

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE « SALHI AHMED » DE NAAMA



INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE TECHNOLOGIE

Spécialité : Génie Mécanique

Mémoire de master

Option : Energétique

Intitulé de mémoire

**Une méthode numérique de volume fini pour résoudre la conduction 2D
dans une plaque rectangulaire en utilisant MATLAB**

Présenté par :

BENOUAZ Khawla.

ABBAD Houda.

Soutenu publiquement le : 27/05/2018, devant le jury :

| | | | |
|---------------------------|------------|-----------------|------------------|
| M. NAIMA Khatir | MCB | CU NAAMA | Président |
| M. KAID Nouredine | MCB | CU NAAMA | Encadreur |
| M.BENAMEUR Benamer | MAA | CU NAAMA | Examineur |

Année universitaire 2017-2018

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

**" Certes, il y'a des travaux pénibles,
mais, la joie de la réussite n'a-t-elle
pas à compenser nos douleurs ? "**

Jean de la bruyère

Dédicace

Tous les mots ne sauraient exprimés la gratitude, l'amour, le respect et la reconnaissance, c'est tous simplement que Je dédie cette mémoire de master à :

Ma tendre Mère MALIKA : Tu représentes pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager.

Mon très cher Père MOSTAPHA : Aucune dédicace ne saurait exprimée l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous.

Mes chers frères : Imad Eddine, Mohammed Youcef.

Mes chères sœurs : Afaf, Oumelkhir, son mari Djaafar et leur fille Fatima Zohra, Hadjer, son mari Kamel et leur fille Rahaf Oumaima.

Mes grandes mères et Mes grands pères.

Mes oncles paternels : Mohammed, Abdellatif, Abderrahim et Sehlaouia.

Mes oncles maternels : Omar, Abed, Mohammed, Mahmoud, Fatiha Et Asmaa.

Mes chères cousines.

Ma chère cousine : Zineb

Mon cher binôme : Houda

Mes chères amies : sara, Imene, Amina, Wassila, Rafika, Abir Mouna, Fawzya, Souaad, Latifa et Ikram.

Je n'oublie pas mes remerciements spéciaux aux monsieur BENDOUDA Abdelghani.

Tous mes enseignants depuis mes premières années d'études.

Toute la famille BENOUAZ. BENKOUCHANI.

Tous mes chers et j'ai omis de citer.

Khawla

Dédicace

Je dédie cette thèse de Master a :

A ma très chère mère « FATIMA ».

A mon très cher père « MOHAMMED ».

A mes sœurs : AICHA, KAMILA, MARWA NOURHANE.

A ma sœur KARIMA son mari BOUTKHIL et leur filles.

A ma sœur HALIMA son mari ABDELJHAMID et leur filles.

A mes grandes mères et mes grands pères.

Mes oncles paternels et maternels.

Mon cher binôme : KHAWLA.

A tous les membres de ma famille ABBAD et MEZANDI petites et grands.

A tous mes enseignants.

A toute personne, ayant participé de près ou de loin à la réalisation de mémoire.

Houda

Remerciements

Nous remercions Dieu, le Tout Puissant, le Miséricordieux, qui nous a donné l'opportunité de mener à bien ce travail.

C'est avec un grand plaisir que, nous adressons nos sincères remerciements à notre encadreur, Monsieur **KAID NOUREDDINE**, qui n'a ménagé aucun effort pour la bonne réussite de ce travail.

Nos vifs remerciements s'adressent à **M.NAIMA Khatir**, d'avoir accepté la présidence du jury. Mes remerciements s'adressent également aux membres de jury **M.BENAMEUR Benamer** pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter de participer au jury.

Nous exprimons toute notre gratitude à M. **FIZAZI Ahmed** et M. **SAHRAOUI Khalwati**.

Nous réservons une pensée spéciale à tous les enseignants du département des sciences et technologie qui ont su nous donner une formation didactique et appréciable durant toutes les années universitaires

A tous les étudiants et les étudiantes de notre promotion Energétique **2017/2018**.

Nous ne terminons pas sans avoir exprimé des remerciements envers toutes les Personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Khawla, Houda

Tables des Matières

Didicaces

Remerciements

Tables des Matières iv

Liste des Figures viii

Liste des tableaux x

NOMENCLATURE xi

Introduction général 2

I. Chapitre I. Recherche bibliographique 4

I.1 Introduction : 4

I.2 Bilan des études antérieures : 4

I.3 L'objectif de notre étude : 10

II. Chapitre II. Généralité sur les modes de transfert de chaleur..... 13

II.1 Introduction : 13

II.2 Notions de base : 13

II.2.1 La température : 13

II.2.2 La chaleur : 14

II.2.3 Le flux de chaleur : 14

II.2.4 La densité de flux thermique : 14

II.2.5 Gradient de température : 14

II.2.6 La puissance : 15

II.3 Les modes de transfert de chaleur : 15

II.3.1 La convection : 15

II.3.1.1 Définition : 15

II.3.1.2 Types de convection : 15

II.3.1.3 Calcul du coefficient d'échange par convection h: 16

| | | |
|-------------|---|-----------|
| II.3.1.4 | Applications : | 18 |
| II.3.2 | Le rayonnement: | 18 |
| II.3.2.1 | Définition : | 18 |
| II.3.2.2 | Loi fondamentale du rayonnement thermique : | 19 |
| II.3.2.3 | Structure du rayonnement : | 19 |
| II.3.2.4 | Spectre du rayonnement : | 19 |
| II.3.2.5 | Les grandeurs énergétiques de rayonnement : | 20 |
| II.3.2.6 | Applications : | 21 |
| II.3.3 | La conduction : | 21 |
| II.3.3.1 | Définition : | 21 |
| II.3.3.2 | Loi de FOURIER : | 22 |
| II.3.3.3 | Applications : | 23 |
| II.4 | Conclusion : | 23 |
| III. | Généralités sur les méthodes de résolution | 25 |
| III.1 | Introduction : | 25 |
| III.2 | Les trois grandes familles de méthodes: | 25 |
| III.2.1 | Éléments finis (EF) : | 25 |
| III.2.1.1 | Définition : | 25 |
| III.2.1.2 | Principes généraux : | 26 |
| III.2.2 | Maillage élément finis : | 26 |
| III.2.3 | Différences finies(DF) : | 27 |
| III.2.3.1 | Définition : | 27 |
| III.2.3.2 | Principe : | 27 |
| III.2.3.3 | Développement limité : | 28 |
| III.2.3.4 | Résolution de l'équation de la chaleur par différence finis : | 28 |
| III.2.4 | Volumes finis (VF) : | 30 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| III.2.4.1 | Définition : | 30 |
| III.2.4.2 | Principe | 31 |
| III.2.4.3 | Notion de maillage : | 31 |
| III.3 | Conclusion : | 35 |
| IV. | Chapitre IV. Modèle d'équation gouvernante..... | 37 |
| IV.1 | Introduction : | 37 |
| IV.2 | Modélisation d'équation de chaleur : | 37 |
| IV.3 | La discrétisation..... | 37 |
| IV.3.1 | Equation gouvernante:..... | 37 |
| IV.3.1.1 | Le premier cas : | 37 |
| IV.3.1.2 | Le deuxième cas : | 41 |
| IV.3.1.3 | Le troisième cas : | 44 |
| IV.4 | Organigramme de code MATLAB : | 49 |
| IV.5 | Conclusion : | 50 |
| V. | Chapitre V. Résultats et interprétations | 52 |
| V.1 | Introduction : | 52 |
| V.2 | Test de maillage : | 52 |
| V.2.1 | Discussions : | 54 |
| V.1 | Initialisation des données : | 54 |
| V.2 | Validation de nos résultats:..... | 54 |
| V.2.1 | Par TDMA..... | 54 |
| V.2.1.1 | Premier cas..... | 54 |
| V.2.1.2 | Deuxième cas | 59 |
| V.2.1.3 | Troisième cas | 64 |
| V.2.2 | Les méthodes de résolution de la matrice | 69 |
| V.2.2.1 | Discussions | 70 |

| | | |
|---------|--|-----------|
| V.3 | Tableau de comparaison des itérations entre les quatre méthodes..... | 70 |
| V.3.1.1 | Discussions | 70 |
| V.4 | Conclusion : | 70 |
| | Conclusion générale | 72 |
| | Références bibliographiques | 74 |
| | Annexes | 79 |

