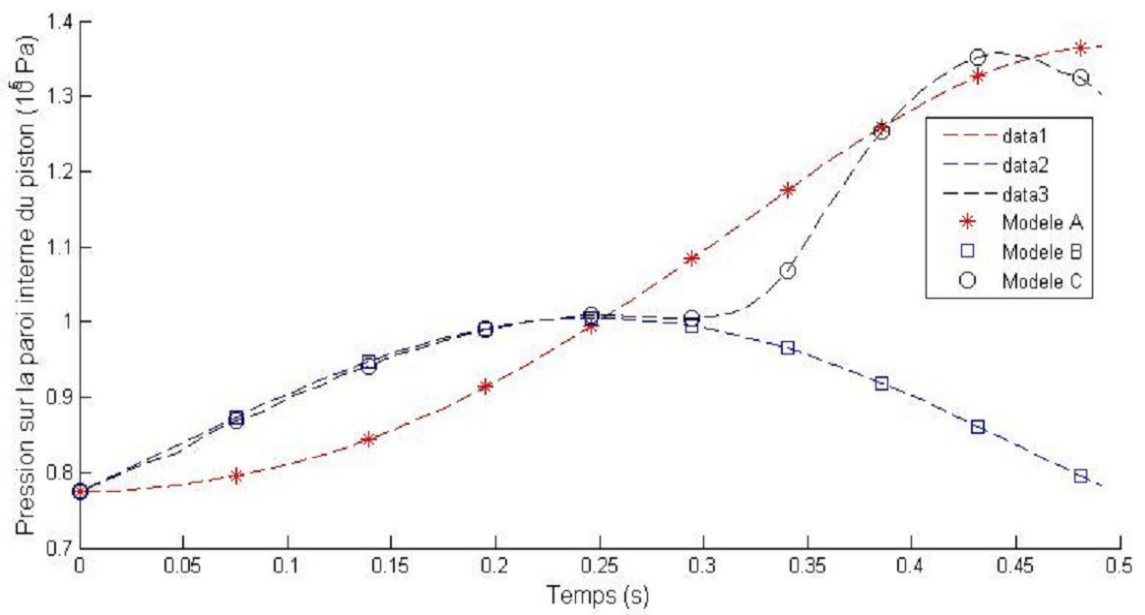
$c_0 = \sqrt{\gamma RT_0} = 334.7 \text{ m/s}$: la vitesse du son

$\rho_0 = \frac{p_0}{C_v \cdot (\gamma-1)}$ la masse volumique initiale

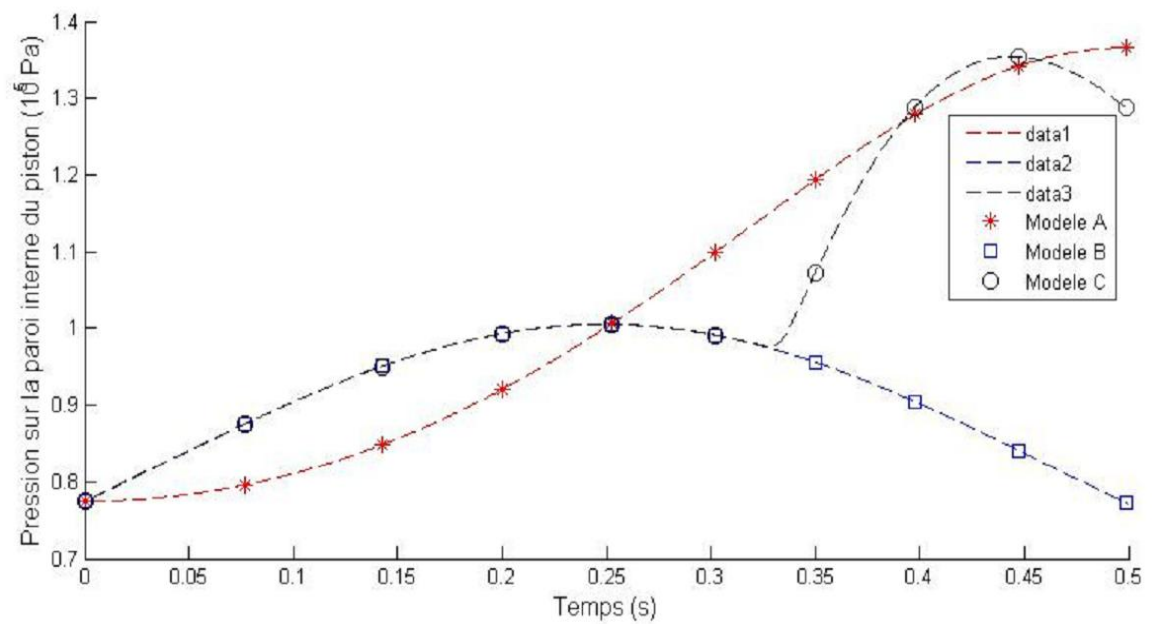
$m_p = 100 \text{ kg}$ la masse du piston

