

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE « SALHI AHMED » DE NAAMA



INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE TECHNOLOGIE

MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Energétique

Intitulé de Mémoire

Simulation numérique des transferts thermiques par la méthode des éléments finis

Présenté par :

Mlle .Khemliche Sarra

Mlle .Mebarki Tequyya

Composition du jury :

M.BADAOUI Abd El Hamid	MAA	CU Naama	Président
M. BELABED Zakaria	MCB	CU Naama	Encadreur
M. KHATIRE Tawfiq	MCB	CU Naama	Examineur

Année universitaire 2016-2017



Remerciements

Avant tout, nous remercions notre encadrant Monsieur BELABED ZAKARIA Pour son soutien, ses conseils et son encadrement qui nous ont été bénéfique pour mener à bien ce travail.

Nous tenons ensuite à remercier notre président de jury Monsieur BADAoui ABD EL HAMID et notre examinateur Monsieur KHATIR TAWFIQ.

Nous voudrions également remercier tous les enseignants que nous avons eu l'honneur d'avoir de connaître et d'apprécier durant notre scolarité.

Enfin, Nos remerciements s'adressent à toutes les personnes qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de ce modeste travail.



Dédicace :

Je dédie ce modeste travail à :

A mes très chers Parents qui n'ont jamais cessé, par leur dévouement et leurs efforts, de m'accompagner tout le long de mes études.

Qu'ils trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude et de mon entière fidélité.

Mes chères sœurs, Mes chers frères que j'aime beaucoup.

A mon binôme TEQUYYA et toute la famille MEBARKI.

J'exprime toute ma sympathie à tous mes amis(e) de près et de loin.

A toute la famille KHEMLICHE.

« *KHEMLICHE SARRA* »





Dédicace :

Je dédie mon travail à :

**A mes très chers Parents de leurs soutiens et
encouragement
A réaliser mon travail, mes études et a toute ma
vie.**

**Et à mon grand-père, mes grand-mère
Ainsi que mon cher frère, Mes chères sœurs que
j'aime beaucoup.
Et a toute ma famille qui ont aidé de prêt ou de
loin.**

**A mon binôme SARRA et toute la famille
*KHEMLICHE***

J'exprime toute ma sympathie à tous mes amis.



« *MEBARKI TEQUYYA* »

Résumé

Ce travail a pour cadre l'analyse du transfert thermique par conduction dans un domaine rectangulaire par éléments finis quadrilatères. Généralement, ces problèmes sont difficilement résolus par les méthodes analytiques à cause des géométries complexes des domaines, conditions aux limites et initiales imposées et le choix de la stratégie de résolution adoptée. Ces inconvénients permettent de développer des méthodes numériques très sophistiquées pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur, parmi les méthodes les plus puissantes, la méthode des éléments finis. Ainsi nous décrivons dans ce travail un élément fini quadrilatère à quatre nœuds noté Q4 pour l'analyse des problèmes de conduction. Cet élément est formulé dans leurs coordonnées naturelles ou réelles et ça nous permet de déterminer un calcul élémentaire explicite. Le programme développé dans le cadre de ce mémoire a pour but de proposer un outil de calcul pour l'analyse thermique dans les régions rectangulaires prenant en compte séparément la formulation théorique et le modèle numérique proposé.

A travers l'ensemble des tests choisis pour la validation, on peut conclure que le présent élément fini quadrilatère n'est pas seulement exacte mais aussi simple pour étudier les problèmes de conduction dans les régions rectangulaires.

Mots clefs :

- A. transfert thermique par conduction ; B. modélisation numérique; éléments finis ;
- B. élément fini quadrilatère Q4, D. régime stationnaire.

Abstract

This work is based on the analysis of conduction heat transfer in a rectangular area by quadrilateral finite elements.

Generally, these problems are difficult solved by analytical methods because of the complex area geometries, the boundary and the initial conditions imposing and the choice of the resolution strategy adopted.

These disadvantages make it possible to develop the numerical advanced methods to solve the heat transfer problems, and the finite element method it's the most powerfully method.

Thus, we describe in this work a quadrilateral finite element with four nodes denoted Q4 for conduction problems analysis.

This element is formulated in their natural or real coordinates and allows us to determine an explicit and easy elementary calculation.

The program developed in this work aims to propose both mathematical tool for thermal analysis in rectangular areas, taking into account the theoretical formulation and the numerical model proposed separately. And through the set of tests for verification and we can conclude that the Quadrilateral finite element method is not only an exact but easy and simple to study the thermal conductivity problems in rectangular area.

Key words: A. Conduction Heat transfer; B. numerical modeling; C. Finite element; D. Quadrilateral finite element Q4, E. steady state.

يهدف هذا العمل لتأطير عملية التحليل للانتقال الحراري بالتوصيل « transfert thermique par conduction » في المجال القائم الزوايا بطريقة العناصر المحدودة الرباعية « éléments finis quadrilatères ».

وعادة ما تكون هذه المشاكل صعبة الحل بالطرق التحليلية البسيطة لهندستها المعقدة وشروطها الحدودية والأولية المفروضة وايضا استراتيجية الحل المطبقة وهذه السلبيات كانت سبب في تحديث الطرق الرقمية الجد متطورة لحل مشاكل الانتقال الحراري ومن هذه الطرق الاكثر فعالية طريقه العناصر المحدودة.

وكذلك نصف في هذا العمل عنصر رباعي ذو اربع عقد مسجل Q4 لأجل تحليل مشاكل التوصيل الحراري حيث يكون موضوع في احداثياته الطبيعية او الحقيقية من ما يتيح لنا الحساب العنصري المبسط .

والبرنامج المطور في إطار هذه المذكرة يهدف إلى توفير وسيلة حساب للتحليل الحراري في نطاق القائم الزوايا مع الأخذ بعين الاعتبار الشكل المنفصل للصياغة النظرية و النموذج الرقمي المقترح .

ومن خلال مجموعة الاختبارات للتحقق و الإثبات يمكننا ان نستنتج أن طريقة العناصر المحدودة المطبقة حاليا ليست فقط وسيلة دقيقة وإنما سهلة و مبسطة لأجل دراسة مشاكل التوصيل الحراري في النطاق المستطيلي و المربع.

الكلمات الرئيسية:

أ. الانتقال الحراري بالتوصيل « transfert thermique par conduction » ; ب. العناصر المحدودة « élément fini » ; ت. عنصر رباعي « élément fini quadrilatère Q4 » ; ث. النمذجة الرقمية « modélisation numérique ».

Résumé	I
	II
	III
Table des Matières	IV
Liste des Tableaux	V
Liste des Figures	VI
Notations	VII
Introduction Générale	1
Chapitre 01 : Généralités sur les charges thermiques	3
1.1) Introduction	3
1.1.1) Introduction de transfert thermique	3
1.1.2) Domaine d'application	3
1.2) Mode de transfert de chaleur	4
1.2.1) Conduction	4
1.2.1.1) Définition	4
1.2.1.2) Champ thermique	4
1.2.1.4) Densité thermique	4
1.2.1.5) La conductivité thermique	5
1.2.1.6) Loi de Fourier	5
1.2.1.7) équation de chaleur	6
1.2.2) Convection	7
1.2.2.1) Définition	8
1.2.2.2) Loi de Newton	8
1.2.3) Rayonnement	8
1.2.3.1) Définition	9
1.3) équation de conservation	9
1.3.1) Conservation de masse	9
1.3.2) Conservation de quantité de mouvement	9
1.3.3) Conservation d'énergie	10
1.4) Condition aux limites	10
1.4.1) Condition de Dirichlet	10
1.4.2) Condition de Neumann	11
1.4.3) Condition mixte	11

Table des matières

Chapitre 02 : Les méthodes numériques

2.5) Les méthodes numériques	12
2.5.1) Méthode des différences finis	12
2.5.2) Méthode des éléments finis	13
2.5.3) Méthode des volumes finis	13

Chapitre 03 : Formulation par éléments finis du problème de champ thermique **15**

3.1) Introduction d'éléments finis	15
3.2) Transformation des équations d'un système physique	15
3.3) Formulation variationnelle	16
3.3.1) équation de chaleur	16
3.3.2) Résidu de l'équation de chaleur	16
3.3.3) Pondération du résidu par une fonction-test	16
3.3.4) Intégration sur le domaine	16
3.3.5) Intégration par partie	17
3.4) Calcule élémentaire	17
3.4.1) Fonction d'interpolation	17
3.4.2) L'interpolation de Lagrange	18
3.4.3) Deux dimensionnel	18
3.4.3.1) Formulation intégrale	18
3.5) Résumé	20
3.6) Relations entre systèmes d'équations différentielles formes	21
3.7) Présentation d'élément	22
3.7.1) Calcule du nœud	22
3.7.2) Formulation d'un élément fini Quadrilatère à quatre nœuds Q4N	23
3.7.3) Interpolation élémentaire	24

Chapitre 04 : Algorithme de résolution en régime stationnaire **26**

4.1) Résolution du problème	26
4.1.1) Méthode direct	26
4.1.1.1) Définition	26
4.1.1.2) Méthode de Gauss	26
4.1.2) Méthode itérative	27
4.1.2.1) Définition	27
4.1.2.2) Méthode de Jacobi	28
4.1.2.3) Méthode de Gauss-Seidel	29
4.1.2.4) Méthode de relaxation	30
4.2) Intégration numérique	30
4.2.1) Intégration de Gauss	30

Table des matières

Chapitre 05 : Validation & évaluations	33
5.1) Introduction	33
5.2) Développement d'un code de calcul par éléments finis	33
5.3) exemple de la validation	34
5.3.1) étude d'un secteur de disque	34
5.3.2) étude la diffusion de la chaleur dans un domaine rectangulaire	40
5.3.3) Etude de l'effet de la conductivité thermique sur la diffusion de la température	43
Conclusions générale & perspective	46
Recommandations pour des travaux futurs	46
Références Bibliographiques	48
Annexe : Mise en œuvre du programme de calcul	49

Titre	N°	Page
Valeur de conductivité de métaux	1.1	5
Résumé de formulation variationnelle	3.1	20
La comparaison numérique avec $R = 5 \alpha = \pi/30$	5.1	35
La comparaison numérique avec $R = 5 \alpha = \pi/10$	5.2	36
La comparaison numérique avec $R = 5 \alpha = \pi/50$	5.3	37
La comparaison numérique avec $R = 7.5 \alpha = \pi/30$	5.4	38
La comparaison numérique avec $R = 2.5 \alpha = \pi/30$	5.5	39
La Conductivité thermique	5.6	43

Liste des Figures

Titre	N°	Page
La densité de chaleur	1.1	5
Les lignes de flux dans un tube	1.2	6
Un système thermique	1.3	7
Bilan thermique	1.4	12
Grille de maillage structuré 2D	1.5	13
Transformation des équations	3.1	15
Relation entre les systèmes d'équation	3.2	21
Maillage d'un segment de disque Q4	5.1.a	34
Diffusion de la température d'un secteur de disque $\alpha=\pi/30$	5.1.b	35
Maillage d'un segment de disque Q4	5.2.a	35
Diffusion de la température d'un secteur de disque $\alpha=\pi/10$	5.2.b	36
Maillage d'un segment de disque Q4	5.3.a	36
Diffusion de la température d'un secteur de disque $\alpha=\pi/50$	5.3.b	37
Maillage d'un segment de disque Q4 Avec R= 1.5	5.4.a	37
Diffusion de la température d'un secteur de disque	5.4.b	38
Maillage d'un segment de disque Q4 Avec R= 0.5	5.5.a	39
Diffusion de la température d'un secteur de disque Avec R= 0.5	5.5.b	39
La géométrie du domaine et les conditions aux limites	5.6	40
Description du maillage du domaine par 4X4 Q4	5.7.a	40
Distribution de la température du domaine par 4X4 Q4	5.7.b	41

Liste des figures

Description du maillage du domaine par 9X9 Q4	5.8.a	41
Distribution de la température du domaine par 9x9 Q4	5.8.b	42
Description du maillage du domaine par 19X19 Q4	5.9.a	42
Distribution de la température du domaine par 19x19 Q4	5.9.b	43
Distribution de la température du domaine en plâtre par 9x9	5.10	44
Distribution de la température du domaine en cuivre par 9x9	5.11	44

Symboles : \int : Intégrale $[]$: Matrice $\{\}$: Vecteur df : Dérivée de la fonction f f, x : Dérivée de la fonction f par rapport à x Σ : Somme $2D$: Bidimensionnelle $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$: Dérivée partielle**Minuscules romaines :** x, y, z : Les axes de coordonnées cartésienne s : la surface \vec{n} : La normale c_p : La capacité thermique massique t : Temps \bar{h} : Le coefficient d'échange moyen k : Conductivité d'un matériau isotrope v : Volume du domaine a : Diffusivité thermique n_1, n_2, n_3 : Nœuds directeurs $x(i)$: Coordonnée suivant X $y(j)$: Coordonnée suivant Y **Majuscules romaines :**

MDF : Méthode des différences finies

MVF : Méthode des volumes finis

MEF : Méthode des éléments finis

Nomenclature

EDP : Equations aux dérivées partielles

SOR : En anglais « Successiver Over Relaxation »

F : Nombre de Forcheimer

$R(x)$: Résidu

$T^*(x)$: Fonction de test

L_i : Polynôme de Lagrange

$[K]^e$: Matrice élémentaire

$[K]$: Matrice de conductivité

N_i : Fonction d'interpolation

T : la température

Q : Quantité de chaleur

D : Domaine d'étude

S : Source de chaleur

Minuscules grecques

φ : Flux de chaleur

λ : La conductivité thermique

ρ : La masse volumique

Majuscules grecques :

Φ : densité de flux de chaleur (Wm^2)

ψ_n : Polynômes orthogonaux

1) Introduction générale et Problématique du sujet

Dans le domaine énergétique, de la construction mécanique, aéronautique, automobile, navale et nucléaire, on rencontre fréquemment des problèmes de transfert thermique dans des domaines à deux dimensions car ce sont des domaines qui répondent de façon efficace aux besoins subis. Ceci est dû principalement aux modes de transfert thermique, qui permet d'étudier l'échange de la chaleur à travers leurs surfaces de contacts et robuste en utilisant un minimum de matériau. Ainsi l'évolution de la technologie des machines, l'instrumentation utilisée dans le domaine énergétique et le développement des divers secteurs industriels ont amené de connaître la façon correcte d'échange thermique entre leurs pièces constituantes et/ou la quantité de température diffusée entre eux. D'autre part, l'évolution actuelle des normes de mesure et l'instrumentation expérimentale oblige de concevoir la diffusion exacte de la température dans ces structures et plus fiables en termes d'amélioration de la sécurité et de la performance sur le plan économique. Ce but ne peut être atteint que par une analyse fiable tenant en compte toutes les sources de chaleurs possibles. Celles-ci peuvent être classées en trois catégories: le premier mode est de conduction, le deuxième est convectif, le troisième est dû à la source de chaleur par rayonnement. Notre travail concerne seulement le premier mode de transfert thermique. Sur le plan analytique peu de solutions sont disponibles dans la littérature pour la quantité énorme de problèmes de technologie, et surtout l'analyse des problèmes de transfert thermique mixtes. Ceci est dû à la complexité mathématique de tels problèmes. Pour ce faire, on fait appel à la théorie des transferts thermiques de la mécanique des milieux continus qui permet de décrire le comportement du système physique grâce à des équations aux dérivées partielles. Dans cette optique, la simulation numérique par la Méthode des Eléments Finis, rendue possible par le développement de fortes puissances de calcul, est devenue un outil indispensable pour analyser le comportement thermique des structures énergétiques complexes.