Liste des Figures

| | |
|---|----|
| Figure 1. Schéma de transfert de chaleur par les trois modes..... | 13 |
| Figure 2. Schéma de transfert de chaleur par convection..... | 15 |
| Figure 3.Principe physique de la convection naturelle..... | 16 |
| Figure 4.Schéma de transfert de chaleur par rayonnement..... | 18 |
| Figure 5.Classification du rayonnement en fonction de la longueur d'onde..... | 20 |
| Figure 6.Conduction dans une couche élémentaire de mur plan..... | 21 |
| Figure 7.Schématisation du mur multicouche..... | 22 |
| Figure 8.les formes possibles des éléments élémentaires en (2D)..... | 27 |
| Figure 9.les nœuds des différences finis du schéma explicite simple..... | 29 |
| Figure 10.les nœuds des différences finis du schéma implicite simple..... | 30 |
| Figure 11.Volume de contrôle typique pour une situation 2D..... | 31 |
| Figure 12.Volume de contrôle bidimensionnel..... | 32 |
| Figure 13.Volume de contrôle décalé vers la droite..... | 32 |
| Figure 14.Volume de contrôle décalé vers le haut..... | 32 |
| Figure 15.Les types des maillages..... | 33 |
| Figure 16.le domaine en volume de contrôles discrets..... | 33 |
| Figure 17.Volume de contrôle CL Dirichlet | 38 |
| Figure 18.Volume de contrôle CL Neumann et Dirichlet | 41 |
| Figure 19.Volume de contrôle CL Neumann, Dirichlet et Robin | 44 |
| Figure 20.organigramme du programme..... | 49 |
| Figure 21.les courbes de test de maillage..... | 53 |
| Figure 22.La distribution et les isothermes de la température avec une condition aux limites Dirichlet ($n_x=4$ $n_y=5$) méthode TDMA..... | 55 |
| Figure 23.La distribution et les isothermes de la température avec une condition aux limites Dirichlet ($n_x=40$ $n_y=50$) méthode TDMA..... | 56 |

| | |
|---|----|
| Figure 24. La distribution et les isothermes de la température avec une condition aux limites Dirichlet ($n_x=80$ $n_y=100$) méthode TDMA | 57 |
| Figure 25. (a1, a2, b1, b2, c1 et c2) Représente La distribution de la température, le long des trois lignes : la médiane, au-dessus et en-dessous de la médiane par MATLAB et COMSOL | 58 |
| Figure 26. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet et Neumann ($n_x=4$ $n_y=5$) méthode TDMA | 60 |
| Figure 27. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet et Neumann ($n_x=40$ $n_y=50$) méthode TDMA | 61 |
| Figure 28. La Distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet et Neumann ($n_x=80$ $n_y=100$) méthode TDMA | 62 |
| Figure 29. (a1, a2, b1, b2, c1 et c2) représente La distribution de la température, le long des trois lignes : la médiane, au-dessus et en-dessous de la médiane par MATLAB et COMSOL | 63 |
| Figure 30. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet , Neumann et Robin ($n_x=4$ $n_y=5$) méthode TDMA | 65 |
| Figure 31. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet , Neumann et Robin ($n_x=40$ $n_y=50$) méthode TDMA | 66 |
| Figure 32. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet , Neumann et Robin ($n_x=80$ $n_y=100$) méthode TDMA | 67 |
| Figure 33. (a1, a2, b1, b2, c1 et c2) Représente La distribution de la température, le long des trois lignes : la médiane, au-dessus et en-dessous de la médiane par MATLAB et COMSOL | 68 |
| Figure 34. Les isothermes de la température avec une condition aux limites Dirichlet par les quatre méthodes..... | 69 |

Liste des tableaux

| | |
|--|----|
| Tableau 1. Les résultats de cinq nœuds..... | 35 |
| Tableau 2. Test de maillage..... | 52 |
| Tableau 3. Initialisation des données | 54 |
| Tableau 4. Comparaison des itérations entres les quatre méthodes | 70 |

NOMENCLATURE

A- Liste des symboles latins :

| Symboles | Désignations | Unités |
|----------|---|----------------------|
| T | Température dimensionnelle | $[K]$ |
| A | Surface de l'objet | $[m^2]$ |
| C_p | Chaleur spécifique à pression constante | $[J.kg^{-1}.K^{-1}]$ |
| Q | La quantité de chaleur | $[W]$ |
| t | Temps | $[s]$ |
| k | Conductivité thermique | $[W.m^{-1}.K^{-1}]$ |
| h | Coefficient de convection | $[W.m^{-2}.K^{-1}]$ |
| g | Accélération de la pesanteur | $[m/s^2]$ |
| U | Tension électrique | $[V]$ |
| I | Intensité électrique | $[A]$ |
| R | Résistance électrique | $[\Omega]$ |
| R_t | Résistance thermique | $[KW^{-1}]$ |
| D | Dimension caractéristique de la surface d'échange | $[m]$ |
| U_m | Vitesse moyenne du fluide | $[m.s^{-1}]$ |
| x, y | Coordonnées cartésiennes du système | $[m]$ |
| H | hauteur de la plaque | $[m]$ |

| | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|--|
| L | longueur de la plaque | [m] |
| e | Épaisseur de l'objet | [m] |
| C | vitesse de la lumière dans le vide | [m.s ⁻¹] |
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | Dérivée partielle | [-] |
| $\frac{d}{dx}$ | Dérivée totale | [-] |
| \vec{n} | Vecteur unitaire | [-] |
| dS | surface élémentaire | [m] |
| L | Luminance énergétique globale | [w . m ⁻² sr ⁻¹] |
| L_λ | Luminance énergétique monochromatique | [w . m ⁻² sr ⁻¹ .m ⁻¹] |
| M | Émittance énergétique monochromatique | [w . m ⁻² .m ⁻¹] |
| M_λ | Émittance énergétique globale | [w . m ⁻²] |
| gradT | gradient de température | [K . m ⁻¹] |
| diV | Divergence | [-] |
| [A] | Matrice | [-] |
| {U} | Vecteurs inconnues | [-] |
| {L} | Vecteur | [-] |

B- Liste des symboles grecs :

| Symboles | désignations | Unités |
|---------------|---|---|
| ΔT | Différence de température | [K] |
| Δx | Dimension d'un volume de contrôle dans la direction horizontale | [m] |
| Δy | Dimension d'un volume de contrôle dans la direction verticale | [m] |
| θ | Température adimensionnelle | [K] |
| λ | Longueur d'onde | [m] |
| θ_i | Température intérieur | [K] |
| θ_e | Température extérieur | [K] |
| Φ | Flux de chaleur | [W] |
| φ | Densité de flux de chaleur | [W / m ²] |
| ρ | Masse volumique | [kg . m ⁻³] |
| Σ | Contour | [-] |
| μ | Viscosité dynamique | [kg . m ⁻¹ . s ⁻¹] |
| ε | Facteur de forme entre les surfaces i et j | [-] |
| σ | Constante de STEFAN-BOLTZMAN | [W / m ² K ⁴] |
| Ω | Angle solide | [sr] |

C- Nombres Adimensionnelles

| Symboles | Désignations | Unités |
|-----------------|-------------------------|---------------|
| Gr | Nombre de Grashof | [-] |
| Ra | Nombre de Rayleigh | [-] |
| Nu | Nombre de Nusselt local | [-] |
| Pr | Nombre de Prandtl | [-] |
| Pe | Nombre de Péclet | [-] |

D- Indices Inférieurs

| Symboles | Désignations | Unités |
|-----------------|--|---------------|
| i, j | i ème et j ème composantes | [-] |
| P | Point au centre du volume fini | [-] |
| E | Point à l'est du point P | [-] |
| W | Point à l'ouest du point P | [-] |
| N | Point au nord du point P | [-] |
| S | Point au sud du point P | [-] |
| e | Face Est du volume de contrôle considéré | [-] |
| w | Face Ouest du volume de contrôle considéré | [-] |
| n | Face Nord du volume de contrôle considéré | [-] |
| s | Face Sud du volume de contrôle considéré | [-] |

E- Abréviations

| Abréviations | désignations |
|---------------------|--------------------------------------|
| MDF | Méthode des différences finis |
| MVF | Méthode des volumes finis |
| MEF | Méthode des éléments finis |
| EDP | Equations aux dérivées partielles |
| TDMA | Tridiagonal Matrix Algorithm |

Introduction générale

Introduction générale

Introduction général

Les trois grandes méthodes numériques utilisées dans les codes tridimensionnels sont les volumes finis, les différences finis et les éléments finis.