$CFL = 0.9$ est le critère de la stabilité temporelle

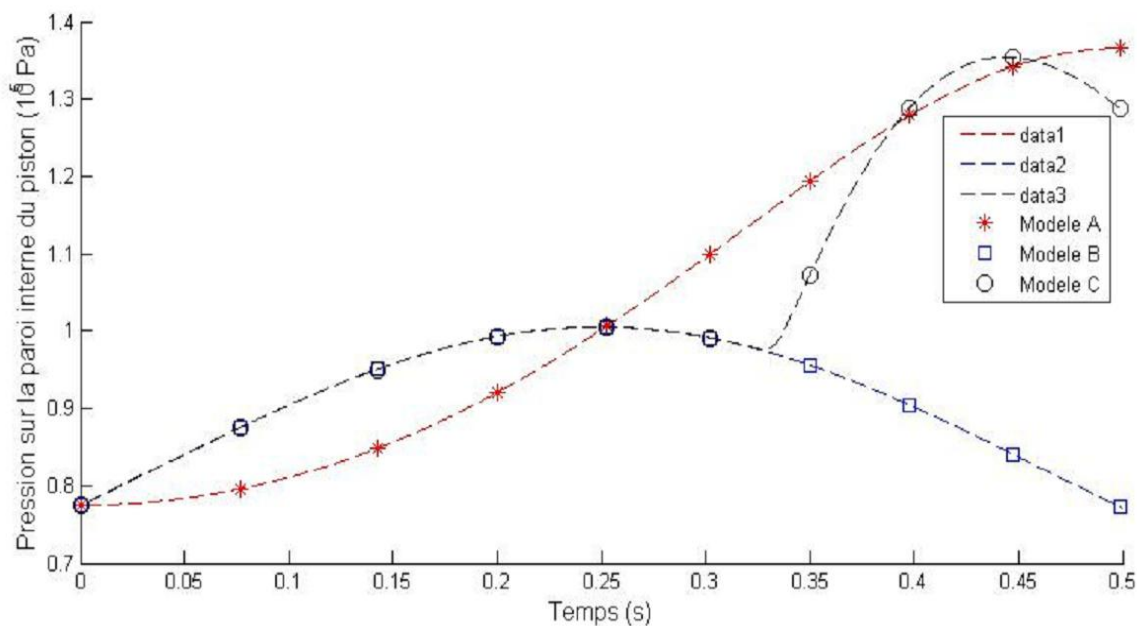
V.2.1. Les 1^{ère} résultats de simulation