Introduction

Le problème est résolu ensuite par une formulation aux éléments finis bidimensionnels. Le présent travail a l'objectif de présenter une formulation simple d'un problème thermique dans un domaine bidimensionnel et couplés à un algorithme efficace d'analyse linéaire. L'élément utilisé est un élément quadrilatères à quatre nœuds utilisé en analyse linéaire de transfert thermique par conduction, les performances de cet élément sont améliorées considérablement lorsqu'il lui est utilisé en coordonnées naturelles dans leur plan. Cette approximation est une manière économique qui évite le recours vers les coordonnées paramétriques et l'utilisation des méthodes numérique.

Dans un premier temps, l'objectif de ce travail est de réaliser une modélisation prenant en compte l'intégralité des phénomènes thermiques mettant en jeu l'effet de la formulation par éléments finis sur le transfert thermique dans un domaine bidimensionnel. La prise en compte de l'aspect de la discrétisation par éléments finis du problème est alors indispensable afin de représenter exactement la diffusion thermique à travers les tests réalisés.

2) Organisation du mémoire :

Le mémoire est organisé en six (06) chapitres :

- Dans le deuxième chapitre nous présentons une introduction aux modes de transfert de la chaleur avec présentation de quelques définitions et terminologies utilisées dans le domaine thermique.
- Une formulation par la méthode des éléments finis est présentée dans le chapitre trois où nous détaillons le passage de la théorie vers le modèle élément fini dédié pour l'analyse thermique utilisée dans le code développé.
- Dans le chapitre quatre, une présentation des méthodes numériques utilisées dans les méthodes des éléments finis pour résoudre numériquement les problèmes traités.
- Le chapitre cinq est réservé à l'application numérique du modèle présenté à travers une étude paramétrique et les résultats numériques obtenus par le code développé dans cette étude.
- Le chapitre six résume les différentes conclusions obtenues et des recommandations pour des travaux futurs.

Généralités sur les charges thermiques

1.1. Introduction :

1.1.1. Introduction de transfert thermique :

Un transfert de chaleur est un processus d'échange entre deux points de l'espace se produisant lorsqu'une différence de température existe entre ces deux points. Il est assuré par trois processus physiques fondamentaux qui sont la conduction, le rayonnement et la convection. [1]

1.1.2. Domaine d'application :

De nombreux spécialistes travaillant dans une multitude de domaines sont intéressés par **les transferts thermiques**. On peut distinguer plusieurs objectifs qui focalisent leur attention et qui peuvent s'inscrire sur les axes suivants :

- Le transfert de la chaleur dans un endroit choisi, comme c'est le cas de la préparation de l'agent de travail dans une centrale thermoélectrique en utilisant l'énergie thermique contenue dans un combustible.
- L'éloignement de la chaleur d'un milieu où elle n'est pas désirée ; un exemple fréquent est constitué par le refroidissement du moteur de la voiture.
- La maintenance de la chaleur dans un espace où on veut la garder : par exemple l'isolation thermique d'un bâtiment pour assurer la température intérieure nécessaire à satisfaire les exigences de confort thermique.
- L'empêchement de l'accès de la chaleur dans un espace où elle est indésirable, comme c'est le cas d'une enceinte d'un réfrigérateur.

Les applications techniques qui font appel aux processus de transfert de chaleur sont extrêmement nombreuses et fréquentes. Parmi elles, les plus importants concernant :

- L'étude et le contrôle de fonctionnement des chaudières et des divers types d'échangeurs de chaleur ;
- Le transfert d'une densité de flux thermique maximale dans des conditions économiques ;

- L'optimisation de la structure des éléments de construction, pour réduire les pertes ou les apports de chaleur ;
- L'augmentation de transfert de chaleur dans tous les procédés où il joue un rôle essentiel ;
- La diminution des « pertes » de chaleur par les parois des conduites transportant des agents à des températures élevées, par la calorifugation (isolation thermique). [2]

1.2. Mode de transfert de chaleur

1.2.1) Conduction :

1.2.1.1) Définition :

La conduction est un mode de transfert de chaleur dans lequel les échanges d'énergie ont lieu dans les solides et les fluides sans déplacement de matière. [3]

1.2.1.2) Champ thermique :

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température $T = f(x, y, z, t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire. [4]

1.2.1.3) Flux thermique :

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur $\phi (W m^2)$:

$$\phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (1.1)$$

Où S est l'aire de la surface (m^2)

On appelle flux de chaleur $\varphi (W)$ la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad (1.2) \quad [4]$$

1.2.1.4) Densité thermique :

Soit un élément de surface $d\Omega$, orienté par la normale \vec{n} , $d\phi$ est le flux d'un vecteur $\vec{\varphi}$ au travers de la surface élémentaire $d\Omega$:

$$d\phi = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} d\Omega = \varphi \cos \alpha d\Omega \quad (1.3)$$

Où $\cos \alpha d\Omega$ représente la surface utile.

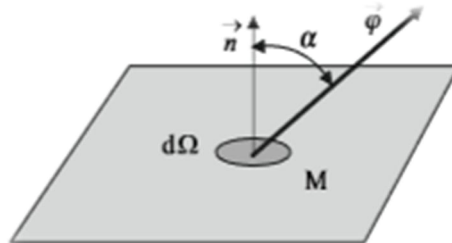


Figure 1.1 : La densité de flux de chaleur $\vec{\varphi}$

$\vec{\varphi}$ Est la densité locale de flux de chaleur au point M . Ce vecteur caractérise, en chaque point du milieu, la direction, le sens et l'intensité du flux de chaleur. [5]

1.2.1.5) La conductivité thermique :

L'échelle macroscopique λ est le paramètre intrinsèque au matériau qui lie le gradient de température au flux de chaleur. Il caractérise la propension d'un matériau à conduire la chaleur il s'exprime en $Wm^{-1}K^{-1}$. Lorsqu'un matériau laisse facilement diffuser la chaleur on dit qu'il est conducteur. C'est le cas notamment des métaux dont la conductivité thermique est élevée. À l'inverse, un matériau tel que l'air au repos s'oppose au transfert de chaleur et est donc appelé isolant. Dans ce cas la conductivité thermique est faible.

Afin de fixer un ordre d'idée, nous avons reporté dans le tableau quelques valeurs de la conductivité thermique de matériaux à température ambiante (20 °C)

Matière	$\lambda/Wm^{-1}K^{-1}$	Matière	$\lambda/Wm^{-1}K^{-1}$
Air	0.025104	Glace (H_2O) (solide)	2.092
Aluminium	225.94	Fer	71.965
Aluminium (liquide)	92.048	Mercury (liquide)	8.368
Argon gaz	0.017991	Plomb	34.309
Carbone	543.92	Magnésium	150.62

Tableaux 1.1 : conductivité de métaux à température ambiante (20 °C). [5]

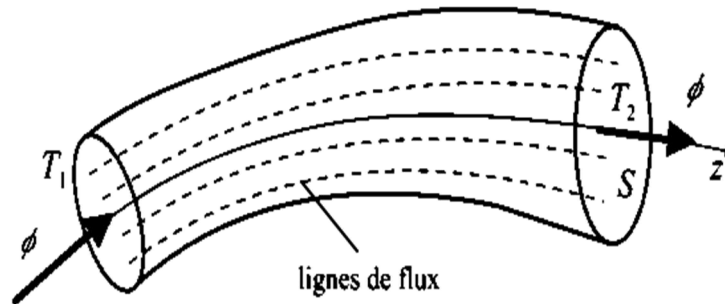
1.2.1.6) Loi de Fourier :

Figure 1.2 : Les lignes de flux dans un tube.

Sur cette Figure est représenté un matériau homogène et isotrope sous la forme d'un tube supposé parfaitement isolé à sa périphérie. On note S la section du tube et l sa longueur. Les températures aux deux extrémités du tube, notées T_1 et T_2 , sont imposées et constantes au cours du temps. Un flux de chaleur apparaît dans la direction des hautes températures vers les basses températures. Les lignes de flux sont définies comme les lignes perpendiculaires aux isothermes dans le tube. On note \vec{x} le vecteur tangent aux lignes de flux. Comme le tube est parfaitement isolé sur sa périphérie, aucune ligne de flux ne sort du tube et donc le flux est constant tout le long du tube. J. Fourier obtient expérimentalement que lorsque les températures sont stabilisées dans le temps (régime stationnaire), il existe une relation liant le flux à l'écart de température entre l'entrée et la sortie sous la forme :

$$\vec{\phi} = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{L} \vec{x} \quad (1.4)$$

Lorsque l'on fait tendre la longueur l vers 0, on trouve l'expression du flux de conduction sous la forme différentielle :

$$\vec{\phi} = -\lambda S \frac{dT}{dx} \vec{x} \quad (1.5)$$

En généralisant la relation à une configuration tridimensionnelle, on obtient :

$$\vec{\phi} = -\lambda S \vec{\nabla} T \quad (1.6)$$

L'opérateur $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ désigne le vecteur gradient. On définit la densité de flux comme le rapport du flux à la section de passage :

$$\vec{\phi} = \frac{\vec{\phi}}{S} = -\lambda \vec{\nabla} T \quad (1.7)$$

La relation montre bien que les lignes de flux sont perpendiculaires aux isothermes. [5]

1.2.1.7) Equation de la chaleur

Soit v une partie quelconque de V limitée par la surface s .

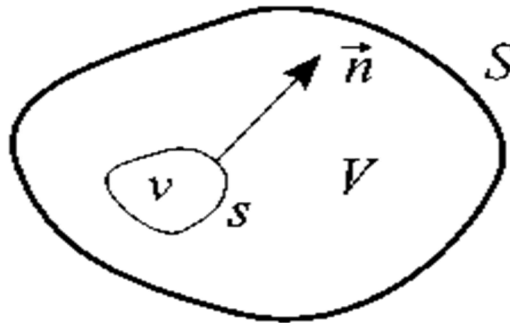


Figure 1.3: Un système thermique

La puissance thermique stockée dans v est égale à la somme de la puissance thermique générée par les sources volumiques contenues dans v et de la puissance thermique reçue sous forme de flux à travers la surface s :

$$\int_v \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dv = \int_v q dv + \int_s (-\vec{n} \cdot \vec{\lambda} \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) ds \quad (1.7)$$

Où :

- ρ Est la masse volumique du matériau (kg/m^3).
- c_p Est la capacité thermique massique ($J/(kg \cdot K)$) (§ A).
- \vec{n} est la normale unitaire à s dirigée vers l'extérieur de v .

Transformons la dernière intégrale de la relation (1) en intégrale de volume à l'aide du théorème d'Ostrogradski. Il vient :

$$\int_v (\rho c_p \dot{T} - \text{div}(\vec{\lambda} \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) - q) dv = 0 \quad (1.8)$$

Où :

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le domaine v étant arbitraire, on en déduit :

$$\rho c_p \dot{T} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q \quad (1.9) \quad [6]$$

1.2.2) Convection :**1.2.2.1) Définition :**

Jusqu'à maintenant nous avons considéré les échanges convectifs seulement comme une condition aux limites pour traiter les problèmes de conduction de la chaleur. Le terme « convection » est utilisé pour décrire le transfert d'énergie entre une surface solide et un fluide en mouvement par rapport à cette surface. Pour ce transfert, le transport d'énergie par conduction a toujours lieu, néanmoins le mode dominant est celui dû aux mouvements de particules fluides.

- la convection forcée, quand le mouvement du fluide est créé par une différence de pression (pompe, soufflerie).

Exemple de convection forcée : un sèche-cheveux dans lequel l'air ambiant est soufflé par un ventilateur au travers d'une résistance chauffante électrique

- la convection naturelle (ou libre), provoquée par les forces massiques dans le fluide dues aux différences de température et donc de masse volumique du fluide.