La méthode des volumes finis, utilisé par plusieurs code commerciale, et open source comme le logiciel ANSYS CFX, ANSYS Fluent, OpenFoam et d'autre, est largement décrite par **PATANKAR**, elle consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en une multitude de volumes de contrôle (cellules) puis d'effectuer des bilans (de masse, de quantité de mouvement ...) sur ces petits volumes. Pour cette raison, la formulation fait apparaitre des intégrales triples de volume.

Cette méthode est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, comme les autres méthodes numériques.

Dans le présent travail, nous étudions la méthode de volume fini pour résoudre la conduction 2D dans une plaque rectangulaire en utilisant le code de calcul **MATLAB**.

Pour atteindre ces objectifs, le travail présenté dans ce mémoire est organisé en cinq chapitres:

Après cette brève introduction, Nous abordons, dans :

Le premier chapitre : recherche bibliographique.

Une synthèse bibliographique a été présentée sur la résolution de l'équation gouvernante par les méthodes numériques.

Le second chapitre : généralités sur les modes de transfert de chaleur

Une idée brève sur les notions de base de transfert de chaleur et généralités sur les trois modes de transfert de chaleur.

Le troisième chapitre : généralités sur les méthodes de résolution

Un rappel sur les trois grandes familles de méthodes de résolution.

Le quatrième chapitre : model de l'équation gouvernante.

S'intéresse à la discrétisation numérique de l'équation gouvernante par la méthode des volumes finis.

Le cinquième chapitre : résultat et interprétation

C'est la partie la plus importante de ce mémoire, elle comporte la présentation de notre étude sur le code de calcul **MATLAB**, ainsi que l'interprétation et la validation des résultats obtenus.

Enfin, notre mémoire est clôturé par une conclusion générale.

Chapitre01:

Chapitre01:

Recherche bibliographique

I. Chapitre I. Recherche bibliographique

I.1 Introduction :

Il existe de nombreuses méthodes pour représenter les problèmes continus de façon discrète comme par exemple les approximations par différences finies, par éléments finis, ou par volumes finis.

Après cette préface, Nous exposons quelques travaux disponibles qui traitent la résolution des équations gouvernantes par les trois méthodes.

I.2 Bilan des études antérieures :

M.T. Manzari et M.T.Manzari 1999 [1], ont effectué une étude sur la résolution numérique d'équation hyperbolique de conduction de la chaleur par la méthode des éléments finis, le système d'équations est résolu pour les flux de température et de chaleur en tant que variables indépendantes.

La méthode Galerkin standard est utilisée pour la discrétisation spatiale et la méthode Crank-Nicolson est adoptée pour la marche dans le domaine temporel. Ils ont montré que la méthode proposée peut évaluer facilement la production d'entropie dans le domaine et estimer l'équilibre thermodynamique du système. La performance de l'algorithme proposé est vérifiée en résolvant un cas de test 1D et 2D, et certaines caractéristiques intéressantes de la conduction de la chaleur hyperbolique ont été démontrées.

A. Grine, J.Y.Desmons Et S.Harmand 2006 [2], ont mené une étude sur des modèles pour la conduction transitoire dans une plaque de protection soumise à un flux de chaleur variable, ils ont déterminé le développement de modèles analytiques pour l'identification de l'évolution de la distribution des températures dans une plaque par rapport au temps .

Des modèles analytiques décrivant la distribution de la température dans une plaque exposée à un flux de chaleur, la méthode de Green est utilisée pour le développement de ces modèles. Les résultats ont montré l'évolution de la température par rapport au nombre de Biot et de Fourier.

A. G.Hansen, M. P. Bendsoe Et O. Sigmund 2006[3], Ont effectué une étude sur l'utilisation de la méthode des volumes finis pour la résolution d'un problème d'optimisation topologique prototype, ils ont considéré un problème de diffusion de chaleur pour la résolution.

Ils ont utilisé l'application de la MVF aux problèmes avec des distributions de matériaux non homogènes, pour fournir une valeur unique pour la conductivité aux limites des éléments sont été utilisées les moyennes arithmétiques et harmoniques.

Ils ont observé que lors de l'utilisation de la moyenne harmonique, les damiers ne se forment pas pendant le processus d'optimisation de la topologie.

Ils ont montré que l'optimisation de la topologie est possible dans la méthode des volumes finis.

A.V. Itagi 2007 [4], a mené une étude sur la méthode de volume fini pour analyser le transport thermique dans des milieux en couches anisotropes en présence d'une source thermique volumétrique.

La méthode utilisée pour obtenir l'état stable ainsi que les profils de température transitoires est la méthode implicite Douglas-Gunn à direction alternée, la méthode utilisé résolut le problème dans le cadre de référence de la source et utilise une grille polaire non uniforme.

La méthode présente un excellent accord avec les résultats d'analyse.

A.Diószegi, Et All 2015[5], ont présenté une Modélisation et simulation de la conduction thermique en coordonnées sphériques polaires 1D à l'aide de la méthode des différences finies basées sur le volume de contrôle, ils ont utilisé la méthode CVFDM.

Un mélange de sable et de différents produits chimiques (liants) est utilisé comme matériau de moulage dans les procédés de coulée.

Les résultats de la simulation ont été validés par comparaison aux mesures de température dans des conditions de laboratoire lorsque le mélange de moules de sable a été chauffé en interagissant avec un alliage liquide, la méthode numérique indiqué est exacte et présente un potentiel important dans la simulation des processus de coulée.

G. Sachdeva, K.S. Kasana, Et R. Vasudevan 2010[6], ont mené une étude numérique d'un écoulement laminaire, incompressible et visqueux, dans des ailettes à forme triangulaire avec un générateur de vortex, ils ont utilisé trois angles d'attaque différents de l'aile pour réaliser cette étude, c'est-à-dire 15 °, 20 ° et 26°.

La méthode Marker and Cell (MAC) utilise pour obtenir les composantes de pression et de vitesse ainsi que la résolution de l'équation de Navier-Stokes.

Les résultats ont montré que l'utilisation d'un générateur de vortex à ailes rectangulaires à un angle d'attaque de 26° entraîne une augmentation d'environ 35% du nombre moyen de Nusselt moyen par rapport à l'échangeur thermique à ailettes triangulaire sans générateur de tourbillon.

S. Mazumder 2017[7], a effectué une étude comparative entre les solutions produite par les trois méthodes de résolution sur un repère monodimensionnel pour un problème de conduction, ils ont déterminé la précision de la température, l'exactitude du flux de chaleur et la satisfaction de la conservation de l'énergie mondiale.

Il a conclu les mêmes schémas de discrétisation pour les trois méthodes, la précision de la température produite est similaire pour différence finis et l'élément finis mais la méthode des volumes finis est un peu différente.

X. Xiaofeng Et X. Qiong 2012[8], ont mené une étude sur la résolution d'équation de la conduction bidimensionnelle par la méthode des volumes finis est réalisée par programmation MATLAB sur une plaque infinie d'épaisseur uniforme et de rectangle bidimensionnel.

L'équation algébrique discrétisée par la méthode des volumes finis, différents coefficients et termes sources ont été discutés dans différentes conditions limites, incluant le flux thermique prescrit, la température prescrite, la convection et l'isolation.

La faisabilité et la stabilité de la méthode numérique ont été démontrées par le résultat courant.

S. Murakami Et Y. Asako 2011 [9], Ont mené une étude sur des maillages quadrilatéraux déformés, résolu par la méthode de volume fini, la méthode discrétise le terme de conduction.