(a)- $N_{elt} = 10$



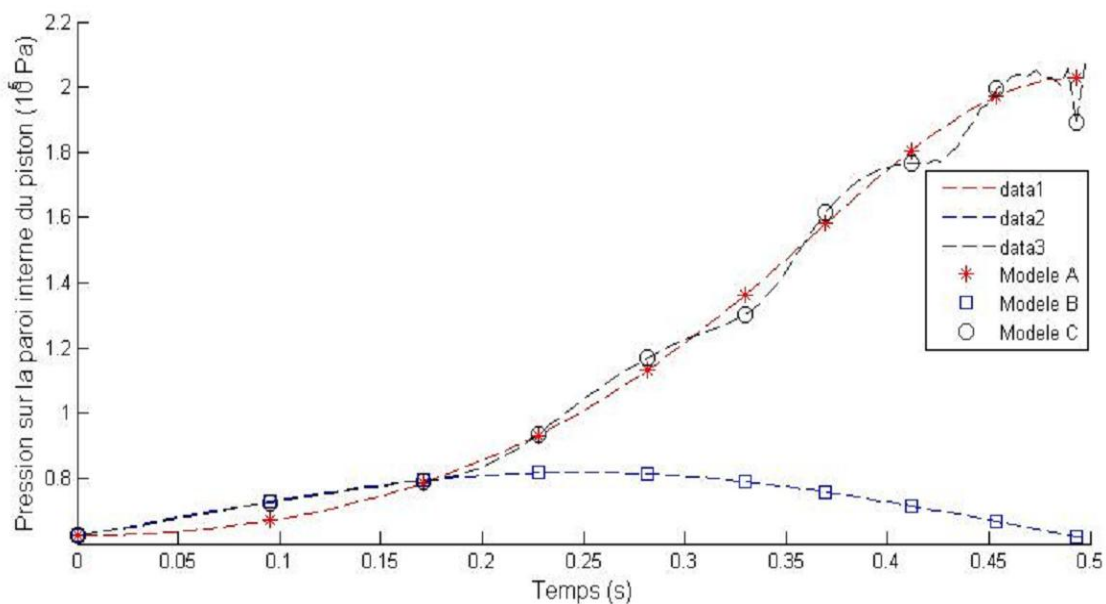
(b)- $N_{elt} = 50$



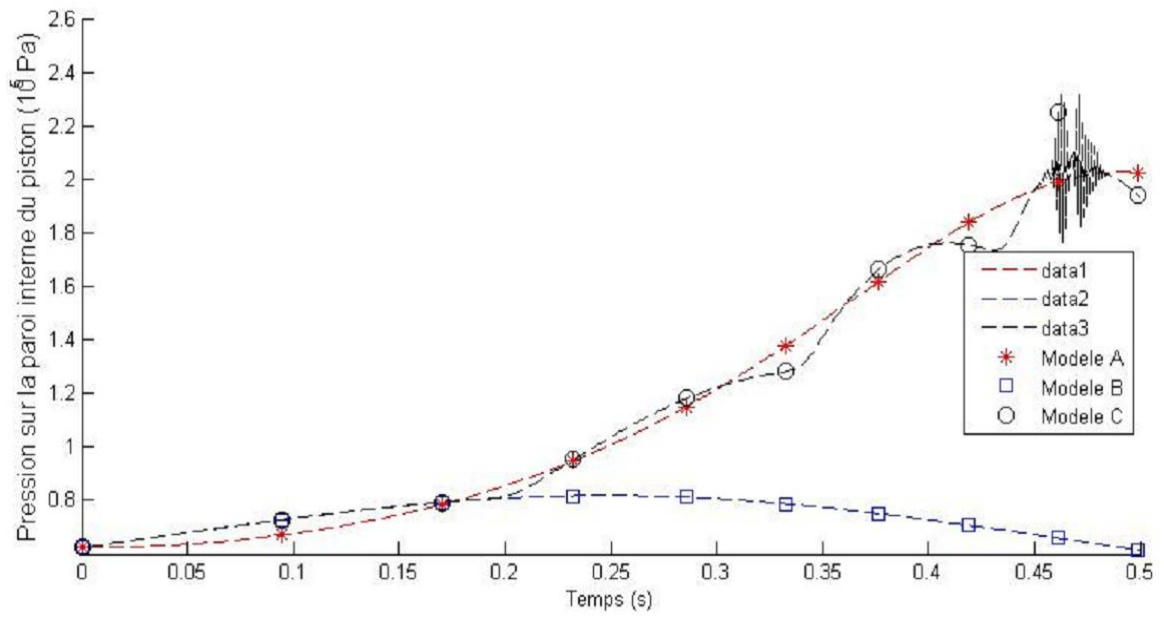
(c)- $N_{elt} = 200$

Figure 22: Influence de nombre d'élément sur la pression exercée à la paroi interne du piston pour trois modèle A, B et C ($A = 1 \text{ m}^2$; $L = 1 \text{ m}$)

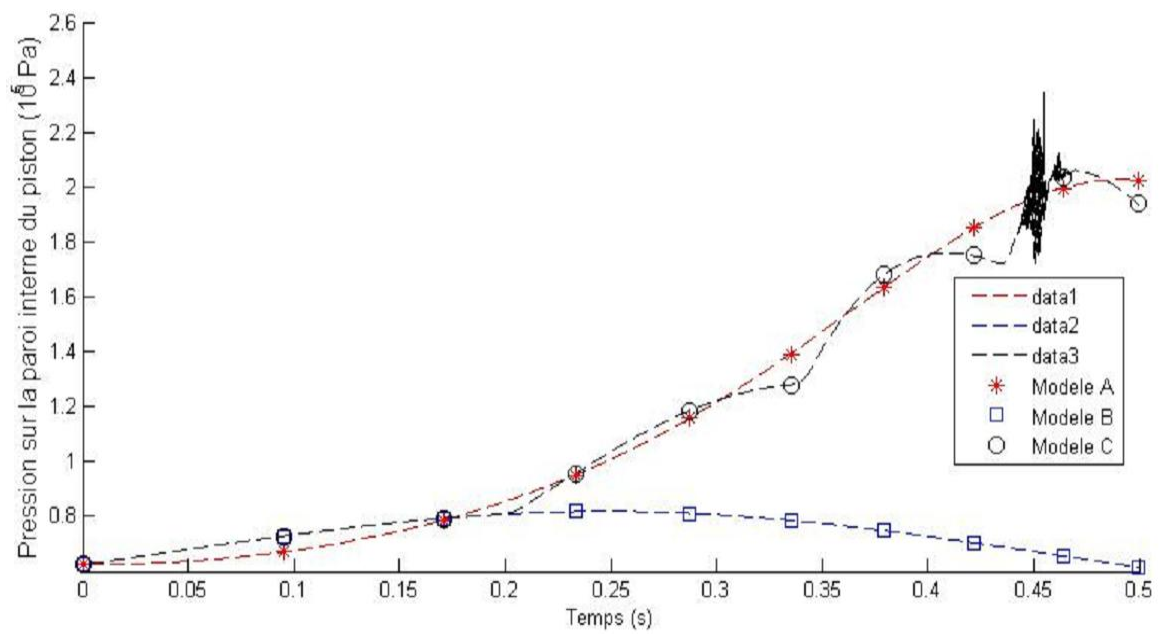
V.2.2. Les 2^{ème} résultats de simulation