Exemple de convection naturelle : le chauffage d'une pièce par un convecteur électrique se fait par une ascension d'air chaud le long du mur, tandis que l'air plus frais descend et est « aspiré » vers le convecteur pour remplacer l'air chaud le quittant.

- la convection accompagnée d'un changement de phase (évaporation ou condensation).
Exemple de convection avec changement de phase : au début du chauffage d'une quantité d'eau dans une bouilloire, la convection naturelle gouverne le processus d'échange entre la paroi et l'eau. Quand l'eau boue, l'évaporation intensifie le transfert. [5]

1.2.2.2) Loi de Newton :

- Ce dernier ne l'a pas formulé explicitement mais il considérait dès le début que l'échange par convection était proportionnel à l'écart de température :

$$\frac{dT_s}{dt} \propto (T_s - T_{inf}) \quad (1.10)$$

Le coefficient d'échange moyen :

$$\bar{h} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h dA_s \quad (1.11) [5]$$

1.2.3) Rayonnement :**1.2.3.1) Définition :**

La convection entre le corps et la surface de l'enceinte du fait du vide, on en déduit que ce transfert n'a pu s'effectuer que par le biais d'un troisième mode : c'est le rayonnement thermique. Remarquons aussi que lorsque l'équilibre thermique est atteint, il n'y a plus d'échange de chaleur par rayonnement. Ce transfert thermique repose sur le transport de la chaleur à l'aide d'ondes électromagnétiques [5]

1.3. Equation de conservation :**1.3.1) Conservation de masse :**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1.12)$$

1.3.2) Conservation de quantité de mouvement :

Suivant l'axe des X

$$\begin{aligned} \rho_f \left[U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right] \\ = -\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial X} + \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\varepsilon \mu_p}{\rho_f} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\varepsilon \mu_p}{\rho_f} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] - \frac{\varepsilon^2 \mu_f}{K} u \\ - \rho_f \left[\frac{F}{\sqrt{K}} \sqrt{U^2 + V^2} \right] U \end{aligned}$$

Suivant l'axe des Y

$$\begin{aligned} \rho_f \left[U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right] \\ = -\varepsilon^2 \frac{\partial P}{\partial Y} + \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\varepsilon \mu_p}{\rho_f} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\varepsilon \mu_p}{\rho_f} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] - \frac{\varepsilon^2 \mu_f}{K} u \\ - \rho_f \left[\frac{F}{\sqrt{K}} \sqrt{U^2 + V^2} \right] V \end{aligned}$$

(1.13)

Avec F : Nombre de Forchheimer

1.3.3) Conservation d'énergie :

$$\rho_f \left[\mathbf{U} \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{V} \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_{\text{effective}}}{c p_f} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_{\text{effective}}}{c p_f} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (1.14) \quad [7]$$

1.4. Condition aux limites :

On distingue trois types de conditions aux limites thermiques.

1.4.1) Condition de Dirichlet :

$$T(M, t) = T_i(M, t), \text{ à } t > 0 \text{ pour } M \in \Gamma$$

Cette condition peut être utilisée lorsque l'on fait circuler un fluide dont la température est maintenue constante et égale à T_i à la surface Γ du domaine solide, ou bien lorsque l'on met la surface en contact parfait avec un matériau massif et capacitif à température homogène T_i . Cette deuxième configuration ne peut bien sûr avoir un sens que pour des durées d'application limitées. Comme le montre la relation, cette température peut dépendre du temps.

1.4.2) Condition de Neumann :

$$\phi(M, t) = \phi_0(M, t), \text{ à } t > 0 \text{ pour } M \in \Gamma \quad (1.15)$$

C'est une condition que l'on retrouve lorsque l'on chauffe la surface du matériau avec une source résistive ou radiative. La relation montre que ce flux peut éventuellement dépendre du temps.

1.4.3) Condition mixte :

Cette dernière condition est plus complexe. Elle s'applique généralement à l'interface entre une paroi solide et un fluide mais ce dernier n'impose pas sa température sur la surface solide. Cette condition est en fait une conséquence du bilan thermique au niveau de l'interface. En l'absence de terme source, le flux de chaleur par conduction dans le matériau solide est égal

au flux par diffusion et convection dans le fluide auquel peut s'ajouter du flux rayonné si le fluide est transparent (nous reviendrons plus en détail sur le transfert radiatif aux chapitres suivants). Cela revient donc à écrire pour les densités de flux :

$$\varphi_c = \varphi_{cv} + \varphi_r \quad (1.16)$$

Soit :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_p - T_{amb}) + \varphi_r \quad (1.17)$$

Dans cette relation λ est la conductivité thermique de la paroi solide à la température T_p , φ_{cv} désigne la densité de flux évacué par convection à la surface avec le fluide et φ_r désigne la densité de flux rayonné. Nous introduisons dans cette relation le coefficient d'échange par convection h . Sa définition est généralement assez compliquée car elle prend en compte des phénomènes complexes au niveau de l'interface entre la paroi solide et le fluide en écoulement.

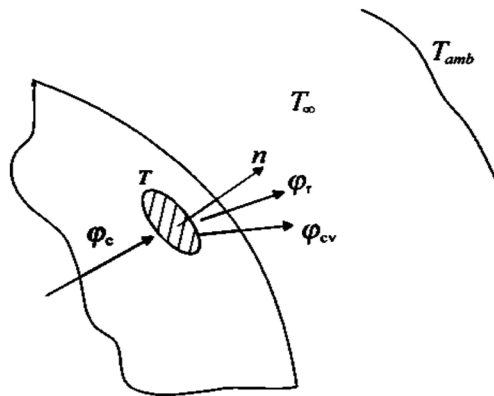


Figure 1.4 : Bilan thermique à l'interface entre un matériau solide et un fluide en mouvement.
[5]

L *es méthodes numériques*

2.1. Introduction :

La discrétisation d'une équation différentielle consiste à remplacer l'information continue que contient sa solution par une information discrète. Donc le domaine de calcul qui était continu doit être divisé ou discrétisé. Cette discrétisation permet de remplacer les équations différentielles qui sont trop compliquées par des équations algébriques faciles à résoudre. Pour discrétiser les équations de la mécanique des fluides, on distingue différentes méthodes, mais les plus utilisées sont celles des différences finies, des éléments finis et des volumes finis.

[2]

2.1.1) Méthode des différences finis :

La méthode des différences finies est simple à formuler, elle demande moins de calcul en comparant avec la méthode des éléments finis, en plus il est possible de l'étendre vers le cas bi ou tridimensionnelle. Elle est appliquée généralement à la modélisation et à la résolution des équations différentielles partielles gouvernantes des problèmes à géométries régulières. Tandis qu'il est difficile de la généraliser aux problèmes à géométrie complexe avec des conditions aux limites quelconques. Cette méthode est basée sur la technique du développement en série de Taylor qui permet d'approximer la valeur d'une fonction en un point donné si on connaît la valeur de la fonction ainsi toutes ces dérivées en un point voisin en espace ou en temps. Cette technique permet de développer des schémas pour remplacer les dérivées premières et secondes des équations différentielles partielles pour pouvoir envisager une solution numérique par ordinateur. La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre infini de points discrets ou nœuds du maillage. La figure représente un détail d'un maillage de calcul structuré d'un domaine bidimensionnel (2D). [2]

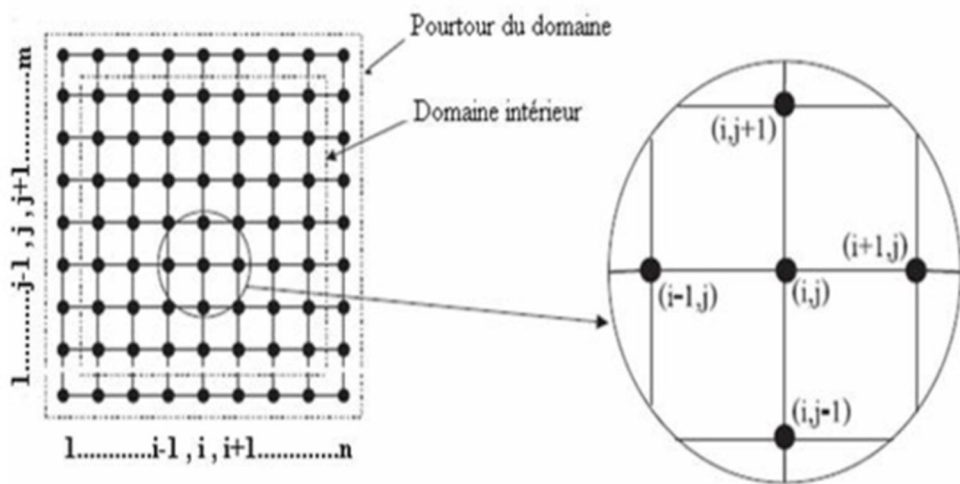


Figure 2.1: Grille de maillage structuré 2D. [8]

- L'avantage des méthodes des différences finies : Une simplicité d'écriture et faible coût de calcul.
- L'inconvénient : Limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

2.1.2) Méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes adaptées à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles appliquée initialement à des problèmes de mécanique des structures, elle a connu un essor très rapide et une extension vers d'autres domaines comme la mécanique des fluides. La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques et en subdivisant le domaine étudié en petits éléments.

Cette méthode présente certains avantages par rapport à celle des différences finies. On cite les trois principaux avantages, ces derniers assurent à la méthode une suprématie sans conteste :

La souplesse considérable dans le choix du maillage (on peut résoudre les problèmes des écoulements de géométries complexes).

La facilité de prendre en compte des conditions aux limites portant sur les gradients de la fonction (par exemple : condition de Newman). Les conditions aux limites sont directement intégrées dans la formulation de l'équation générale régissant les problèmes.

Chapitre 02 : les méthodes numériques

Traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.

- Inconvénient : Complexité de mise en œuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire. [2]

2.1.3) Méthode des volumes finis :

La méthode des volumes de contrôles développée par PATANKAR est très utilisée dans les problèmes de mécanique des fluides et thermiques. La méthode intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation, elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes.

Les avantages de la méthode des volumes finis est d'assurer une conservation intégrale exacte des grandeurs quelle que soit la taille du maillage et c'est pour raison qu'elle est très largement utilisée pour la résolution des phénomènes gouvernés par des équations à dérivées partielles. [2]

F *ormulation par éléments finis du problème de champ thermique*

3.1) Introduction d'élément fini :

La méthode des éléments finis (MEF) est employée dans de nombreux domaines scientifiques pour résoudre des équations aux dérivées partielles. Elle permet de construire une approximation simple des inconnues pour transformer ces équations continues en un système d'équation de dimension finie, que l'on peut écrire schématiquement sous la forme suivante :

$$\{A\} \cdot \{U\} = \{L\}$$

- $\{U\}$ est le vecteur des inconnues,
- $[A]$ une matrice et $\{L\}$ un vecteur.

La matrice $[A]$ et le vecteur $\{L\}$ peuvent être construits par assemblage des matrices et vecteurs élémentaires, calculés localement. [9]

3.2) Transformation des équations d'un système physique :

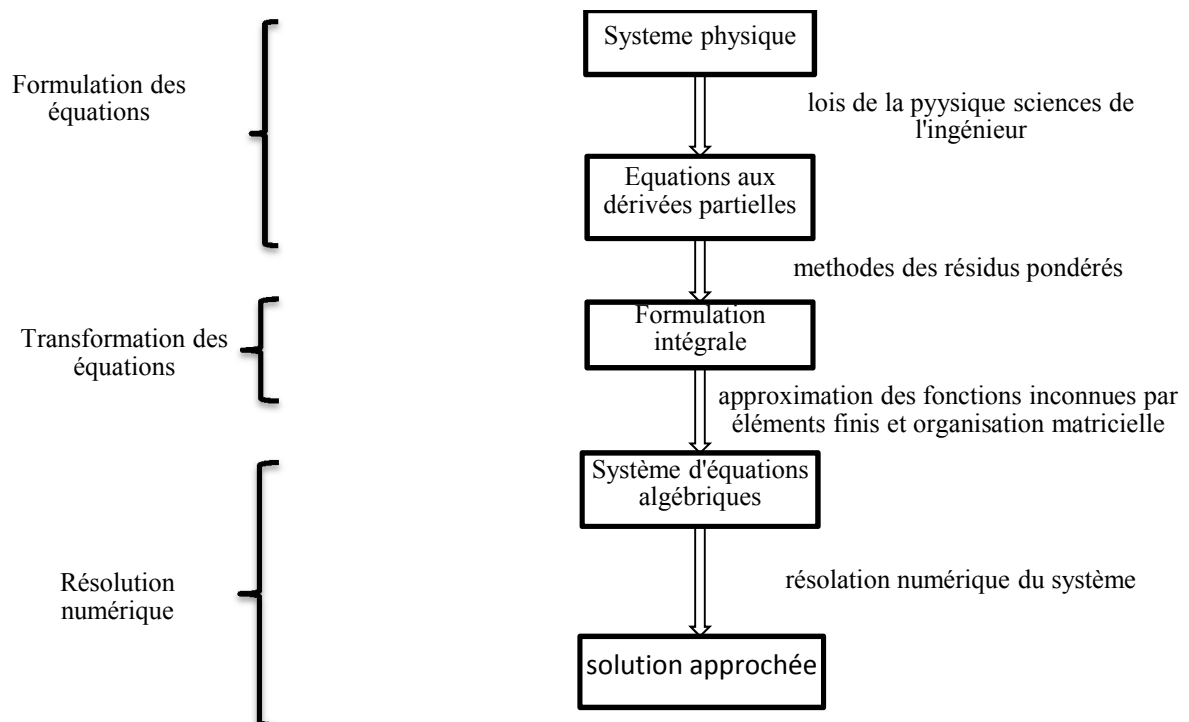


Figure 3.1 : Transformation des équations

3.3) Formulation variationnelle :

On peut obtenir la formulation variationnelle d'un problème à partir des équations aux dérivées partielles, en multipliant celles-ci par des fonctions tests et en intégrant par parties. [9]

3.3.1) équation de chaleur :

$$\left(k_x \frac{d^2 T}{dx^2} + Q\right) = 0 \quad (3.1)$$

3.3.2) résidu de l'équation de chaleur :

Nous appelons résidu $R(x)$, l'écarts mathématique de la forme du problème étudié.