Dans cette méthode, il est possible de composer le maillage de calcul des éléments quadrilatéraux généraux, Les calculs de test montrent que la tendance de convergence de l'erreur numérique utilisant cette méthode avec le maillage déformé est la même que l'utilisation d'un schéma de différence centrale à deux nœuds sur un maillage rectangulaire à intervalle constant, l'erreur des résultats numériques par cette méthode est plus petite que l'utilisation de la méthode traditionnelle des éléments multilatéraux.

Les résultats montrent que la présente méthode avec le maillage déformé concorde bien avec la solution analytique et le résultat de REM avec un maillage rectangulaire.

B. Mondal Et S. C. Mishra 2008[10], ont effectué une étude sur la méthode Boltzmann en réseau (LBM) en conjonction avec la méthode du volume fini pour la solution de problèmes de radiations de conduction combinées avec la température ainsi que les conditions aux limites de flux, sur les géométries 1D et 2D.

Le LBM a été utilisé pour résoudre l'équation d'énergie, et en utilisant le MVF pour calculer l'information radiative requise dans l'équation d'énergie.

Dans la géométrie 1D, la limite sud est soumise à un flux de chaleur constant, et la géométrie 2D la limite sud et nord est à l'état de chaleur constante, les limites restantes sont à des températures prescrites.

Ils ont montré une mise en œuvre réussie de la LBM en conjonction avec la MVF à une classe plus générale de problèmes ayant des conditions de température et de flux.

W.Li, B.Yu, Et All 2012[11], Ont effectué une étude sur une nouvelle méthode des volumes finis pour les problèmes de conduction cylindrique, ils ont déterminé la différence entre la nouvelle méthode des volumes finis pour les problèmes de conduction cylindrique et les méthodes classiques de second ordre.

La nouvelle méthode est plus précise que les méthodes conventionnelles, On constate que cette méthode coûte moins de temps de calcul que celle des méthodes conventionnelles, même si l'expression discrétisée de cette méthode proposée est plus complexe que la méthode du volume fini central de second ordre.

Le résultat numérique montre que le temps total de la nouvelle méthode est inférieur aux méthodes conventionnelles pour atteindre le même niveau de précision.

P. Duda 2016 [12], a mené une étude pour résoudre des problèmes de conduction de chaleur transitoires par la formulation de la méthode des éléments finis dans les coordonnées polaires, ils ont montré comment appliquer les conditions aux limites les plus utilisées.

La méthode de Crank-Nicolson est utilisée pour la résolution de système globale, il a utilisé trois tests numériques différents pour réaliser cette étude, tous les exemples montrent le système de coordonnées polaires donne de meilleurs résultats que dans le système de coordonnées cartésiennes, même la formulation de la méthode des éléments finis dans les coordonnées polaires est précieuse.

Cette méthode permet de calculer la distribution de la température dans les corps de différentes propriétés dans la direction circonférentielle et la direction radiale.

Les testes démontrent une bonne précision et une stabilité de la proposition.

T. Ota 1973[13], a effectué une étude sur la conduction de la chaleur dans une plaque infinie avec un trou rectangulaire.

Les résultats ont montré que la distribution bidimensionnelle de flux de chaleur constante autour du trou rectangulaire dans la plaque, flux de chaleur au coin du rectangle est examinée et il est précisé que le flux de chaleur possède.

H. T.Kim, B. W. Rhee Et J. H. Park 2006[14], ont mené une étude sur les applications de la méthode des volumes finis a la conduction radial modèle du code CATHENA comme un exemple.

Ils ont utilisé le schéma numérique MEF pour le modèle de conduction radiale du code CATHENA est remplacé par MVF pour supprimer l'effet de la taille du maillage sur la prédiction de la température du carburant.

La méthode de volume fini est appliquée au modèle de conduction de paroi CATHENA pour éviter la taille du maillage sur la prévision de température du combustible, l'exactitude et la validité du modèle de volume fini dans le code CATHENA sont testées dans deux cas, un cas stable et un cas de conduction thermique transitoire.

Dans le cas stable ont montré une sur la surface limite et un taux uniforme de génération de chaleur interne, dans le cas de conduction thermique transitoire, un cylindre est initialement à une température uniforme et subitement sa surface limite est soumise à une convection avec un coefficient de transfert de chaleur constant dans une température ambiante à température constante, les solutions en régime permanent du modèle MVF donnent presque les mêmes résultats que les solutions analytiques.

R. Chaabane, F. Askri Et S. Ben Nasrallah 2011[15], ont effectué une étude sur l'évaluation des performances de la méthode de Boltzmann (LBM) et de la méthode des éléments finis de volume de contrôle (CVFEM).

Les effets sont étudiés sur les distributions de température, les flots de chaleur radiatifs et conducteurs, l'approche numérique est étendue pour traiter une combinaison pratique de conditions aux limites mixtes dans un problème de transfert de chaleur radiatif combiné

conducteur multidimensionnel transitoire dans une enceinte émettrice, absorbante, à diffusion anisotrope.

Les résultats du LBM en conjonction avec le CVFEM se sont avérés très bien comparer avec les résultats disponibles dans la littérature.

C. Luo, et all 2009[16], Ont mené une étude sur la modélisation du transfert de chaleur de la paroi à l'aide de modification de la fonction de transfert de conduction, volume fini et des méthodes d'analyse de Fourier complexe.

La méthode CTF ont été utilisée pour calculer les flux thermiques de la surface des murs en fonction des températures de surface des parois contrôlées en tant qu'intrants, la méthode du volume fini et la méthode matricielle ont également été utilisées pour les prédictions numériques, la méthode de la fonction de transfert de conduction et la méthode du volume fini ont été comparées aux mesures de longue période pour les matériaux monocouches ou multicouches avec et sans entrefers.

Les coefficients du CTF pour les méthodes CTF modifiées ont été totalisés et analysés pour tous les cas de calcul dans cette étude.

S. Han 2015[17], a effectué une étude sur l'application de la méthode des volumes finis pour la solution des équations de conduction hyperbolique en deux étapes

La méthode appliquée pour la conduction non-Fourier dans le sable de coulée, pour décrire la conduction thermique transitoire de courte durée à travers le sable de coulée lorsque deux porteurs d'énergie (sable et air) ne sont pas en équilibre thermique.

Les résultats numériques montrent un accord favorable avec les données expérimentales existantes.

S.Singh,et all 2007[18], ont présenté une étude sur la conduction de chaleur transitoire en coordonnées polaires avec plusieurs couches dans la direction radiale.

La méthode de séparation des variables est utilisée pour obtenir une distribution de température transitoire, sont supposées dans chaque couche des sources de chaleur volumétriques spatialement non-uniformes, mais indépendantes du temps, la solution proposée est également applicable à plusieurs couches avec un rayon interne nul. Un exemple de problème illustratif pour la région annulaire semi-circulaire à trois couches est résolu. Les résultats avec les isothermes sont présentés graphiquement et discutés.

J. Stefaniak Et J. Jankowski 1998[19], ont présenté une étude sur la solution approximative d'équation de conduction de chaleur avec condition de limite mélangée dans une plaque rectangulaire.

Ont utilisé la méthode approximative de résolution de problèmes linéaires de chaleur, la méthode est applicable à direct et inverse problèmes.

Problème direct, nous comprenons la solution de l'équation de la chaleur par la conduction avec condition de limite initiale donnée et éventuellement les intensités de source de la chaleur, un problème inverse consiste à trouver les intensités des sources de chaleur, lorsque la température du solide considéré est connue.

Evgrafov, M.M. Gregersen Et M.P. Sørensen 2011[20], ont mené une étude sur la convergence d'une discrétisation de la méthode de volume fini à base de cellule pour des problèmes de contrôle dans les coefficients de conduction.

Ils ont appliqué un problème de contrôle dans les coefficients d'une modélisation de l'équation de Laplace généralisée, par exemple.

Ils ont caractérisé les points limites des suites de solutions globales discrètes et deux types de points stationnaires, ainsi qu'ont mesuré la taille du maillage du volume fini converge vers zéro, Ils ont noté que cette étude est une première étape dans le sens de permettre des discrétisations de volume finies dans les problèmes de coefficients.

S. Han 2014[21], ont effectué une étude sur la solution de l'équation de la conduction hyperbolique 1D par la méthode de volume fini.

La formulation proposée est vérifiée par des solutions exactes pour un milieu homogène, puis appliquée à des matériaux composites ayant une conductivité différente.