(a)- $N_{elt} = 10$



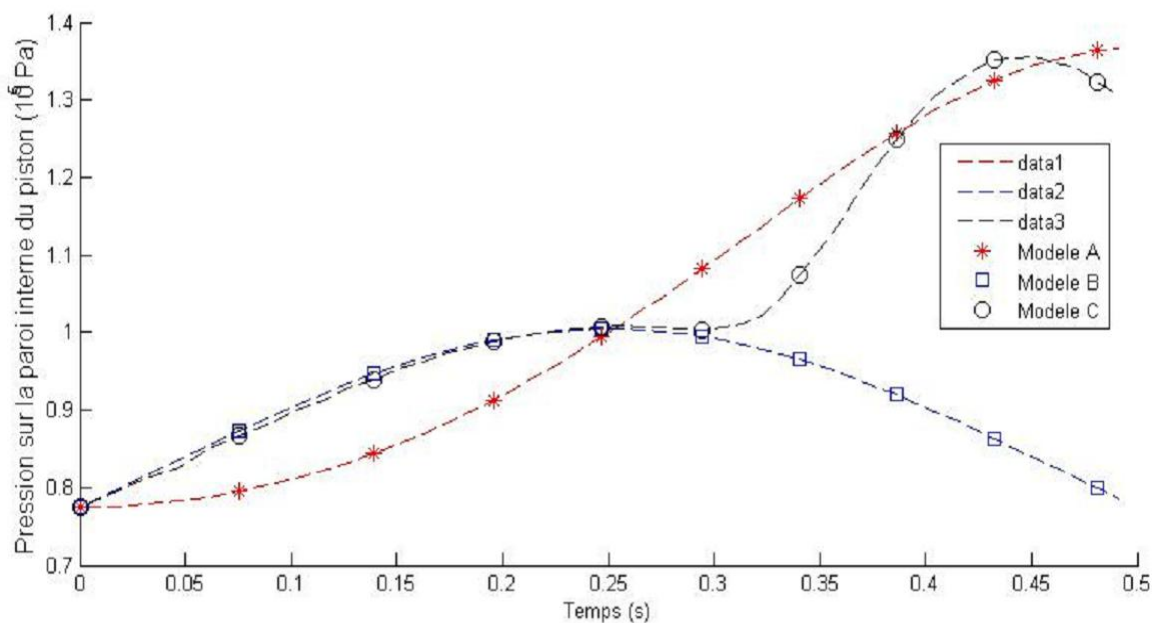
(b)- $N_{elt} = 50$



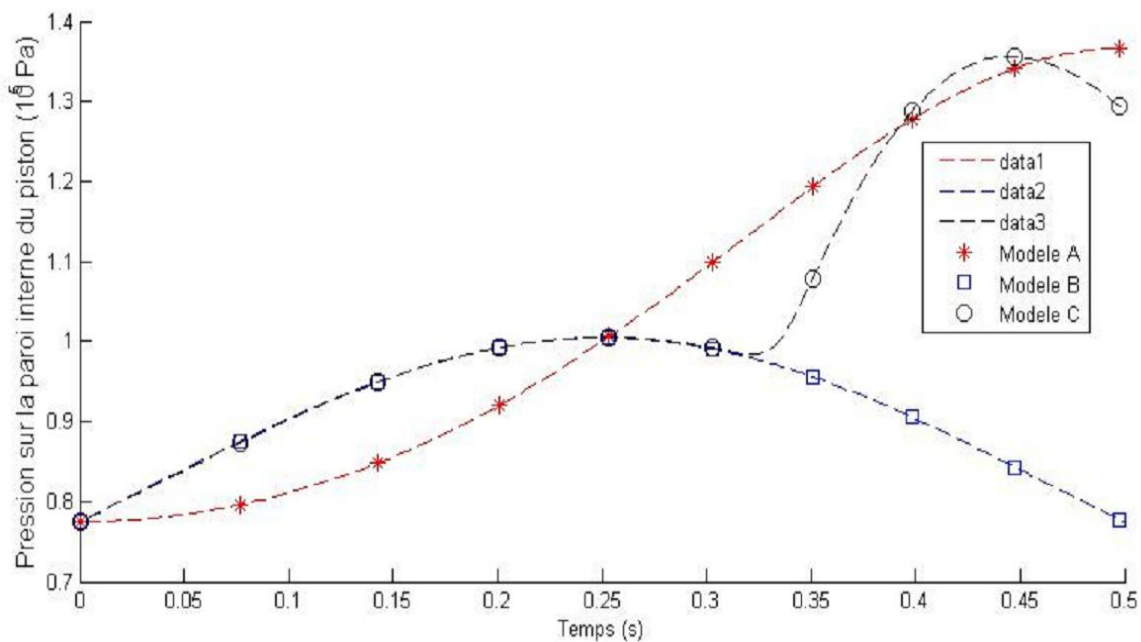
(c)- $N_{elt} = 200$

Figure 23: Influence de nombre d'élément sur la pression exercée à la paroi interne du piston pour trois modèle A, B et C ($A = 1 \text{ m}^2$; $L = 0.5 \text{ m}$)

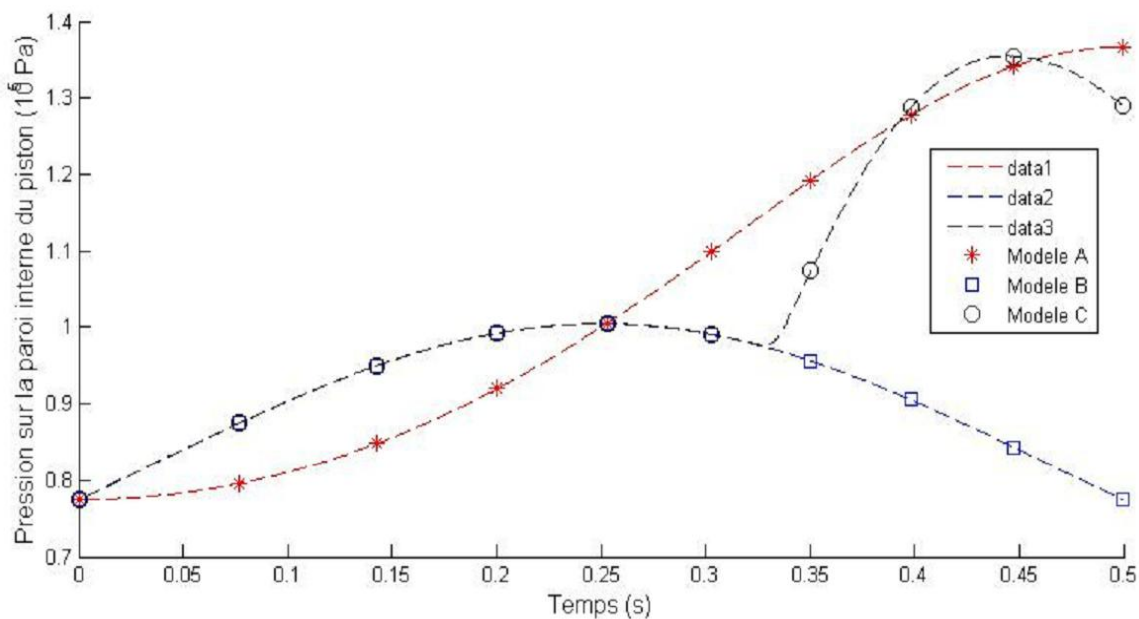
V.2.3. Les 3^{ème} résultats de simulation