Soit, dans notre cas :

$$R(x) = k_x \frac{d^2 T}{dx^2} + Q \quad (3.2)$$

$R(x) = 0$ Ce résidu s'annule quand $T(x)$ est la solution.

3.3.3) pondération du résidu par une fonction-test :

$T^*(x)$: Fonction de test suffisamment régulière

$$\begin{aligned} T^*(x)R(x) &= 0 \\ T^*(x) \left(k_x \frac{d^2 T}{dx^2} + Q\right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.3.4) intégration sur le domaine :

$$\int_x T^*(x) \left(k_x \frac{d^2 T}{dx^2} + Q\right) = 0$$

$$\int_x T^*(x) \left(k_x \frac{d^2 T}{dx^2}\right) + \int_x T^*(x) Q = 0 \quad \rightarrow \quad (3.4.a)$$

$$T^*(x) \left(k \frac{d^2 T}{dx^2} \right) \rightarrow \text{Formule forte (2^{ème} ordre)}$$

3.3.5) intégration par partie :

Appliquer pour $T^*(x) \left(k_x \frac{d^2 T}{dx^2} \right)$

$$\int_0^l \left(T^*(x) k \frac{dT}{dx} \right)' = \int_0^l \frac{dT^*(x)}{dx} k \frac{dT}{dx} + \int_0^l k \frac{d^2 T}{dx^2} T^*(x)$$

$$\left[T^*(x) k \frac{dT}{dx} \right]_0^l = \int_0^l \frac{dT^*(x)}{dx} k \frac{dT}{dx} + \int_0^l k \frac{d^2 T}{dx^2} T^*(x)$$

$$\int_0^l k \frac{d^2 T}{dx^2} T^*(x) = \left[T^*(x) k \frac{dT}{dx} \right]_0^l - \int_0^l \frac{dT^*(x)}{dx} k \frac{dT}{dx} \quad \rightarrow \quad \text{(3.4.b)}$$

(3.4.b) : formulation faible

(3.4.b) dans (3.4.a) \rightarrow

$$\left[T^*(x) k \frac{dT}{dx} \right]_0^l - \int_0^l \frac{dT^*(x)}{dx} k \frac{dT}{dx} + \int_0^l T^*(x) Q dx$$

$$\left[T^*(l) k \frac{dT}{dx}(l) - T^*(0) k \frac{dT}{dx}(0) \right] - \int_0^l \frac{dT^*(x)}{dx} k \frac{dT}{dx} + \int_0^l T^*(x) Q dx = 0 \quad \text{(3.5)}$$

3.4) Calcul élémentaire :

3.4.1) fonction d'interpolation :

Les fonctions de forme ou fonctions d'interpolation sont les fonctions N_i qui relient les déplacements d'un point quelconque intérieur à un élément aux n déplacements nodaux q_i qui sont les degrés de liberté dans le cas de l'approche cinématique : il y a pour un élément autant de fonctions de forme que de degrés de liberté dans l'élément. [10]

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) q_i \quad \text{(3.6)}$$

3.4.2) l'interpolation de Lagrange :

$$f(x) = \sum L_i f(x_i)$$

$$L_i = \prod_i^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \quad (3.7)$$

Avec

- L_i polynôme de Lagrange

$$T(x) = \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} \langle N'_1 \quad N'_2 \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}$$

$$T^*(x) = \langle T_1 \quad T_2 \rangle \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial T^*}{\partial x} \langle T^*_1 \quad T^*_2 \rangle \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[K_e] = \int \frac{\partial T^*}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

$$\int [B'] [C] [B] = \int \langle T^*_1 \quad T^*_2 \rangle \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{Bmatrix} k_x \langle N'_1 \quad N'_2 \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx$$

$$\int [B'] [k] [B] = \langle T^* \rangle k_x \int_0^l \begin{bmatrix} N_1^{2'} & N_1' N_2' \\ N_1' N_2' & N_2^{2'} \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\text{Avec} \begin{bmatrix} N_1^{2'} & N_1' N_2' \\ N_1' N_2' & N_2^{2'} \end{bmatrix} \text{matrice transposer } [B']$$

$$F = \int T^* Q dx = \int \langle T^*_1 \quad T^*_2 \rangle \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{Bmatrix} Q dx$$

$$F = \langle T^* \rangle \int_0^l \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{Bmatrix} Q dx \quad (3.10)$$

3.4.3) Deux dimensionnel :**3.4.3.1) Formulation intégrale :**

$$w = - \int_v \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \psi f_v \right) dv + \int_{s_f} \psi \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{s_u} \psi \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (3.11)$$

Les fonctions ψ et u doivent être dérivables une fois. Nous avons maintenant des termes de contour sur s_f et s_u . Ceci permet d'utiliser la condition imposée à u sur s_f .

Pour remplacer :

$$\int_{S_f} \psi \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad \text{Par} \quad \int_{S_u} \psi (f_s - \alpha u) ds. \quad (3.12)$$

De plus nous pouvons faire disparaître le terme de contour sur S_u

En imposant :

$$\psi = 0 \quad \text{Sur} \quad S_u \quad (3.13)$$

La forme intégrale faible s'écrit alors :

$$w = - \int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \psi f_v \right) dv + \int_{S_f} \psi (f_s - \alpha u) ds = 0 \quad (3.14.a)$$

Où u et ψ doivent satisfaire les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u &= u_s & \text{Sur} & S_u \\ \psi &= 0 & \text{Sur} & S_u \end{aligned}$$

Après deux intégrations par parties de la forme intégrale

$$w = - \int_V \left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \psi f_v \right) dv + \oint_S \left(\psi \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} u \right) ds = 0 \quad (3.14.b)$$

Si nous choisissons des fonctions qui satisfont $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$ en tout point de V , la forme (3.6.b) ne contient plus d'intégrale de volume si $f_v = 0$:

$$\oint_S \left(\psi \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} u \right) ds = 0 \quad (3.15)$$

Cette expression constitue la base de la méthode des équations intégrales de contour. [12]

3.5) Résumé :

Formulation	Conditions sur u			Conditions sur ψ		
	Ordre de dérivation	Condition sur S_f	Condition sur S_u	Ordre de dérivation	Condition sur S_f	Condition sur S_u
Equation aux dérivées partielles	2	$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = f_s$	$u = u_s$	Néant	Néant	Néant
Forme intégrale	2	$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = f_s$	$u = u_s$	Néant	Néant	Néant
Forme intégrale	1	Néant	$u = u_s$	1	Néant	$\psi = 0$
Si $f_v = 0$ Forme intégrale (pas d'intégrale de volume)	Néant	$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = f_s$	$u = u_s$	ψ satisfait $\Delta\psi \equiv 0$ (pas de conditions sur S)		

Tableaux (3.1) : résumé de Formulation variationnelle

$$\mathcal{L}_e(q) - f_v = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - f_v = 0 \quad (3.16)$$

- La relation flux de chaleur-température :

$$\mathcal{L}_e(q, u) = \begin{cases} q_x + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ q_y + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Ou $u(x, y)$ est la température au point (x, y) .

L'équation de Poisson est obtenue en éliminant q_x et q_y entre ces trois équations :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v = 0 \quad (3.18)$$

Appliquons la méthode des résidus pondérés directement aux opérateurs $(\mathcal{L}_e - f_v)$ et \mathcal{L}_e

$$w_r = \int_v \langle \psi_u \rangle \{ \mathcal{L}_e(q) - f_v \} dv + \int_v \langle \psi_q \rangle \{ \mathcal{L}_e(q, u) \} dv = 0 \quad (3.19)$$

Comme ψ_u et ψ_q sont indépendants :

$$\int_v \langle \psi_u \rangle \{ \mathcal{L}_e(q) - f_v \} dv = 0$$

$$\int_v \langle \psi_q \rangle \{ \mathcal{L}_e(q, u) \} dv = 0 \quad (3.20)$$

Ou u et q satisfont toutes les conditions aux limites sur S_u et S_f [12]

3.6) Relations entre systèmes d'équations différentielles formes

Formes intégrales et fonctionnelles

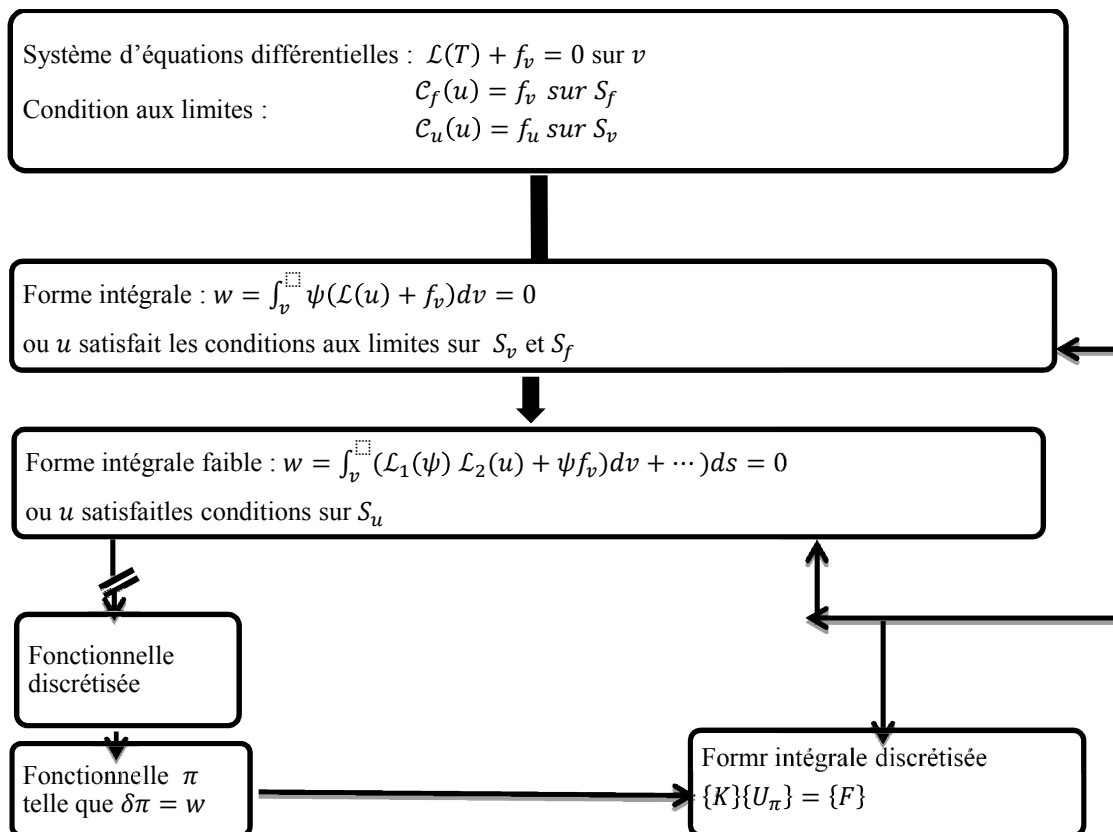


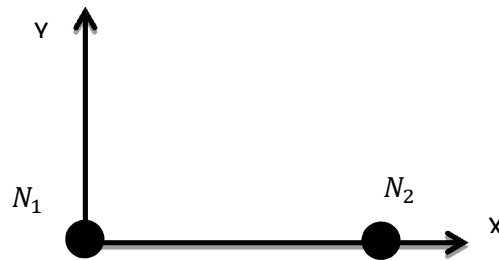
Figure 3.2 : relation entre les systèmes d'équations.