La méthode proposée peut être facilement étendue à des milieux hétérogènes bidimensionnels avec des propriétés dépendantes de la température soumises à diverses conditions aux limites.

Les résultats montrent une pénétration d'onde et une réflexion bien distincte aux interfaces de matériaux.

I.3 L'objectif de notre étude :

L'objectif principal de notre mémoire est l'étude et la discrétisation de l'équation de la chaleur en 2D dans une plaque rectangulaire, en utilisant la méthode des volumes finis pour la

résolution avec un maillage structuré et des coordonnées cartésiennes, avec différents conditions aux limites, en utilisant le langage MATLAB comme outil de programmation.

Chapitre II:

Chapitre II:

Généralité sur les modes de transfert de chaleur

II. Chapitre II. Généralité sur les modes de transfert de chaleur

II.1 Introduction :

Le transfert de chaleur est défini par la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de températures.

Le transfert de chaleur reconnaît essentiellement trois modes de transmission: la convection, le rayonnement et la conduction. [22]

Chacun de ces modes étant lui-même lié à un processus physique bien déterminé, et sont régi par des lois bien spécifiques.

Dans ce chapitre, nous expliquons le mécanisme de trois modes de transfert de chaleur.

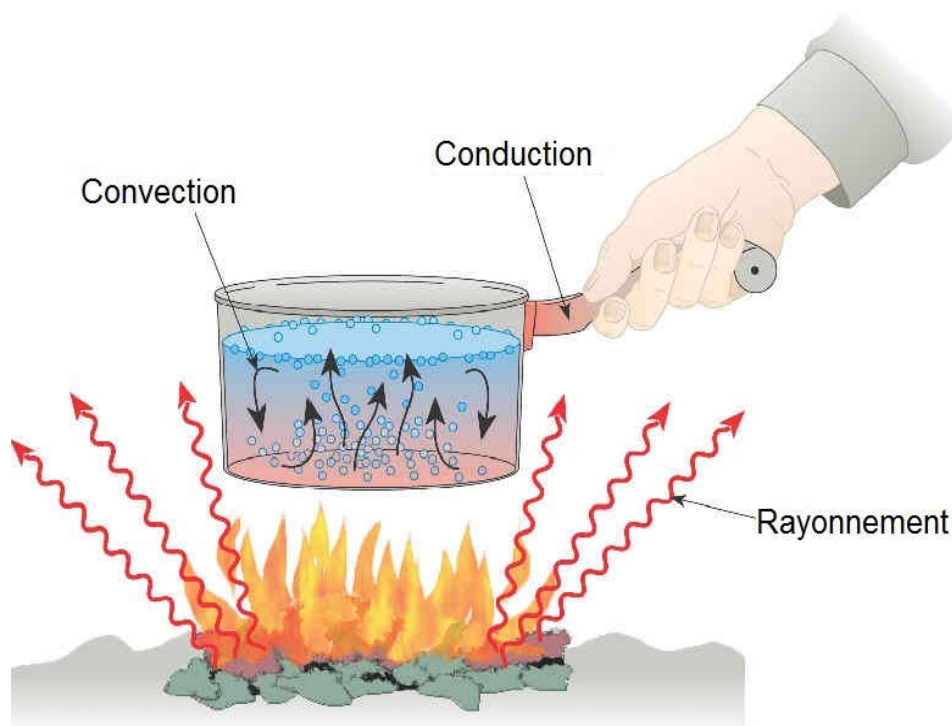


Figure 1. Schéma de transfert de chaleur par les trois modes.

II.2 Notions de base :

II.2.1 La température :

La température est une grandeur physique mesurée à l'aide d'un thermomètre.

La température dans le S.I est exprimés en °C (degrés Celsius), On rencontre la température dans la littérature en les degrés fahrenheit (°F) et les degrés kelvin (°K).

Conversion entre les différentes unités de températures

$$^{\circ}\text{K} = ^{\circ}\text{C} + 273$$

$$^{\circ}\text{C} = 5/9(^{\circ}\text{F} - 32) \quad [23]$$

II.2.2 La chaleur :

La chaleur est une forme d'énergie (énergie de mouvement des molécules) qui va d'un point chaud (température plus élevée) vers un point froid (température moins), La chaleur se mesure en watts (joule/seconde). [23]

II.2.3 Le flux de chaleur :

C'est la puissance échangée par la surface de la plaque, il est mesure en watts, il s'exprime :

$$\Phi = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} \quad (II.1)$$

Ou A est l'aire de la surface (m^2) [24]

II.2.4 La densité de flux thermique :

Comme la puissance échangée par une surface unité de la plaque, en watts par mètre carré. Elle s'exprime [24]:

$$\varphi = \frac{\Phi}{A} \quad (II.2)$$

II.2.5 Gradient de température :

Le gradient de température est le vecteur qui caractérise en un point donné la variation de la fonction température. \overrightarrow{gradT} Défini suivant les trois axes Ox, Oy et Oz par : [24]

$$\overrightarrow{gradT} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{array} \right.$$

II.2.6 La puissance :

Est le rapport de l'énergie fournie ou absorbée sur l'unité de temps. L'unité légale est le watt (W). [23]

II.3 Les modes de transfert de chaleur :

On distingue trois mécanismes d'échange de chaleur entre milieux matériels :

II.3.1 La convection :

II.3.1.1 Définition :

La convection est mode de transfert de chaleur quand accompagne un transfert de masse, ce mode se produit le plus souvent entre un fluide en mouvement et une paroi solide. Le phénomène de convection est un transfert du à des mouvements macroscopique. [25]

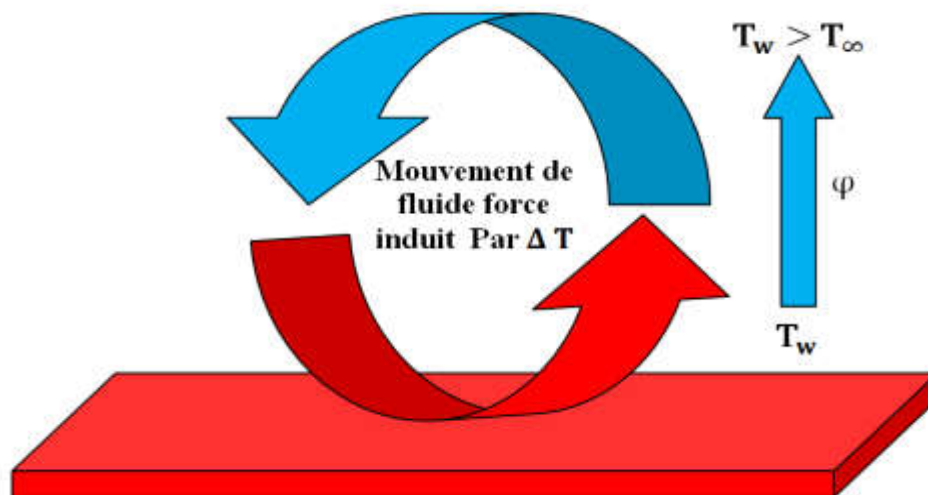


Figure 2. Schéma de transfert de chaleur par convection.