(a)- $N_{elt} = 10$

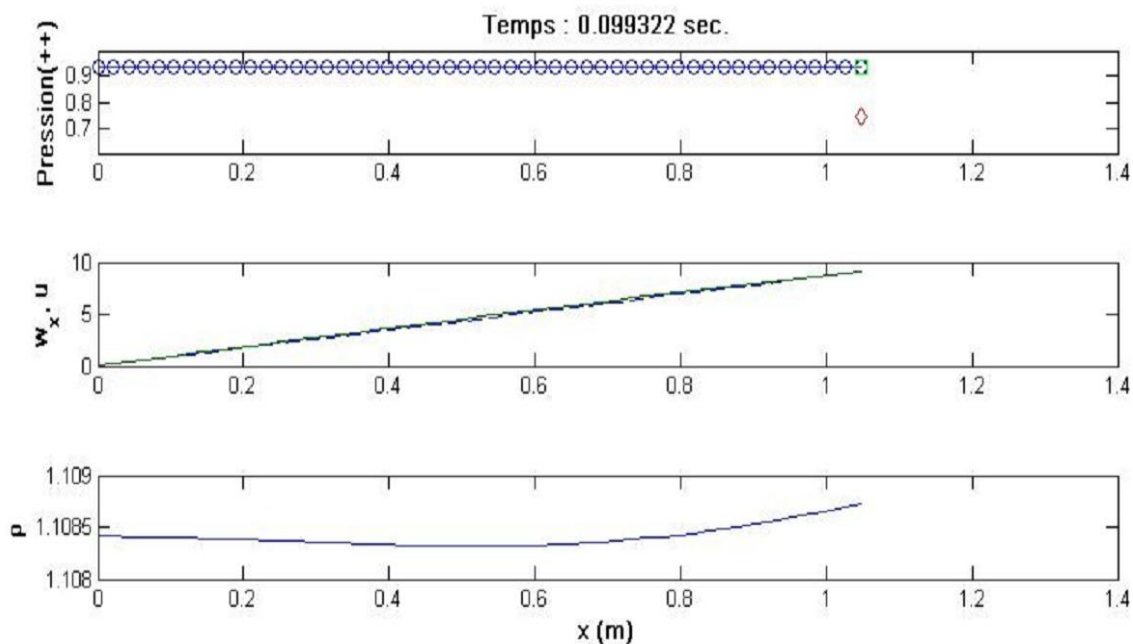


(b)- $N_{elt} = 50$

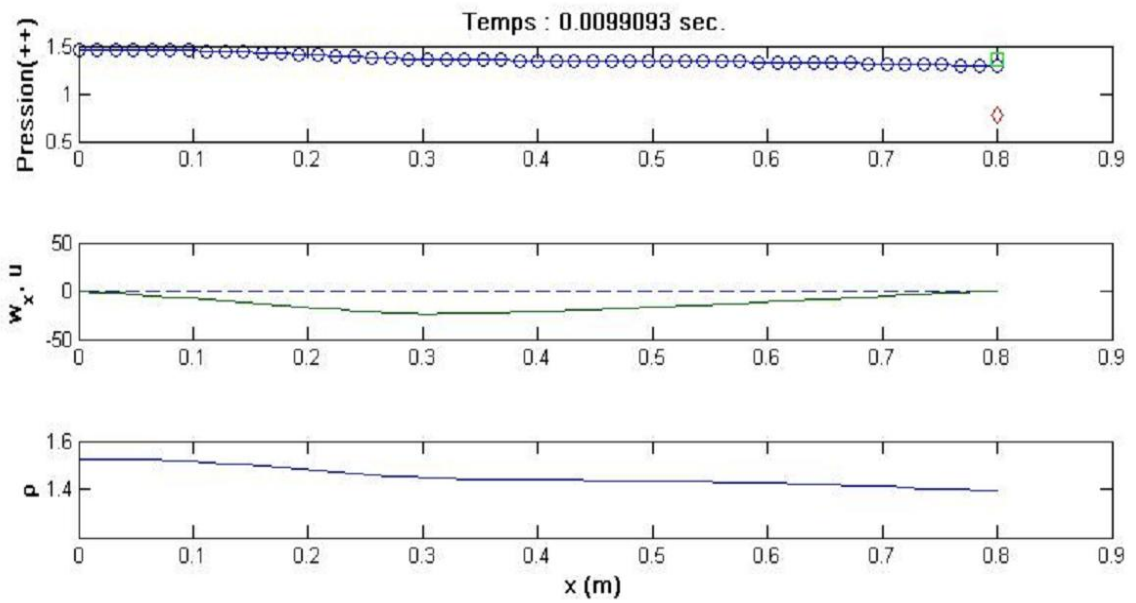


(c)- $Nelt = 200$

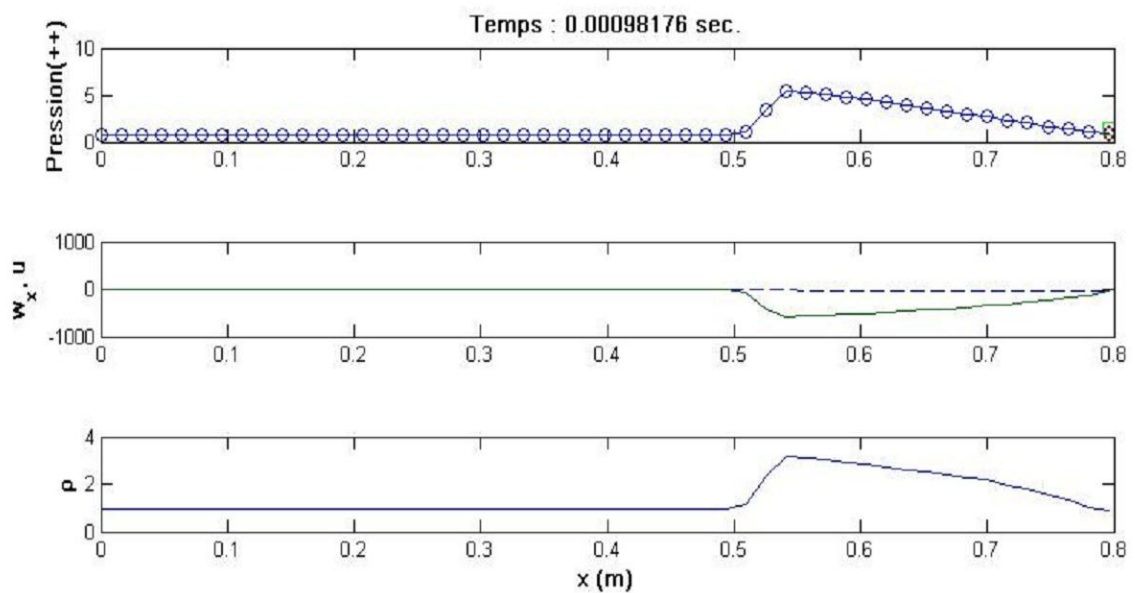
Figure 24: Influence de nombre d'élément sur la pression exercée à la paroi interne du piston pour trois modèle A, B et C ($A = 0.1 \text{ m}^2$; $L = 1 \text{ m}$)