3.7) Présentation d'élément utilisé dans cette étude

3.7.1) calcul du nœud

$$N_i = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{x-x_n}{x_i-x_n} \right) \quad (3.21)$$

- Par rapport l'axe X

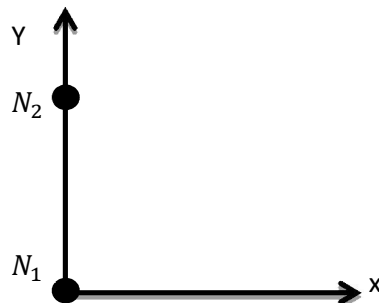


$$N_1^x = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) = \left(\frac{x-le}{0-le} \right) = 1 - \frac{x}{le}$$

(3.22)

$$N_2^x = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) = \left(\frac{x-0}{le-0} \right) = \frac{x}{le}$$

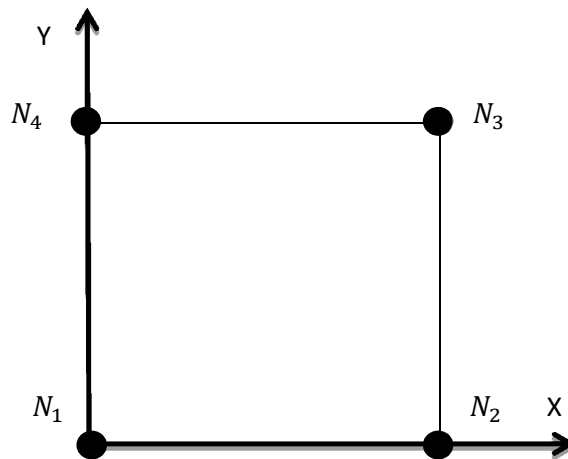
- Par rapport l'axe Y :



$$N_1^y = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 \left(\frac{y - y_j}{y_i - y_j} \right) = \left(\frac{y - l_e}{0 - l_e} \right) = 1 - \frac{y}{l_e} \quad (3.23)$$

$$N_2^y = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^2 \left(\frac{y - y_j}{y_i - y_j} \right) = \left(\frac{y - 0}{l_e - 0} \right) = \frac{y}{l_e}$$

3.7.2) Formulation d'un élément fini quadrilatère à 4 nœuds :



Nœud 01 :

$$N_1 = N_1^x N_1^y$$

$$N_1(x, y) = \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{y}{l} \right) \quad (3.24.a)$$

Nœud 02 :

$$N_2 = N_2^x N_1^y$$

$$N_2(x, y) = \left(\frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{y}{l} \right) \quad (3.24.b)$$

Nœud 03 :

$$N_3 = N_2^x N_2^y$$

$$N_3(x, y) = \left(\frac{x}{l} \right) \left(\frac{y}{l} \right) \quad (3.24.c)$$

Nœud 04 :

$$N_4 = N_1^x N_2^y$$

$$N_4(x, y) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{y}{l}\right) \quad (3.24.d)$$

La matrice $B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{l}\left(1 - \frac{y}{l}\right)\right) & \left(\frac{1}{l}\left(1 - \frac{y}{l}\right)\right) & \left(\frac{1}{l}\left(\frac{y}{l}\right)\right) & \left(-\frac{1}{l}\left(\frac{y}{l}\right)\right) \\ \left(-\frac{1}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) & \left(-\frac{1}{l}\left(\frac{x}{l}\right)\right) & \left(\frac{1}{l}\left(\frac{x}{l}\right)\right) & \left(\frac{1}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) \end{bmatrix}$$

$$B = \left(\frac{1}{l}\right) \begin{bmatrix} \left(\frac{y}{l} - 1\right) & \left(1 - \frac{y}{l}\right) & \left(\frac{y}{l}\right) & \left(-\frac{y}{l}\right) \\ \left(\frac{x}{l} - 1\right) & \left(-\frac{x}{l}\right) & \left(\frac{x}{l}\right) & \left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$B = \left(\frac{1}{l}\right) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

La matrice transposée $B' = \left(\frac{1}{l}\right) \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix}$

3.8) interpolation élémentaire :

$$(K) = \left(\frac{1}{l^2}\right) \iint_0^l [B'] [k] [B] dx dy \quad (3.26)$$

Avec k : conductivité d'un matériau isotope « homogène »

$$(K) = \left(\frac{k}{l^2}\right) \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{1}{6} l^2\right) \\ \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) \\ \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) \\ \left(-\frac{1}{6} l^2\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$K_e = [K]\{T\}$$

$$K_e = \left(\frac{k}{l^2}\right) \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{1}{6} l^2\right) \\ \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) \\ \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) \\ \left(-\frac{1}{6} l^2\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

$$F = \iint_0^l N \cdot Q \, dx \, dy$$

$$F = Q \iint_0^l \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} dx \, dy \quad F = \frac{Q}{4} l^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$[K_e]\{T\} = [F]$$

$$\left(\frac{k}{l^2}\right) \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{1}{6} l^2\right) \\ \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) \\ \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) \\ \left(-\frac{1}{6} l^2\right) & \left(-\frac{2}{6} l^2\right) & \left(-\frac{l^2}{6}\right) & \left(\frac{2}{3} l^2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \frac{Q}{4} l^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A **Algorithme de résolution en régime stationnaire**

4.1.1) Méthode direct :

On se propose de résoudre l'équation matricielle $A(x) = b$. On suppose que la matrice A est inversible. Lorsque A est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), la résolution du système est immédiate

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{cases} \quad (4.1)$$

On calcule successivement x_n à partir de la dernière équation, puis x_{n-1} à partir de l'avant-dernière et ainsi de suite. Ce qui donne

$$\begin{cases} x_n = b_n/a_{nn} \\ x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n} \\ \dots \\ x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n)/a_{11} \end{cases} \quad (4.2)$$

La méthode de remontée s'étend aux matrices triangulaires par blocs. Elle nécessite $n(n-1)/2$ additions, $n(n-1)/2$ multiplications et n divisions. Étant donné la simplicité de la résolution d'un système triangulaire, de nombreuses méthodes sera mènent à la solution d'un système triangulaire. Le problème est alors de construire par un changement de base une matrice triangulaire. [11]

4.1.2) Méthode de Gauss :

La méthode de triangularisation de Gauss, encore appelée méthode du pivot de Gauss ou élimination de Gauss, est fondée sur le théorème suivant qui affirme que pour une matrice carrée A d'ordre n , il existe au moins une matrice inversible P telle que PA soit une matrice triangulaire supérieure. L'algorithme consiste alors à remplacer à chaque étape la matrice A

par une matrice $A^{(k)}$ dont les n -ièmes premiers vecteurs colonnes correspondent au début d'une matrice triangulaire. À la $(k + 1)$ -ième étape, on conserve les n premières lignes et les $(k - 1)$ premières colonnes de $A^{(k)}$

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)} & i = k + 1, \dots, n \text{ et } j = k + 1, \dots, n \\ a_{ij}^{(k+1)} &= 0 & i = k + 1, \dots, n \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)} & \quad \quad \quad (4.3) \end{aligned}$$

En pratique, si le pivot, c'est-à-dire l'élément $a_{kk}^{(k)}$ situé à la k -ième ligne et à la k -ième colonne, est petit ou nul, l'algorithme n'est plus valable. On emploie dans ce cas des permutations de lignes et de colonnes appelées stratégies de pivot (voir le paragraphe Problème des pivots). [11]

4.1.3) Méthode itérative :

Dans les méthodes itératives, le système $Ax = b$ est mis sous la forme $Mx = Nx + b$. Lorsque la matrice M est inversible $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$. Remarquer que cette équation est une équation de la forme $x = f(x)$. Par conséquent, les méthodes itératives sont des méthodes de point fixe. La détermination du point fixe repose sur l'itération de l'équation

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b \quad (4.4)$$

En notant x_k le vecteur de composantes $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. L'algorithme est initialisé par un vecteur arbitraire $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ et s'arrête quand $\forall_i \in \mathbb{N}, x_i^{(k)} - x_i^{(k-i)} < \varepsilon$ pour un ε donné. Lorsque la suite x_k converge, i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ on dit que la méthode converge.

On démontre que la convergence de la méthode ne dépend pas du choix de x_0 et le résultat suivant :

la méthode itérative $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$ converge si et seulement si le rayon spectral de la matrice $M^{-1}N$ est strictement inférieur à 1, $\rho(M^{-1}N) < 1$. Selon les choix des matrices M et N on a différentes méthodes itératives. On note D la matrice formée des seuls éléments

diagonaux de D , $-E$ la matrice formée des a_{ij} si $i > j$ et $-F$ la matrice formée a_{ij} si $i < j$, de sorte que $A = D - (E + F)$.

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$-E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad -F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

4.1.4) Jacobi :

Dans la méthode de Jacobi, encore appelée méthode des déplacements simultanés, la matrice A du système $Ax = b$ est décomposée en $A = M - N$. La matrice M correspond à la diagonale de A (et des zéros en dehors de la diagonale) $M = D = a_{ij}\delta_{ij}$ et la matrice N est la matrice A dans laquelle on a remplacé les éléments de la diagonale par des zéros $N = E + F$. La matrice $J = M^{-1}N = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$ est appelée matrice de Jacobi. À chaque pas, on calcule

$$x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j \neq i, j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)} / a_{ii} \quad (4.6)$$

À chaque itération, on effectue $(n - 1)$ multiplications, n additions et une division. Pour stocker A et les vecteurs b, x_k et x_{k+1} on utilise $(n^2 + 3n)$ mémoires. La méthode ne converge pas toujours. On démontre que si A est une matrice définie positive, la méthode itérative converge. De même, si A est une matrice diagonalement dominante, c'est-à-dire si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Alors la méthode de Jacobi converge. Par conséquent, on peut avoir intérêt à réarranger les termes de rA de façon à mettre rA sous la forme d'une matrice dont les éléments diagonaux sont les plus grands possibles. On démontre que si rA est une matrice tridiagonale par blocs, la méthode converge. [11]

4.1.5) Gauss Seidel :

Dans la méthode de Gauss-Seidel, publiée en 1874 par Ludwig Seidel (1821-1896), on choisit $M = D - E$ et $N = F$, ce qui conduit à considérer la relation de récurrence

$$x_{k+1} = (D - E)^{-1}Fx_k + (D - E)^{-1}b$$

C'est une amélioration de la méthode de Jacobi dans laquelle les valeurs calculées sont utilisées au fur et à mesure du calcul et non à l'issue d'une itération comme dans la méthode de Jacobi. On améliore ainsi la vitesse de convergence. Considérons un système à trois équations

$$\begin{cases} x = (b_1 - a_{12}y - a_{13}z)/a_{11} \\ y = (b_2 - a_{21}x - a_{23}z)/a_{22} \\ z = (b_3 - a_{31}x - a_{32}y)/a_{33} \end{cases} \quad (4.7)$$

À la première itération, on calcule à partir du vecteur initial

$$x_0 = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$$

La valeur $x^{(1)}$

$$x^{(1)} = (b_1 - a_{12}y^{(0)} - a_{13}z^{(0)})/a_{11} \quad (4.8)$$

Cette valeur est réintroduite immédiatement dans le calcul de la deuxième composante (ce qui différencie cette méthode de la méthode de Jacobi, car on utilise ici la valeur $x^{(1)}$ et non $x^{(0)}$)

$$y^{(1)} = (b_2 - a_{21}x^{(1)} - a_{23}z^{(0)})/a_{22} \quad (4.9)$$

De même, on porte $x^{(1)}$ et $y^{(1)}$ dans le calcul de $z^{(1)}$

$$z^{(1)} = (b_3 - a_{31}x^{(1)} - a_{32}y^{(1)})/a_{33} \quad (4.10)$$

À chaque itération, on effectue $(n - 1)$ multiplications, n additions et une division. Pour stocker A et les vecteurs b, x_k et x_{k+1} , on utilise $(n^2 + 2n)$ mémoires. Si A et b sont calculés, on emploie n mémoires. La méthode ne converge pas toujours. On démontre que si A est une matrice définie positive, la méthode itérative converge. De même, si A est une matrice diagonalement dominante, c'est-à-dire si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Alors la méthode de Gauss-Seidel converge. [11]

4.1.6) Relaxation :

La convergence d'une méthode itérative ne dépend pas du choix du vecteur initial x_0 , mais la rapidité de convergence en dépend. D'où l'idée d'introduire un facteur de relaxation ω non nul. Les matrices M et N sont choisies comme dans la méthode de Gauss mais pondérées par le facteur de relaxation $M = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$. La matrice

$$L = M^{-1}N = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right) \quad (4.11)$$

Est appelée matrice de relaxation. L'algorithme est fondé sur le calcul des itérées

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (4.12)$$

On démontre que si le facteur de relaxation dépasse 2, la méthode diverge. Pour $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel. Lorsque $0 < \omega < 1$, on parle de sous-relaxation et lorsque $1 < \omega < 2$, on parle de surrelaxation (**SOR, Successive Over Relaxation**). Le théorème d'Ostrowski-Reich affirme que si A est une matrice définie positive et si le facteur de relaxation $0 < \omega < 2$ alors la méthode converge. Lorsque A est une matrice tridiagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont inversibles, si on note J la matrice $J = D^{-1}M + D^{-1}(E + F)$, et $\rho(J)$ son rayon spectral (c'est-à-dire le plus grand module des valeurs propres de J), alors la valeur optimale du facteur de relaxation est donnée par

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}} \quad (4.13)$$

Dans certains cas, on utilise différents facteurs ω pour différents blocs de A : C'est la méthode de relaxation par blocs. [11]

4.2) Intégration numérique :

4.2.1) Intégration de Gauss :

Les méthodes de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) utilisent une subdivision particulière où les points x_j sont les racines d'une famille de polynômes orthogonaux, qui ne sont pas

régulièrement espacés, contrairement aux méthodes composées. La fonction à intégrer est approchée par une interpolation de Lagrange sur les points x_j .

Les méthodes de Gauss sont les méthodes les plus répandues et les plus précises, car l'intégration est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$ (au lieu de n ou $n+1$ dans les méthodes composées). Soit (Ψ_n) une famille de polynômes orthogonaux pour la fonction $\omega(x)$ sur l'intervalle $[u, v]$. Cherchons à exprimer l'intégrale $\int_u^v f(x)\omega(x)dx$. Écrivons la fonction f en utilisant la formule de Lagrange

$$f(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x)f(x_i) + \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \quad (4.14)$$

Avec $c \in [u, v]$ et

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \quad (4.15)$$

Si (Ψ_n) est une base de polynômes orthogonaux pour la fonction de poids $\omega(x)$, on a

$$\int_u^v \Psi_m(x)\Psi_n(x)\omega(x)dx = 0 \quad \text{si } n \neq m$$

Développons sur cette base le produit

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i \Psi_i(x) \quad (4.16)$$

Et si f est un polynôme de degré $(2n + 1)$, notons

$$Q_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \sum_{i=0}^n b_i \Psi_n(x) \quad (4.17)$$

Le reste s'exprime par

$$R_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$$

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j \Psi_i(x) \Psi_j(x) + a_{(n+1)} \sum_{i=0}^n b_i \Psi_i(x) \Psi_{n+1}(x)$$

(4.18)

D'où en intégrant

$$\int_u^v f(x) \omega(x) dx = \int_u^v \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) \omega(x) dx + \int_u^v R_n(x) \omega(x) dx + \varepsilon \quad (4.19)$$

Soit en vertu de l'orthogonalité des polynômes

$$\int_u^v R_n(x) \omega(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i b_i \int_u^v \Psi_i^2(x) \omega(x) dx \quad (4.20)$$

En choisissant les points (x_j) de la subdivision comme les $(n+1)$ racines du polynôme de degré $n+1$, on impose $a_i = 0$, pour $i = 0, 1, \dots, n$ et $a_{i+1} \neq 0$, c'est-à-dire

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i \Psi_i(x) = a_{i+1} \Psi_{n+1}(x) \quad (4.21)$$

D'où

$$\int_u^v R_n(x) \omega(x) dx = 0 \quad (4.22)$$

Par conséquent, la méthode de Gauss appliquée à une fonction f conduit à une approximation de la forme

$$\int_u^v f(x) \omega(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + \varepsilon \quad (4.23)$$

Avec

$$\omega_i = \int_u^v l_i(x) \omega(x) dx \quad (4.24)$$

L'erreur est de la forme $\varepsilon = \varepsilon_n f^{(2n+2)}(c)$ où ε_n dépend du choix des polynômes orthogonaux (Ψ_n) .