La convection est le mécanisme le plus important de transfert de chaleur entre une surface solide et un fluide. Deux types de convection sont généralement distingués :

II.3.1.2 Types de convection :

II.3.1.2.1 La convection libre ou naturelle :

La convection naturelle est causé par un champ de forces intérieur, dans ce phénomène le mouvement du fluide est crée par des différences de densité. Et des différences de températures existantes dans le fluide. Ces applications est : chauffage de maison, formation de courant océanique...etc. [22]

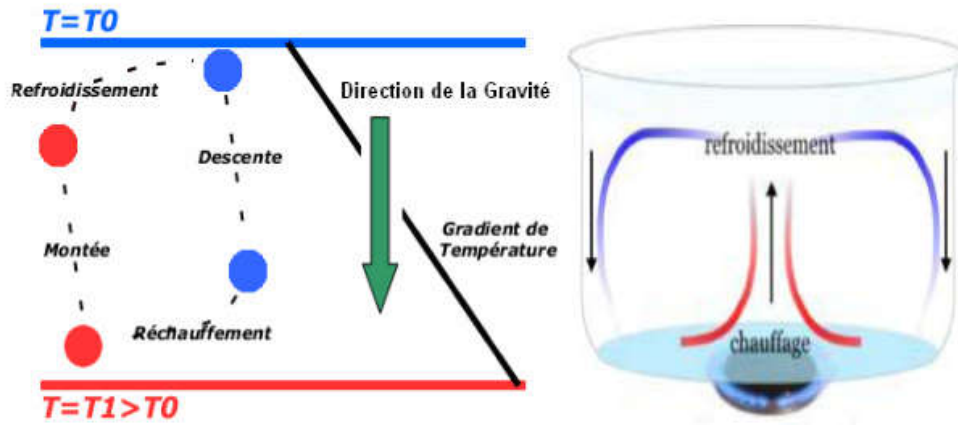


Figure 3. Principe physique de la convection naturelle

II.3.1.2.2 La convection forcée :

La convection forcée est et mis en mouvement par l'action d'un champ de forces externe (pompe, ventilateur...etc.).[25]

Exemple de convection forcée : un sèche-cheveux dans lequel l'air ambiant est soufflé par un ventilateur au travers d'une résistance chauffante électrique.

II.3.1.3 Calcul du coefficient d'échange par convection h:

II.3.1.3.1 Loi de Newton :

La loi de Newton exprime le flux moyen Φ échangé entre un solide et un fluide à travers leur surface de contact A [22] :

$$\Phi = hA(\theta_i - \theta_e) \quad (II.3)$$

h : Est appelée coefficient d'échange par convection. (w / m^2C°)

$(\theta_i - \theta_e)$: Différence de la température de la paroi et du fluide.

En convection forcée en l'absence de convection naturelle, le coefficient d'échange h par convection est indépendant de la différence de température de la paroi et du fluide mais il dépend des six grandeurs suivantes:

U_m : Vitesse moyenne du fluide

ρ : Masses volumiques du fluide

C_p : Chaleur spécifique du fluide

μ : Viscosité dynamique du fluide

λ : Conductivité thermique du fluide

D : Dimension caractéristique de la surface d'échange

A partir de ces grandeurs, on définit les nombres sans dimension :

II.3.1.3.2 Les nombres sans dimensions :

- Nombre de Nusselt :
$$N_u = \frac{hD}{\lambda}$$

N_u : le nombre de Nusselt caractérise l'échange thermique entre le fluide et la paroi.[26]

- Nombre de Reynolds :
$$R_e = \frac{\rho U_m D}{\mu}$$

R_e : Le nombre de Reynolds caractérise le régime d'écoulement du fluide

$R_e < 2000$: Ecoulement laminaire

$2000 < R_e < 3000$: Ecoulement intermédiaire

$R_e > 3000$: Ecoulement turbulent

- Nombre de Prandtl :
$$P_r = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

P_r : le nombre de Prandtl caractérise les propriétés thermiques du fluide

- Le nombre de Grashoff :

$$Gr = \frac{\beta g \rho^2 L^3 \Delta T}{\nu^2}$$

β : Coefficient de dilatation.

g : Accélération de la pesanteur.

ΔT : Différence de température caractéristique. [26]

Le coefficient d'échange par convection:
$$h = \frac{N_u \lambda}{D}$$

II.3.1.4 Applications :

Les applications du transfert de chaleur par convection sont beaucoup trop nombreuses pour que l'on puisse envisager de les citer toutes.

Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur.

La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud...[27]

II.3.2 Le rayonnement:

II.3.2.1 Définition :

Le rayonnement est le mécanisme par lequel la chaleur se transmet d'un milieu à haute température vers un autre à basse température lorsque ces milieux sont séparés dans l'espace. Ce mode de transfert ne nécessite pas de support matériel et peut donc s'effectuer dans le vide. En général, les sources de rayonnement sont des solides et le rayonnement se fait par la surface. [25]

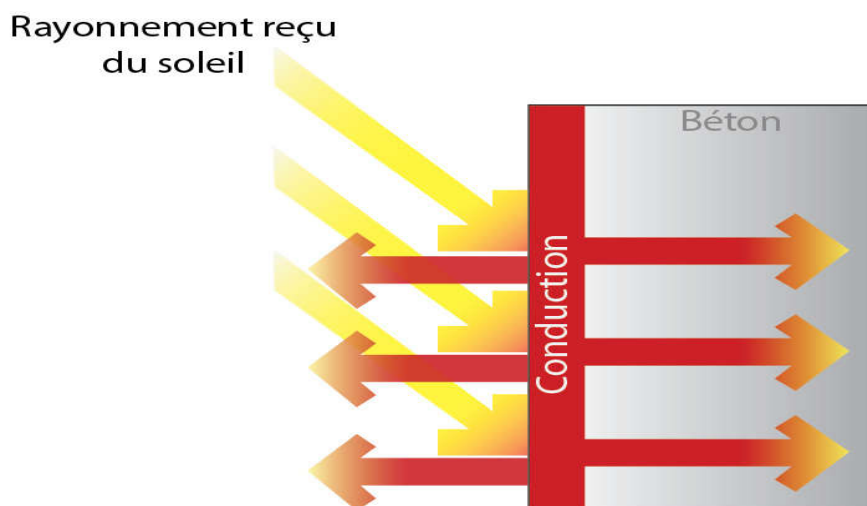


Figure 4. Schéma de transfert de chaleur par rayonnement

II.3.2.2 Loi fondamentale du rayonnement thermique :

La loi de **STEFAN-BOLTZMAN** exprime que le flux d'énergie radiante émise par une surface idéale est proportionnel à l'air de cette surface est à la quatrième puissance de la température absolue T de la surface [22].

$$\Phi = \varepsilon \sigma S T^4 \quad (II.4)$$

Ou :

Φ : Le flux thermique en watts.

S : La surface de l'objet en mètre carré.

ε : Facteur de forme entre les surfaces i et j .

T : La température en kelvins.

σ : Une constante appelée constante de loi de **STEFAN-BOLTZMAN** ($\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ K}^4$)

II.3.2.3 Structure du rayonnement :

Le rayonnement est un mode d'échange d'énergie par émission et absorption de radiations électromagnétiques. L'échange thermique par rayonnement se fait suivant le processus :

- **Emission** : Il y a conversion de l'énergie fournie à la source en énergie électromagnétique
- **Transmission** : La transmission de l'énergie électromagnétique se fait par propagation des ondes avec éventuellement absorption par le milieu traversé.
- **Réception**: A la réception il y a conversion du rayonnement électromagnétique incident en énergie thermique (absorption). [28]

II.3.2.4 Spectre du rayonnement :

Le rayonnement électromagnétique est composé d'ondes se propageant à la vitesse de la lumière ($L_\theta = \frac{d\Phi}{d\Omega ds \cdot \cos\theta}$ $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ dans le vide). On peut les distinguer par leur longueur d'onde λ ou leur fréquence ν reliées par $c = \lambda \cdot \nu$ On rencontre également le nombre d'onde, reliées par $\nu = \frac{1}{\lambda}$

Le rayonnement visible occupe une bande étroite du spectre, aux longueurs d'ondes comprises entre 0,38 et 0,78 μm. Les longueurs d'ondes plus courtes (fréquences plus élevées) forment le rayonnement ultraviolet, puis X et γ. Les longueurs d'onde plus longues que le visible forment le rayonnement infrarouge puis micro-onde. [28]

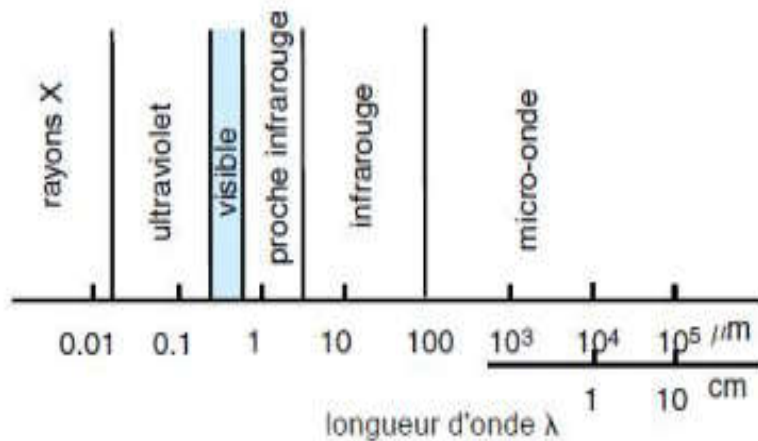


Figure 5. Classification du rayonnement en fonction de la longueur d'onde

II.3.2.5 Les grandeurs énergétiques de rayonnement :