(a)- $k = 10^5 \text{ N/m}$

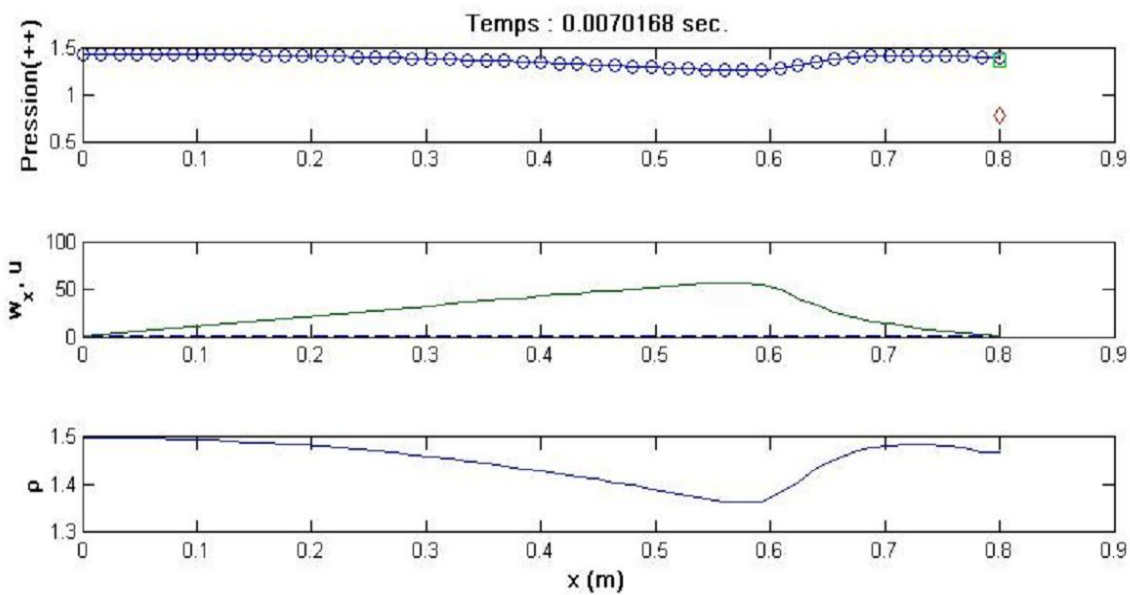


(b)- $k = 10^7 N/m$

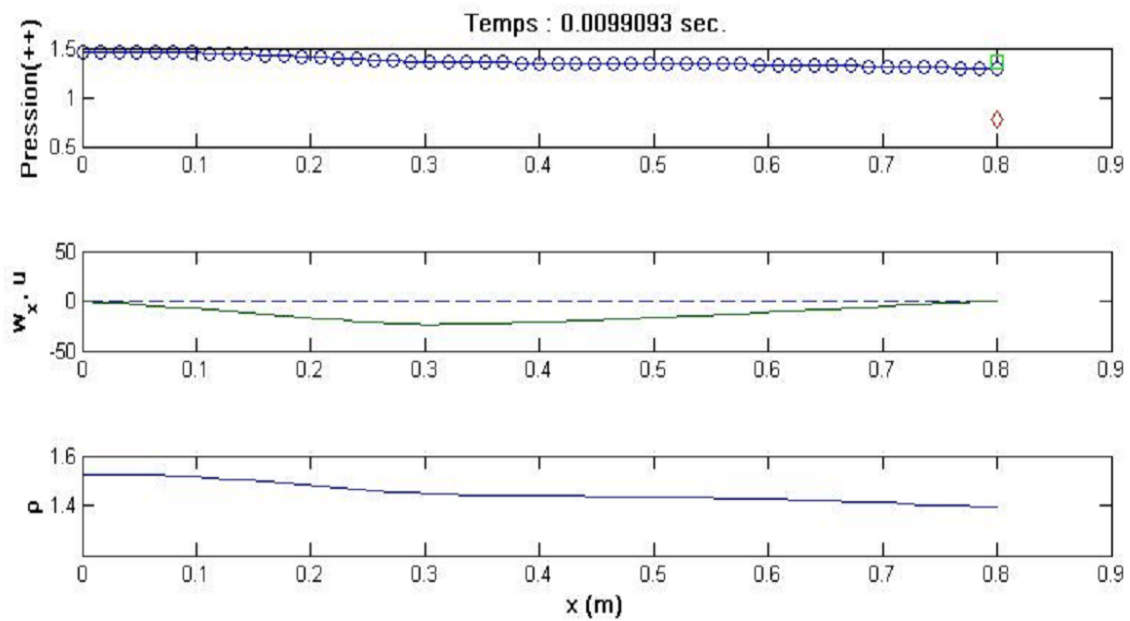


(c)- $k = 10^9 N/m$

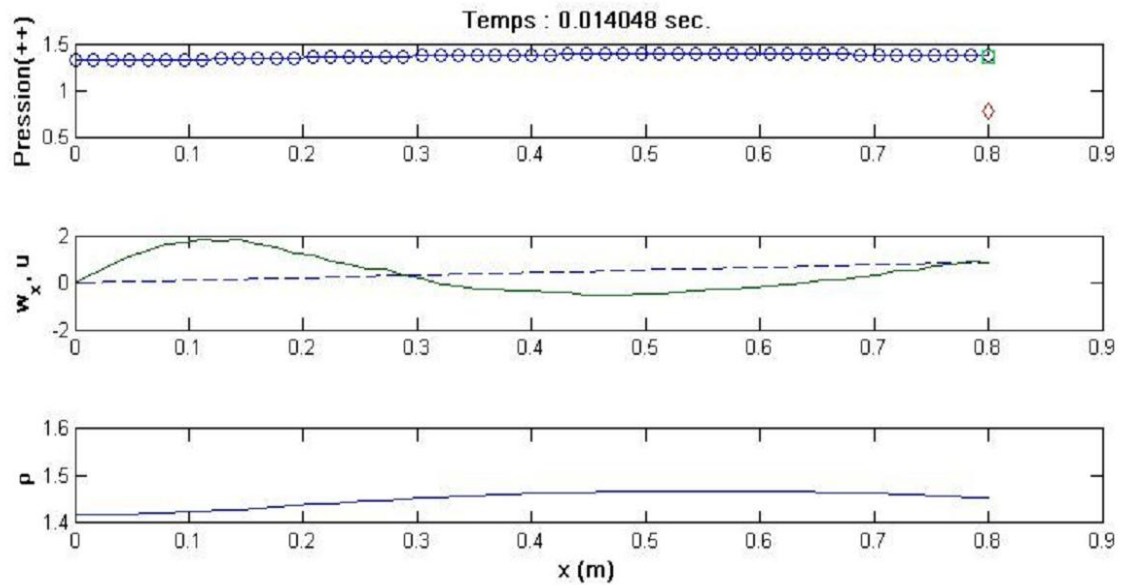
Figure 25: Variation des paramètres physique du fluide en fonction de longueur de déplacement du piston ($k = 10^5; 10^7; 10^9 N/m$)



(a)- $m = 50 \text{ kg}$



(b)- $m = 100 \text{ kg}$

(c)- $m = 200$ kg**Figure 26: Variation des paramètres physique du fluide en fonction de longueur de déplacement du piston ($m = 50 ; 100 ; 200$ kg)****Remarque 5**

Nous choisissons le nombre d'éléments finis, notés N_{elt} , en examinant convergence: pour différentes tailles de mailles, nous mesurons la vitesse d'une perturbation propagée et nous sélectionnons la taille du maillage où cette vitesse est la plus proche de la vitesse théorique de c_0 sonore. La fréquence du piston naturel est une fonction de m_p (k_p est maintenue constante), comme indiqué dans le Tableau 2 .

Tableau 1: la fréquence naturel du piston0 sonore. La fréquence du piston naturel est une fonction de m_p (k_p est maintenue constante), comme indiqué dans le Tableau 2 .

Tableau 2: la fréquence naturel du piston

m_p (kg)	1000	100	20	10
f_0 (Hz)	16	50	113	159
T_0 (s)	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$8.85 \cdot 10^{-3}$	$6.28 \cdot 10^{-3}$

V.3. Remarques et conclusions :

Sur les différents résultats obtenus en dessus, nous basons sur les trois approches référentielles pour décrire l'interaction fluide structure, le modèle A , B et C présentés dans le chapitre trois , bien que le modèle apporté par le gaz parfait est basé sur le principe qui décrire la pression interne est constante dans la chambre et dépend seulement par le