V *alidation & évaluation*

5.1. Introduction :

L'intérêt principal de cette section est de présenter l'évaluation et la validation de notre élément présenté dans ce travail, élément fini présenté est un élément fini quadrilatère à quatre nœuds basé sur les coordonnées naturelles de la géométrie pour étudier les phénomènes de transfert de chaleur par conduction.

5.2. Développement d'un code de calcul par éléments finis :

Les processus de calcul dans le programme développé se fait comme suit :

a) Préprocesseur

- Introduction des données de la géométrie et le choix de la taille du maillage.
- Présentation graphique à l'aide du mailleur automatique
- Définissant les caractéristiques physiques

b) Processeur

- Calcul élémentaire des matrices de conductivité [K] et le vecteur de la source de chaleur [F]
- Ensuite, on fait l'assemblage des éléments pour déterminer les matrices globales.
- puis on impose les conditions aux limites.
- par la suite, Résolution du système d'équations algébriques, en utilisant la méthode de Gauss pour déterminer les températures nodales.
- Post-Processeur
- Calculant les champs du flux au milieu de chaque élément.

5.3. Exemple de la validation :

Deux cas d'études seront considérés par la suite à savoir :

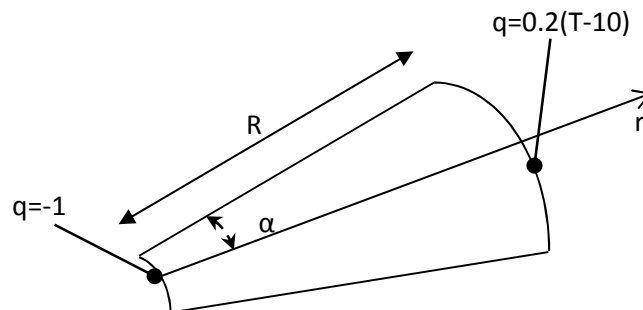
- **Cas 01** : l'effet de la géométrie d'un segment de disque sur la distribution de la température
- **Cas 02** : étude de la diffusion de la température dans un domaine rectangulaire.

5.3.1 étude d'un secteur de disque :

Cet exemple concerne l'étude de la distribution de la température dans un segment de disque, sachant que la solution analytique est donnée sous la forme :

$$T_{exacte} = 11 + \ln\left(\frac{5}{R}\right) \text{ avec } R \text{ présente le rayon}$$

Les conditions aux limites sont présentées par :



La solution analytique exacte nous permet de comparer les résultats de notre programme avec cette solution exacte pour différentes configurations géométriques.

Cas 01-a : $R=5$ et $\alpha = \frac{\pi}{30}$ avec : $k_x = k_y = k$ (matériau isotrope)

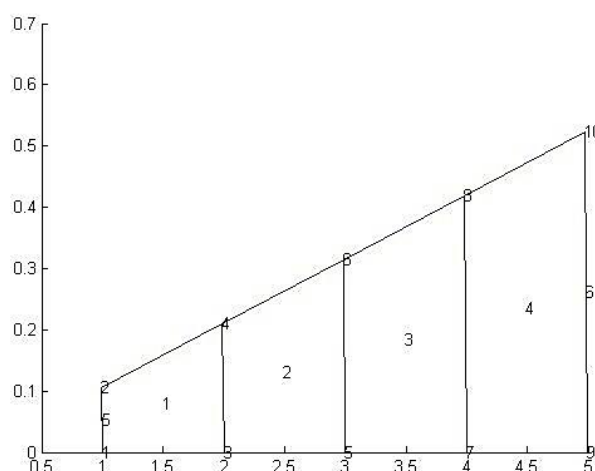


Figure 5.1.a : Maillage d'un segment de disque avec quatre éléments quadrilatères

Avec $R=5$ et $\alpha=\pi/30$

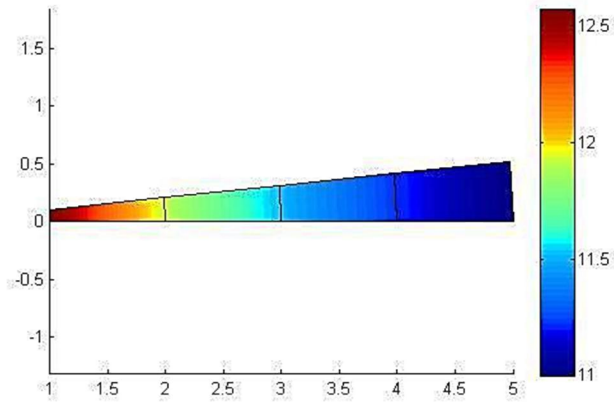


Figure 5.1.b : Diffusion de la température d'un secteur de disque Avec R= 5 et $\alpha=\pi/30$

La comparaison sous format numérique est donnée dans le tableau suivant :

Rayon R	T _{Q4}	T _{exacte}	erreur
1	12,60943791	12,48334353	0,01
2	11,91629073	11,79712782	0,01
3	11,51082562	11,39571737	0,01
4	11,22314355	11,11091212	0,01
5	11	11	0

Tableaux 5.1 : La comparaison numérique Avec R= 5 et $\alpha=\pi/30$

Cas 01-b : R=05 et $\alpha = \frac{\pi}{10}$ avec : $k_x = k_y = k$ (matériau isotrope)

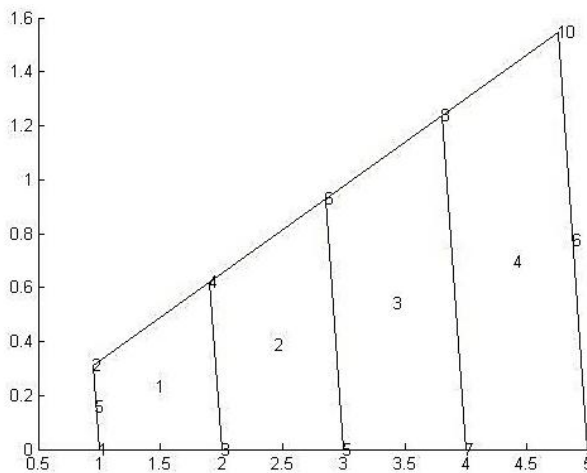


Figure 5.2.a : Maillage d'un segment de disque avec quatre éléments quadrilatères Avec R= 5 et $\alpha=\pi/10$

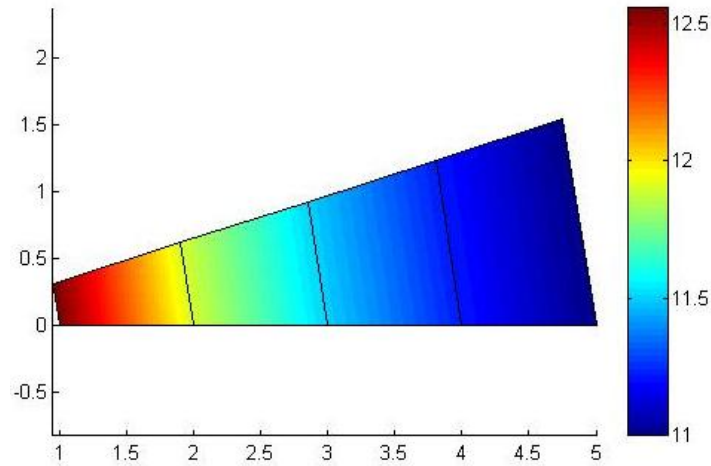


Figure 5.2.b : Diffusion de la température d'un secteur de disque Avec $R= 5$ et $\alpha=\pi/10$

La comparaison sous format numérique est donnée dans le tableau suivant :

Rayon R	T_{Q4}	T_{exacte}	erreur
1	12,60943791	12,48334353	0,01
2	11,91629073	11,79712782	0,01
3	11,51082562	11,39571737	0,01
4	11,22314355	11,11091212	0,01
5	11	11	0

Tableaux 5.2 : La comparaison numérique Avec $R= 5$ et $\alpha=\pi/10$

Cas 01-c : $R=5$ et $\alpha = \frac{\pi}{50}$ avec : $k_x = k_y = k$ (matériau isotrope)

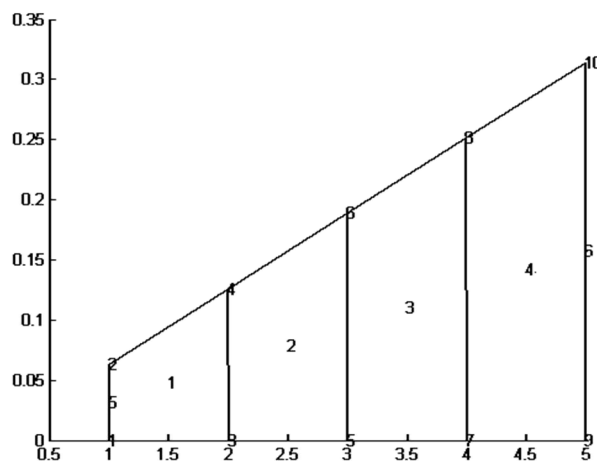


Figure 5.3.a : Maillage d'un segment de disque avec quatre éléments quadrilatères
Avec $R= 5$ et $\alpha=\pi/50$

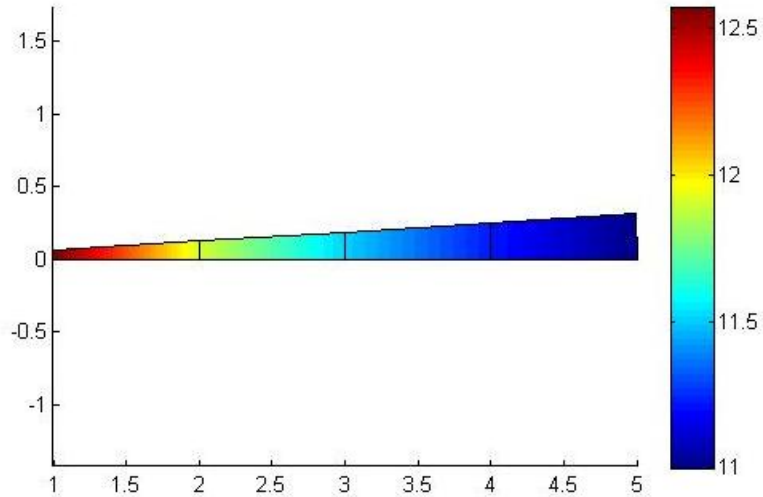


Figure 5.3.b : Diffusion de la température d'un secteur de disque Avec R= 5 et $\alpha=\pi/50$

La comparaison sous format numérique est donnée dans le tableau suivant :

Rayon R	T _{Q4}	T _{exacte}	erreur
1	12,60943791	12,48334353	0,01
2	11,91629073	11,79712782	0,01
3	11,51082562	11,39571737	0,01
4	11,22314355	11,11091212	0,01
5	11	11	0

Tableaux 5.3 : La comparaison numérique Avec R= 5 et $\alpha=\pi/50$

Cas 01-d : R=7.5 et $\alpha = \frac{\pi}{30}$ avec : $k_x = k_y = k$ (matériau isotrope)

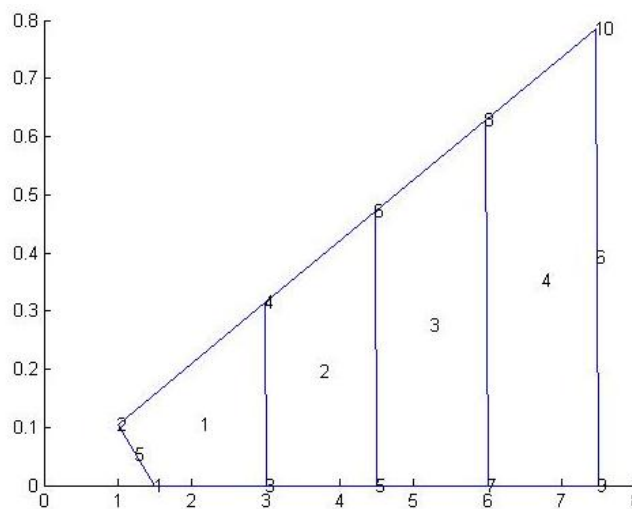


Figure 5.4.a : Maillage d'un segment de disque avec quatre éléments quadrilatères