II.3.2.5.1 Emission énergétique (Exitance) [M] :

C'est le flux total émis par une surface rapporté à l'unité de cette surface. On définit [24]:

$$M = \frac{d\Phi}{ds} \tag{II.5}$$

Comme Elle peut être aussi totale

$$M_T = \int_0^\infty M_{\lambda T} d\lambda \tag{II.6}$$

II.3.2.5.2 La luminance [L] :

La luminance correspond au rapport du flux total d émis par une surface dS' dans un angle solide dΩ. La surface dS' est celle la surface dS vue de la direction Ox qui fait un angle θ avec la normale à cette surface. Elle s'exprime par [24] :

$$L_{o,x} = \frac{d\Phi_{o,x}}{d\Omega ds \cdot \cos\theta} \tag{II.7}$$

Comme Elle peut être aussi totale.

$$L_{o,x} = \int_0^{\infty} L_{o,x} \cdot d\lambda \quad (II.8)$$

II.3.2.6 Applications :

Le rayonnement infrarouge est appliqué dans de très nombreux procédés industriels. Son action sur la matière est essentiellement thermique et les applications principales concernent :

- le séchage (papiers, cartons, textiles, etc.);
- la cuisson (teintures, apprêts, enductions...);
- le chauffage (avant formage de matériaux divers, traitements thermiques, soudage, chauffage de postes de travail...);
- les polymérisations (encres, revêtements, emballages...);
- la stérilisation (flacons pharmaceutiques, produits alimentaires divers...).

Le rayonnement ultraviolet est utilisé dans le domaine des réticulations de films plastiques et des polymérisations de produits organiques comme les encres d'imprimerie, les laques et vernis, opérations qui sont souvent appelées improprement séchages.[27]

II.3.3 La conduction :

II.3.3.1 Définition :

La conduction est défini comme étant le mode de transfert de chaleur qui se transmet le transfert d'énergie se fait d'une région à haute température vers une autre à basse température, à l'intérieur d'un milieu solide (liquide ou gazeux sous certaines conditions), ou entre différents milieux. [29]

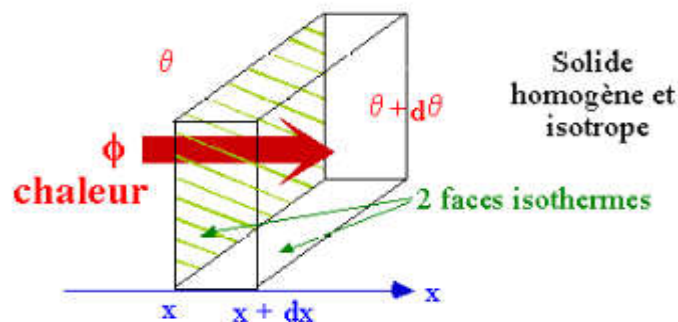


Figure 6. Conduction dans une couche élémentaire de mur plan

II.3.3.2 Loi de FOURIER :

La résolution de l'équation de la chaleur par conduction a été exposé par le mathématicien français **J.B.J FOURIER** en 1822, pour bien comprendre cette loi, il faut reconnaître certain nombre de grandeur de physique. Et donner par [24]:

$$d^2Q = -k \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot \vec{n} dA dt \quad (II.9)$$

II.3.3.2.1 Le flux thermique:

Le flux thermique s'exprime :

$$\Phi = -k \cdot A \cdot \frac{\Delta\theta}{e} \quad (II.10)$$

II.3.3.2.2 Résistance thermique :

Selon la loi d'ohm $U = R.I$:

$$U = R \cdot I \quad \longleftrightarrow \quad \Delta\theta = R_t \Phi$$

U : Tension électrique

$\Delta\theta$: Différence de température

R : Résistance électrique.

R_t : Résistance thermique.

I : Intensité électrique

Φ : Flux thermique.

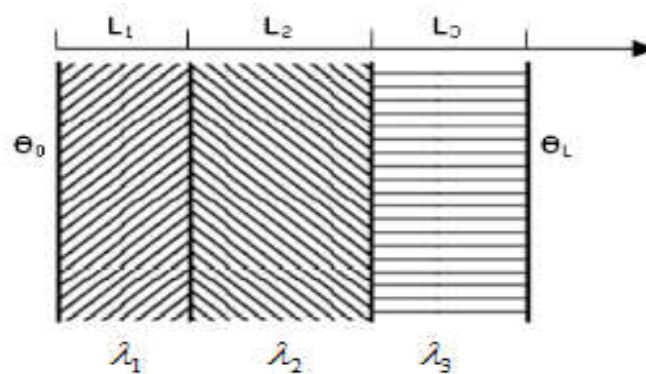


Figure 7. Schématisation du mur multicouche

La résistance thermique est :

$$R_t = \frac{e}{\lambda A} \quad (II.11)$$

R_t : est la résistance thermique.

Et le flux de chaleur traversant le mur est :

$$\Phi = \frac{\theta_0 - \theta_L}{\sum R_t} \quad (II.12)$$

II.3.3.3 Applications :

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc...[27]

II.4 Conclusion :

Après cette exposition, nous arrivons à conclure que :

Les trois mécanismes de transfert de la chaleur sont : la convection est un transfert par transport, le rayonnement est un transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée et dernièrement la conduction est un transfert dans la masse.

Chapitre III:

Chapitre III:

Généralité sur les méthodes de résolution

III. Généralités sur les méthodes de résolution

III.1 Introduction :

La résolution numérique est basée sur la méthode de discrétisation des équations du problème. Cette méthode consiste à transformer une équation différentielle en une équation algébrique, facile à résoudre (équation discrétisée). Les méthodes de discrétisation les plus couramment utilisées sont :

- Les différences finies.
- Les éléments finis.
- Les volumes finis.

Ces méthodes numériques sont très utiles pour la résolution des problèmes de mécanique des fluides, de transfert de chaleur, de transfert de matière...

III.2 Les trois grandes familles de méthodes:

Pour passer d'un problème exact continu régi par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

III.2.1 Éléments finis (EF) :

III.2.1.1 Définition :

Le terme "élément fini" est utilisé pour la première fois par **GLOUGH**, et dès lors, il y a un développement rapide de la méthode entre les années 1965 et 1975.

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles qui est construite à partir d'une formulation équivalente du problème à résoudre, que l'on peut écrire schématiquement sous la forme suivante: $[A] \cdot \{U\} = \{L\}$

Où

$\{U\}$: est le vecteur des inconnues,

$[A]$: est une matrice,

$\{L\}$: est un vecteur.

La méthode permet de traiter des géométries complexes contrairement aux différences finies ainsi que nombreux résultats théoriques sur la convergence, d'autre part elle demande un grand coût de temps de calcul et de mémoire.

De nombreux codes de calculs de structure reposent sur les Eléments Finis : ANSYS, CADD5, CATIA... [30]

III.2.1.2 Principes généraux :

La méthode des éléments finis a des principes tels que :

- Identifier des sous-domaines Ω_e géométriquement simples qui pavent le domaine ;
- Définir une fonction approchée sur chaque sous-domaine.

On présente donc un certain nombre de caractéristiques de cette construction :

- Le pavage du domaine Ω par les sous-domaines Ω_e doit être aussi précis que possible.
- La fonction approchée sur le sous-domaine doit respecter des conditions de continuité entre les différents sous-domaines.
- La fonction approchée sur le sous-domaine doit avoir des propriétés cohérentes avec les conditions de dérivabilité et en rapport avec la description physique de la solution (ce qui peut impliquer d'utiliser une formulation affaiblie par exemple) [27]

III.2.2 Maillage élément finis :

Consiste à découper la géométrie en un nombre fini de domaines (domaines élémentaires).