mouvement du piston , ce principe présente correctement la distribution de la pression sur la paroi interne du piston . D'autre coté, les différentes hypothèses présume ce modèle ne considère pas le changement de phase due aux mouvements du piston qui comprime le gaz. Cette considération est très claire dans le cas où le piston proche à l'extrémité du chambre. Le modèle B est basé sur une analogie analytique du piston qui permet de décrire la solution analytique de la pression en fonction de déplacement du piston. Cette résolution permet d'extraire la solution exacte avec une considération que la chambre est tenue semi-infinie et n'est pas appliqué en cas réel à tout moment dans la chambre. C'est pour ça l'ensemble des résultats des deux modèles A et B sont très proches puisque ils basent sur les mêmes hypothèses quel que soit le paramètre est pris en considération (surtout le raffinage du maillage). Finalement, le modèle C est basé sur la modélisation numérique unidimensionnelle de l'interaction fluide structure, la résolution numérique est basé sur deux aspects distinctes : la prise en compte du mouvement de la paroi interne du piston avec un élément fini poutre en couplage avec la discrétisation en différences finies du fluide. Cette description présente correctement la pression en tous les moments de déplacement du piston dans la chambre, cette remarque est très claire dans les résultats présentés dans les figures 22-24.

Les déplacements horizontaux de la base et du point le plus proche de la paroi du piston ainsi que le déplacement vertical de la surface libre au voisinage de la paroi sont montrés sur les figures 25-26 respectivement.

Les pressions correspondent à des temps différents, ce qui semble être en bonne concordance avec la fréquence obtenue par une analyse harmonique des deux modèles A et B. la masse volumique du fluide change avec le changement de la masse du piston, parce que le modèle de résolution est de l'approche par masse ajoutée, ce qui justifiée le changement des fréquences présentées dans le tableau 1.