Avec R= 7.5 et $\alpha=\pi/30$

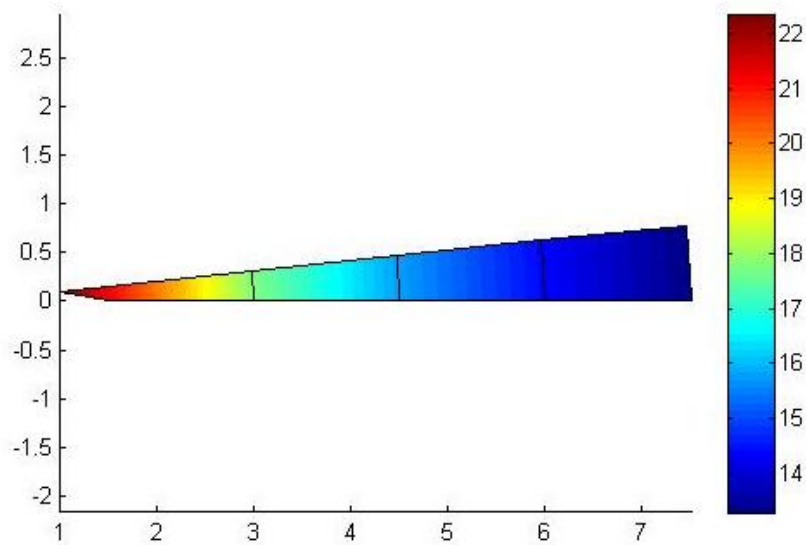


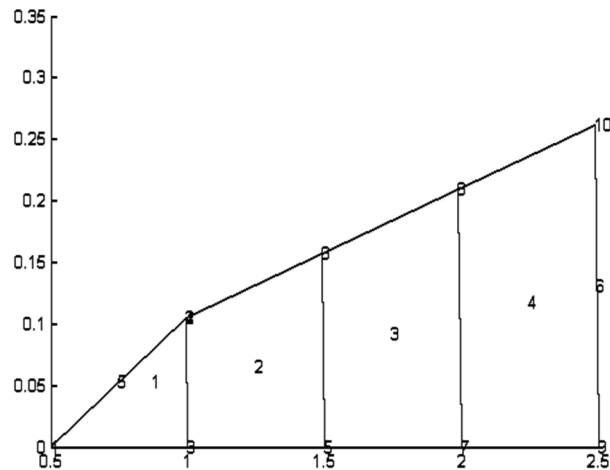
Figure 5.4.b : Diffusion de la température d'un secteur de disque Avec $R= 7.5$ et $\alpha=\pi/30$

La comparaison sous format numérique est donnée dans le tableau suivant :

Rayon R	T_{Q4}	T_{exacte}	erreur
1	22	21,78	0,01
2	20,6137056	20,4075686	0,01
3	16,8027754	16,6347477	0,01
4	14,2274113	14,0851372	0,01
5	12,5811242	12,4553129	0,01

Tableaux 5.4: La comparaison numérique Avec $R= 7.5$ et $\alpha=\pi/30$

Cas 01-e : $R=2.5$ et $\alpha = \frac{\pi}{30}$ avec : $k_x = k_y = k$ (matériau isotrope)



**Figure 5.5.a : Maillage d'un segment de disque avec quatre éléments quadrilatères
Avec $R= 2.5$ et $\alpha=\pi/30$**

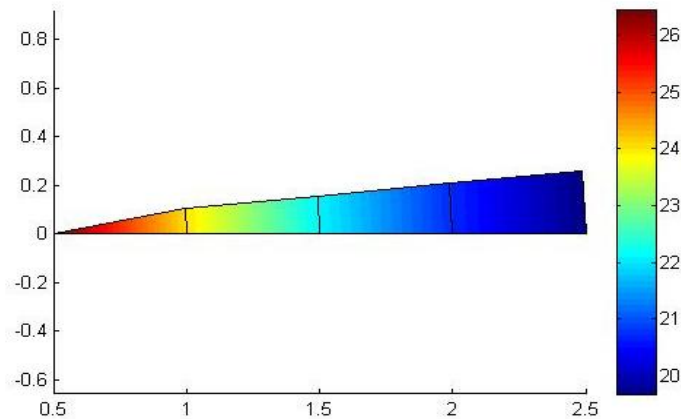


Figure 5.5.b : Diffusion de la température d'un secteur de disque Avec $R= 2.5$ et $\alpha=\pi/30$

La comparaison sous format numérique est donnée dans le tableau suivant :

Rayon R	T_{Q4}	T_{exacte}	erreur
1	26	25,74	0,01
2	24,6137056	24,3675686	0,01
3	23,8027754	23,5647477	0,01
4	23,2274113	22,9951372	0,01
5	21,7811242	21,5633129	0,01

Tableaux 5.5 : La comparaison numérique Avec $R= 2.5$ et $\alpha=\pi/30$

5.3.2 étude la diffusion de la chaleur dans un domaine rectangulaire :

L'exemple suivant présente un domaine rectangulaire, le maillage fait pas des éléments quadrilatères à 4 nœuds :

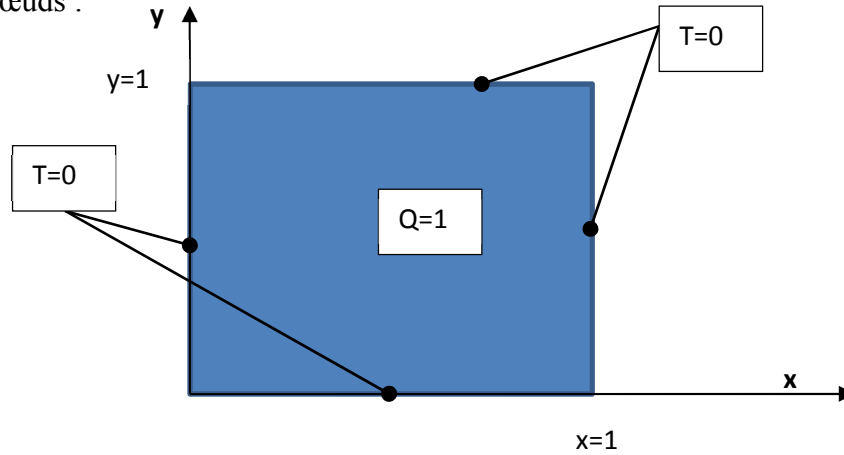


Figure 5.6 : La géométrie du domaine et les conditions aux limites

La géométrie du domaine et les conditions aux limites sont montrées dans la figure précédente, nous informons que ce problème est soumis à une source de chaleur Q=1 ; la solution analytique est donnée par l'expression suivante :