Conclusion

La formulation numérique de l'interaction fluide structure pour l'analyse de comportement Piston-Carburant constituent l'un des axes de recherches importants de la modélisation des fluides et structures. C'est dans cet esprit que notre travail se situe et se veut une étude de nature numérique, relative à la présentation un modèle structure en éléments finis en couplage avec une discrétisation du domaine fluide par différences finies. Cette approche notée Modèle C a été programmée et implantée dans un code numérique sur Matlab. Le choix de l'approche référentielle de fluide et structure, que nous avons traités, permettant l'introduction plusieurs paramètres géométriques et mécaniques de fluide et de structure. L'évaluation de ce modèle est faite suivant un certain nombre de cas tests dont la plupart sont ceux proposés dans la littérature. À travers les résultats obtenus, dans les trois modèles présentés, nous pensons que le modèle C a un comportement correct par comparaison à d'autres résultats (modèle A et B) dans le domaine de la mécanique des interactions Fluide-Structure.

Voici quelques remarques considérables apportées dans cette étude :

- Les résultats obtenus par les modèles A,B et C donnant la valeur de la hauteur maximale de la pression varient substantiellement avec le mouvement du piston. Cependant, aucun modèle ne prend en considération dans ces formules les conditions aux limites et initiales à la base de la chambre.
- l'hypothèse de la paroi rigide du piston a été justifiée par le modèle éléments finis 1D. Plusieurs travaux expérimentaux concourent à cette même conclusion.
- La méthode de l'obtention du déplacement maximal de la surface moyenne dans le cas d'un mouvement brusque ou en repos du piston en superposant simplement les déplacements maximaux dans chaque direction n'est pas valable. La méthode proposée par modèle C reste à notre humble avis la meilleure malgré son conservatisme. La prise en compte de la composante verticale dans le calcul de ce déplacement par le modèle numérique a perturbé la symétrie et les valeurs du profil des déplacements.
- Les modèles mécaniques sont très appréciés par les ingénieurs. Cet attrait est expliqué par la simplification des calculs qu'ils apportent. Il faut toutefois noter que les modèles classiques les plus utilisés A et B soit directement soit considèrent

la paroi rigide dans l'évaluation des effets impulsifs. La limite imposée par le modèle B lui-même à son modèle (A) est souvent méconnue. Les nouveaux modèles récents ont corrigé cette hypothèse.

- Vu ce qui a été soulevé par la remarque précédente, l'approche adoptée par modèle C qui propose la prise en compte de deux composantes semble être à notre avis la meilleure.

Recommandations pour des travaux futurs :

Le travail que nous avons présenté dans le cadre de notre étude, nous a permis de nous familiariser avec le domaine du développement théorique et numérique du domaine de l'interaction fluide structure. Nous le considérons comme une base pour un futur développement dans ce domaine, et dans ce contexte l'action à mener pour une continuation et une amélioration de ce travail peut ce résumé dans les points suivants :

- Étendre cette étude à la formulation combinée en éléments finis ou d'autres procédures numériques, car ces méthodes nous offrent un outil d'analyse très puissant pour les différentes simulations des problèmes de l'ingénieur.
- Nous pouvons considérer les résultats obtenus par la présente étude comme une référence à titre de comparaisons avec les autres solutions analytiques ou numériques.
- Adaptation de la présente formulation à étudier les baffles ou les membranes.

Effectuer une formulation numérique basée sur l'analyse dynamique en régime transitoire.

- Enfin, nous attribuons notre modeste travail intitulé « *Simulation numérique d'interaction fluide-structure Application sur Piston-Carburant* » dans l'actualité de la recherche scientifique dans le domaine interaction fluide structure soutenu par notre centre universitaire.

Références:

- Belakroum, R. (2011). Contribution à la modélisation des interactions fluides-structures, Université de Reims Champagne-Ardenne.
- Capra, A. and V. Davidovici (1980). Calcul dynamique des structures en zone sismique, Eyrolles.
- Cengel, Y. A. and J. M. Cimbala (2017). Mécanique des fluides, De Boeck supérieur.
- Chai, X.-J. (1996). Influence de la gravité sur les interactions fluide-structure pour un fluide dans un domaine borné à surface libre, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- Clough, D. P. (1977). "Experimental evaluation of seismic design methods for broad cylindrical tanks."
- Goncalvès, E. (2005). "Méthodes, analyse et calculs numériques." Institut Polytechnique de Grenoble, France.
- Hamdan, F. (2000). "Seismic behaviour of cylindrical steel liquid storage tanks." Journal of Constructional steel research **53**(3): 307-333.
- Ischinger, F., M. Anthonissen and B. Koren (2016). A monolithic fluid-structure interaction method, application to a piston problem. 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS Congress 2016, 5-10 June 2016, Hersonissos, Crete, Greece, National Technical University of Athens.
- Jedrzejewski, F. (2006). Introduction aux méthodes numériques, Springer Science & Business Media.
- Jendoubi, A. (2016). "Modélisation d'éléments finis pour les interactions fluide-structure."
- Krimat, N., S. Manseri and L. Ramdani (2012). Etude De La Reponse Sismique Des Reservoirs Sureleves Avec Interaction Fluide-Structure, Université abderrahmane mira béjaia.
- Lefrançois, E. and J.-P. Boufflet (2010). "An Introduction to Fluid-Structure Interaction: Application to the Piston Problem." SIAM Review **52**(4): 747-767.
- SEGHIR, A. (2014). "Cours Méthode des Éléments Finis." **1**: 88.
- Sigrist, J.-F. (2015). Fluid-structure interaction: an introduction to finite element coupling, John Wiley & Sons.
- الأخضر and 2012) بيسايس). Analyse des structures par la MEF basée sur l'approche en déformation, Université Mohamed Khider-Biskra.
- Krimat, N., S. Manseri and L. Ramdani (2012). Etude De La Reponse Sismique Des Reservoirs Sureleves Avec Interaction Fluide-Structure, Université abderrahmane mira béjaia.