$$T_{exacte} = 0.25 * \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

Cas 02-a: Avec $k_x = k_y = k$ (matériau isotrope), n=5

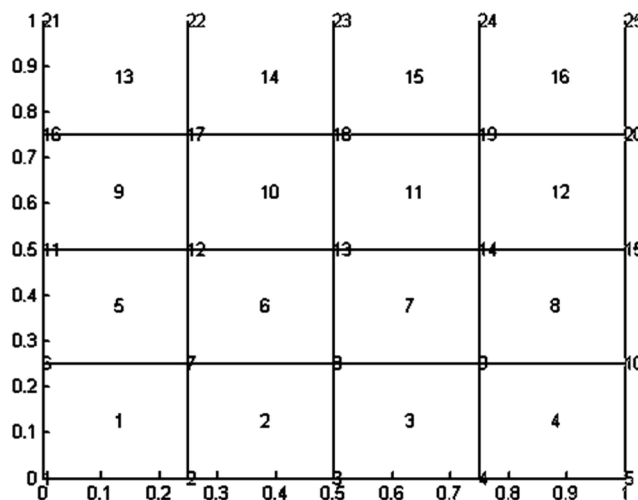


Figure 5.7.a : Description du maillage du domaine par 4x4 Q4

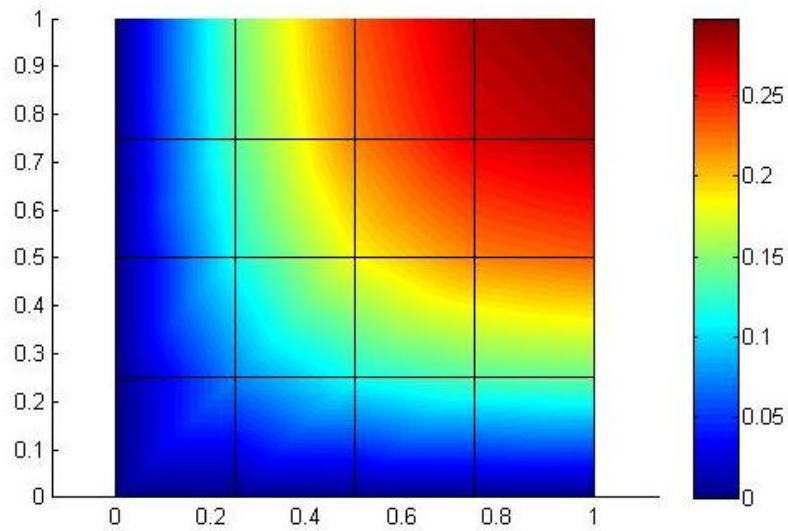


Figure 5.7.b: Distribution de la température du domaine par 4x4 Q4

Cas 02-b: Avec $k_x = k_y = k$ (matériau isotrope), $n=10$

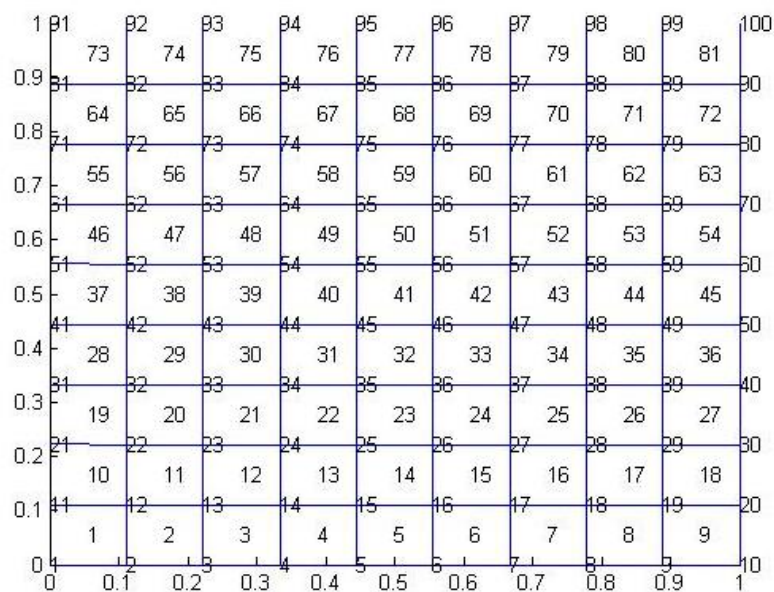


Figure 5.8.a : Description du maillage du domaine par 9x9 Q4

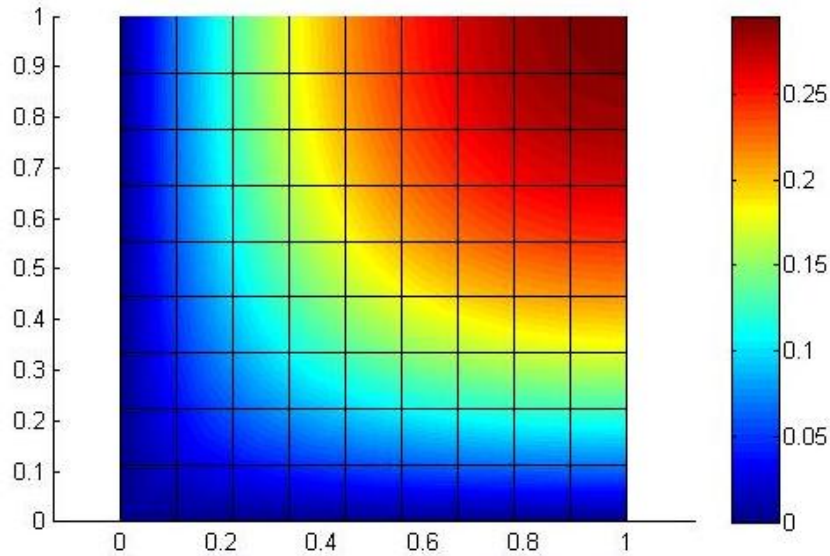


Figure 5.8.b : Distribution de la température du domaine par 9x9 Q4

Cas 02-v: Avec $k_x = k_y = k$ (matériau isotrope), $n=20$

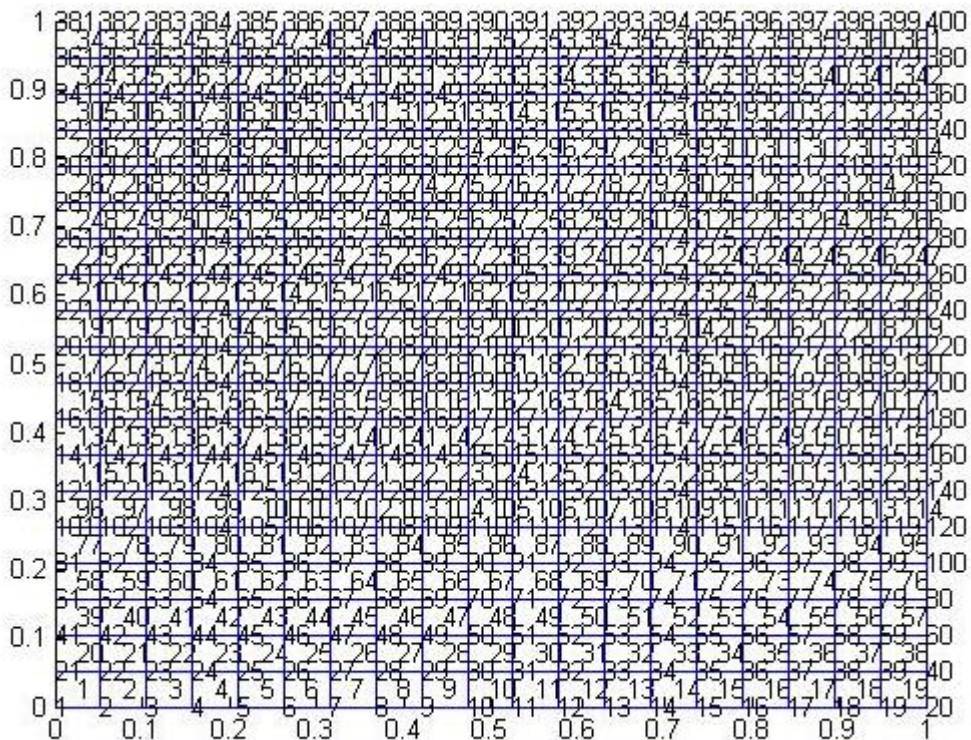


Figure 5.9.a : Description du maillage du domaine par 19x19 Q4

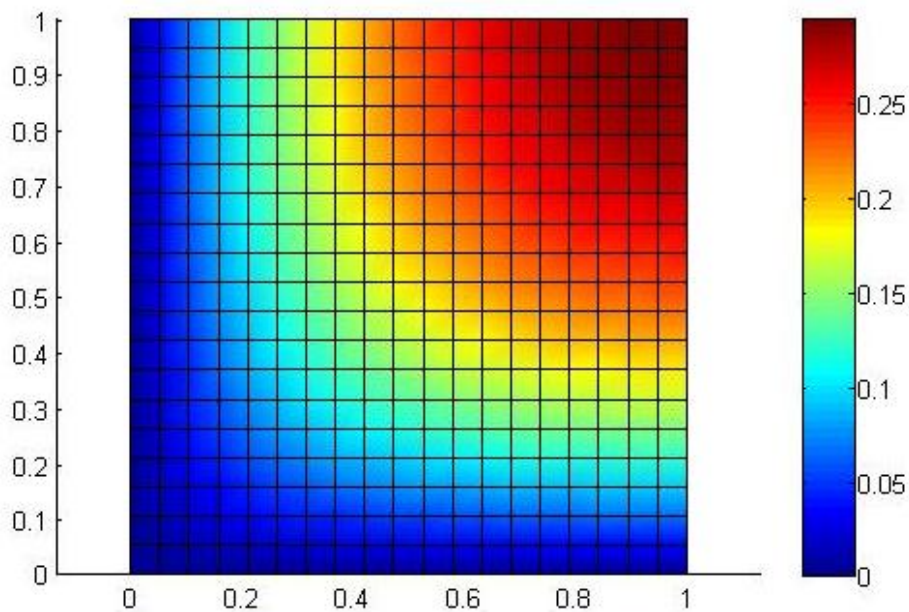


Figure 5.9.b : Distribution de la température du domaine par 19x19 Q4

Les résultats indiqués sur ces figures suscitent les commentaires suivants :

- Nous montrons dans ce cas-là, le maillage en fonction de nombre des éléments par cotés donne même résultats pour toutes discrétisations ainsi que tous ces résultats sont proches à la solution exacte du problème traité, ça présente la performance de notre formulation en élément fini quadrilatère en coordonnées naturelles.

5.3.3 Etude de l'effet de la conductivité thermique sur la diffusion de la température

Nous adoptons les données de l'exemple précédent, mais nous faisons la variation des caractéristiques matérielles et l'étude de leur effet sur la diffusion thermique.

Matériau	$k(Wm^{-1}K^{-1})$
Plâtre	0.48
Cuivre	386

Tableaux 5.6 : La Conductivité thermique choisis dans cette étude

a) Plâtre : $k = 0.48$

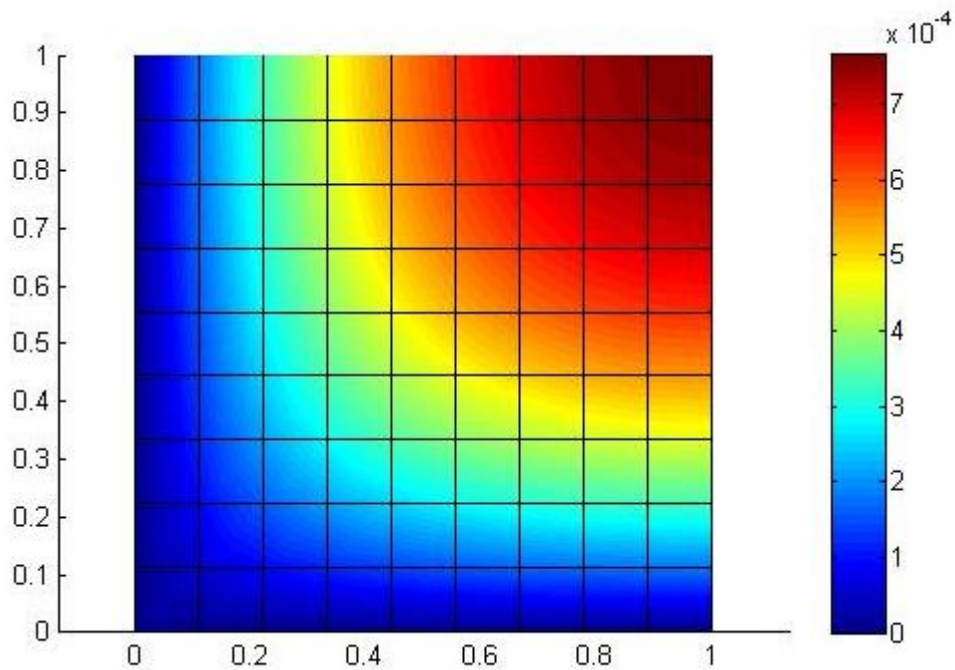


Figure 5.10 : Distribution de la température dans domaine en plâtre par 9x9 Q4

b) Le Cuivre : $k = 386$

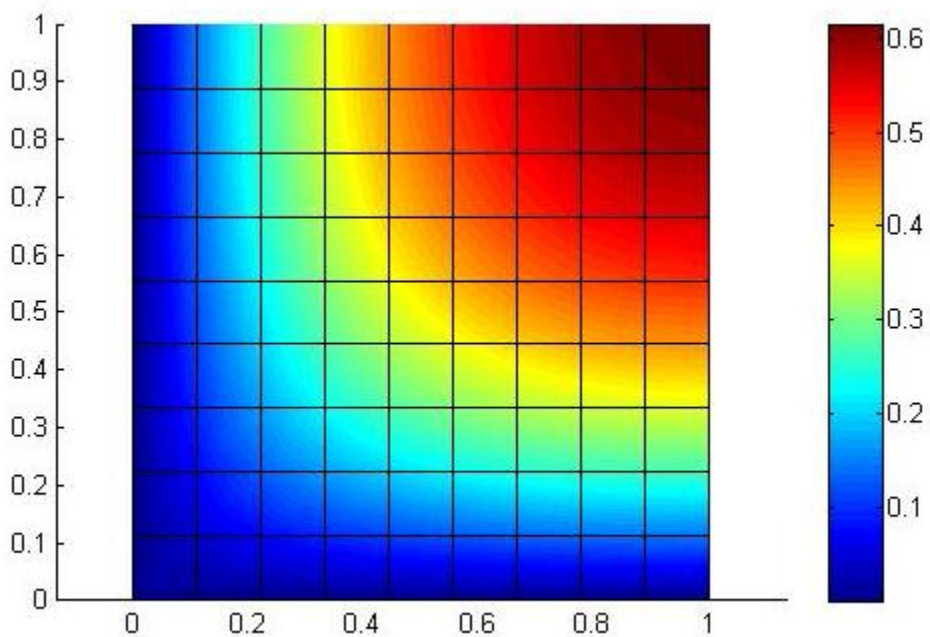


Figure 5.11 : Distribution de la température dans domaine en cuivre par 9x9 Q4

D'autre part de ce test, nous avons aussi présenté l'influence de la conductivité thermique sur la distribution de la température dans un domaine rectangulaire, il est clair d'après la nature de ces matériaux : le plâtre est un matériau céramique qui possède une conductivité thermique faible ($T_{\max}=7.8 \cdot 10^{-4} \text{ C}^\circ$) tandis que le cuivre est un matériau métallique qui possède une conductivité thermique élevée ($T_{\max}=0.66 \text{ C}^\circ$) :

En plus, la performance de notre modèle est bien marquée dans cet exemple.

C *onclusion générale & perspective*

Dans ce travail nous avons abordé les deux aspects principaux de la méthode des éléments finis qui sont la formulation théorique du problème traité et la mise en œuvre d'un code de calcul sur Matlab basé sur cet élément. Nous développons une formulation d'un élément fini quadrilatère à quatre nœuds dit "*Q4 thermique*" dont l'interpolation du champ de température est linéaire dans ces cotés. Ce dernier aspect est introduit à la formulation de l'élément par l'intermédiaire d'une formulation variationnelle basée sur les résidus pondérés. Les procédés de cette formulation résulte un code de calcul programmé sous l'environnement du Matlab en respectant les démarches de programmation de la méthode des éléments finis de disposer en fin de compte d'un outil simple dans sa mise au point et efficace dans son utilisation. En effet La comparaison des résultats obtenus par l'élément quadrilatère qui incorpore une formulation dans leurs coordonnées naturelles avec les résultats analytiques tirés de la littérature pour l'analyse de la diffusion de la température dans un domaine rectangulaire nous a permis de conclure que cet élément est remarquablement performant.. Il Possède cette capacité notable par rapport aux éléments classiques basant sur les coordonnées paramétriques, le champ de température interpolé dans le plan est parabolique linéaire, idem pour la géométrie du domaine.

La deuxième partie de ce travail concerne une étude paramétrique de l'élément quadrilatéral en variant quelques paramètres matériels ou géométriques, le but souligné est de présenter la performance de notre formulation en éléments finis.

En conclusion ce travail a permis de mettre en évidence la bonne performance de l'élément quadrilatéral associé à un élément quadrilatère formulé dans leurs coordonnées naturelles en plan avec une interpolation linéaire du champ de température et la géométrie, l'ensemble des avantages que nous avons cité dans les conclusions du Chapitre 5, nous conduit à déduire que c'est un élément simple efficace et fiable est constitué un grand intérêt pour l'analyse de la diffusion de la température par conduction à travers un domaine rectangulaire.

Recommandations pour des travaux futurs :

Le travail que nous avons présenté dans le cadre de notre étude, nous a permis de nous familiariser avec le domaine du développement théorique et numérique du transfert thermique. Nous le considérons comme une base pour un futur développement dans le domaine thermique, et

Conclusions générale & perspective

dans ce contexte l'action à mener pour une continuation et une amélioration de ce travail peut ce résumé dans les points suivants :

- Étendre cette étude à la formulation combinée en éléments finis ou d'autres procédures numériques, car ces méthodes nous offrent un outil d'analyse très puissant pour les différentes simulations des problèmes de l'ingénieur.
- Nous pouvons considérer les résultats obtenus par la présente étude comme une référence à titre de comparaisons avec les autres solutions analytiques ou numériques
- Adaptation de la présente formulation à étudier les domaines de forme géométrique complexes ou annulaires sectorielles.
- Effectuer une formulation numérique basée l'analyse non linéaire thermique (Non-linéarité due aux conditions limites ou/et matérielle) et l'analyse linéaire dynamique en régime transitoire.
- Étudier d'autres cas d'analyse analytique tels que le flambement thermique et le couplage thermomécanique

Enfin, nous attribuons notre modeste travail intitulé «Simulation numérique des transferts thermiques par la méthode des éléments finis» dans l'actualité de la recherche scientifique dans le domaine des transferts thermiques soutenu par notre centre universitaire.

- [1] Editeur Cemagref ; Protection des forêts contre l'incendie : fiches techniques pour les pays du bassin méditerranéen , Pierre-Yves Colin, (2001).
- [2] Editeur PPUR ;TRANSFERTS THERMIQUES , ANA-MARIA BIANCHI, YVES FAUTRELLE, JAQUELINE ETAY, (2004).
- [3] Editeur Cepadues ; Trensfert de chaleur , André Givannini & Benoit Bédât , (2012).
- [4] Editeur Edilivre ;Transferts thermiques ,Yves Jannot & Christian Moyne , (2009).
- [5] Éditeur Dunod ; INTRODUCTION AUX TRANSFERTS THERMIQUES, Jean-Luc Battaglia , Andrzej Kusiak , Jean-Rodolphe Puiggali , (2010)
- [6] Éditeur :IUT. Institut universitaire de technologie du Mans. France ; Méthode des éléments finis : thermique ,Yves Debard , (2002).
- [7] Modélisation du transfert de chaleur lors de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'une paroi poreuse ,Mémoire de Magister SASSANE Nadjette ,Présenté à l'Université , Skikda (2008).
- [8] Simulation numérique de la convection naturelle et mixte dans une cavité carrée avec la présence d'un élément de climatisation, BENACHOUR EL HADJ, Faculté des Sciences et Technologie Université de Béchar (2010) .
- [9] Approche Variationnelle Pour La Méthode Des Eléments Finis , F. Hecht. Université Pierre et Marie Curie (1992)
- [10] La méthode des éléments finis iso-paramétriques , Mickael ABBAS (2011) .
- [11] Éditeur Springer-verlag France paris ;Introduction aux méthodes numériques Deuxième édition : Franck Jedrzejewski, (2001).
- [12] Éditeur paris et les presse de l'université Laval Québec ; Une présentation de la méthode des éléments finis : GOURI DHATT ,GILBERT TOUZOT (1981).

Avant Propos :