Il existe différents types d'éléments :

- élément linéique (1D).
- élément surfacique (2D).
- élément volumique (3D).

Pour les structures en (2D) les éléments de maillage sont souvent des triangles mais il peut être aussi en d'autre forme, les formes possibles dans ce cas sont les suivantes [31]:

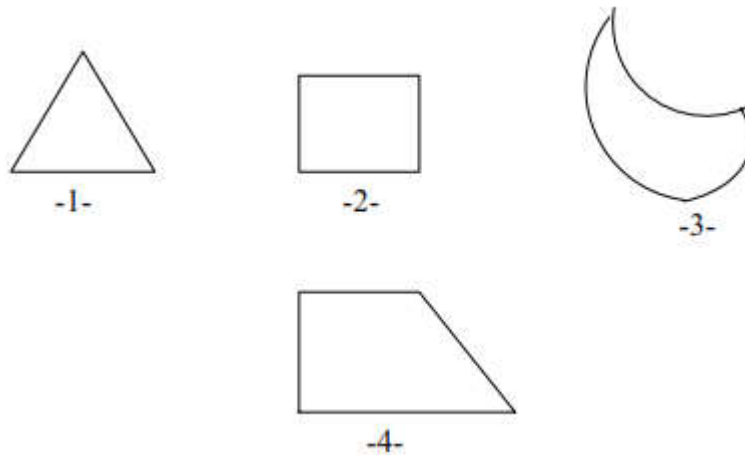


Figure 8. les formes possibles des éléments élémentaires en (2D)

III.2.3 Différences finies (DF) :

III.2.3.1 Définition :

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

Cette méthode comme elle a des avantages, a des inconvénients :

Les avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Les inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type **Neumann**. [30]

III.2.3.2 Principe :

Elle est basée sur le développement de Taylor de la fonction inconnue, autour d'un point x_0 et pour une fonction $f(x)$ continue et n fois dérivable, nous pouvons écrire :

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{2\Delta x} \quad (III.1)$$

$$\frac{d^2f(x_0)}{dx^2} = \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{\Delta x^2} \quad (III.2)$$

Cette méthode consiste à avoir une géométrie simple et un seul milieu homogène. [31]

III.2.3.3 Développement limité :

D'après Taylor :

$$f(x+h) = \frac{1}{0!}f'(x) + \frac{h^1}{1!}f''(x) + \frac{h^2}{2}f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) \quad (III.3)$$

On applique le développement d'ordre 1 nous trouvons :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h) \quad (III.4)$$

Nous avons les théorèmes de Taylor pour les points :

- 3 points :

Schéma centré : $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - o(h^2)$

Schéma avant : $f'(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{h} + o(h)$

Schéma arrière : $f'(x) = \frac{f(x) - f(x-1)}{h} + o(h)$

III.2.3.4 Résolution de l'équation de la chaleur par différence finis :**III.2.3.4.1 Méthode explicite**

On considère l'équation de la chaleur unidimensionnelle :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{à} \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq x \leq 1, t > 0 \\ 0 \leq x \leq 0.1 \end{array}$$

Avec les conditions aux limites et initiales suivantes

$$\begin{cases} T(0, t) = 0 \\ T(L, t) = 0 \\ T(x, 0) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \end{cases}$$

On a calculé les températures inconnues sur le domaine [0.01] par le schéma explicite.

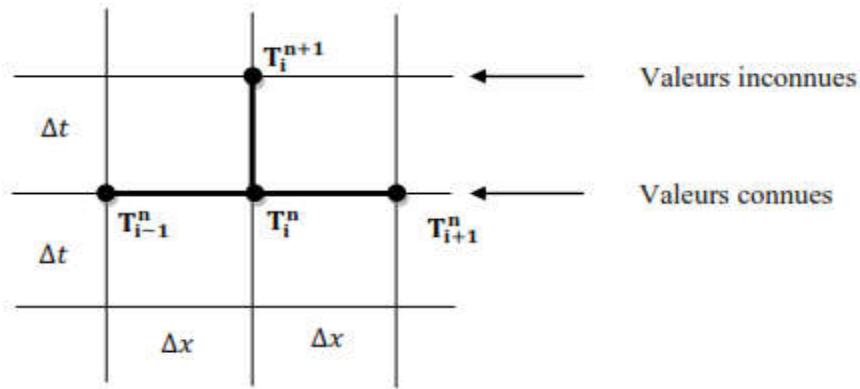


Figure 9. les nœuds des différences finis du schéma explicite simple

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2},$$

$$T_i^{j+1} = rT_{i-1}^j - (1-2r)T_i^j + rT_{i+1}^j \tag{III.5}$$

$$j = 1, 2, 3 \dots \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

La procédure de calcul est comme suite :

- Commencer le calcul avec $j=0$. Calculer $T_i^1, i=1, 2, \dots, n-1$ par l'équation, tant que les températures au cotés droite de l'équation sont définies par les conditions limites.
- Mètre dans le deuxième pas $n=1$ et calculer $T_i^2, i=1, 2, \dots, n-1$ en utilisant les températures calculées dans l'étape précédente.
- Répéter la procédure pour chaque pas de temps et continuer les calculs jusqu'à un instant ou une valeur de la température est atteinte.

III.2.3.4.2 Méthode implicite :

Soit l'équation de la chaleur 1D :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Défini sur le domaine suivant :

$$\begin{cases} x \in [0, 3] \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(0, t) = 300 \\ T(3, t) = 400 \end{cases}$$

Et condition initiale :

$$T(x, 0) = 100$$

On a calculé les températures inconnues par le schéma implicite.

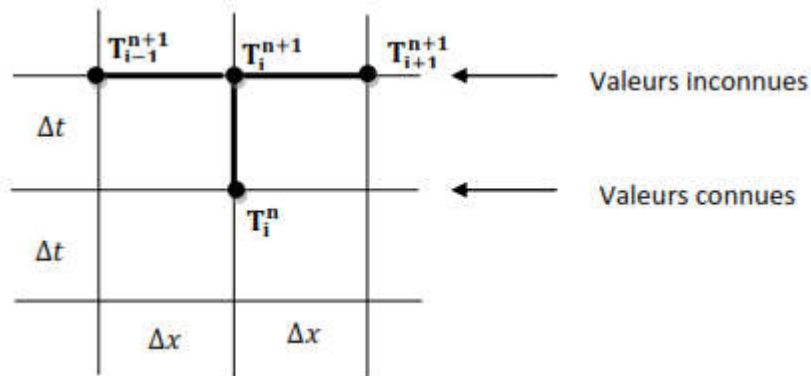


Figure 10. les nœuds des différences finis du schéma implicite simple

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$T_i^{j+1} = \frac{w}{(1+2r)} (T_i^j + rT_{i-1}^{j+1} + rT_{i+1}^{j+1}) + T_i^{j+1}(1+w) \quad (\text{III.6})$$

III.2.4 Volumes finis (VF) :

III.2.4.1 Définition :

Pour la première fois en 1971, la méthode des volumes finis a été décrite par **PATANKAR** et **SPALDING** et publiée en 1980 par **PATANKAR**, cette méthode est une méthode de discrétisation on utilise pour résoudre numériquement les équations différentielles aux dérivées partielles, ainsi que les phénomènes qu'étudient le physicien et l'ingénieur, la mécanique des fluides, le transport de masse et de chaleur. , De nombreux codes de simulation numérique en mécanique des fluides reposent sur cette méthode : Fluent, StarCD, CFX, Fine Turbo, elsA...

La méthode des volumes finis est adaptée aux équations de la mécanique des fluides

- équation de conservation de la masse,
- équation de conservation de la quantité de mouvement,
- équation de conservation de l'énergie. [30]

La méthode permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, ainsi que de déterminer plus naturelle des conditions aux limites de type **Neumann**. D'autre part, peu de résultats théoriques de convergence. [27]

III.2.4.2 Principe

Le principe de la méthode des volumes finis, est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés volume de contrôle, comme indiqué dans la figure (11). Chacun de ces derniers englobe un nœud dit nœud principal P, les points E et W (Est et Ouest) sont des voisins dans la direction x, tandis que N et S (Nord et Sud) sont ceux dans la direction y. Le volume de contrôle entourant P est montré par les lignes discontinues. Les faces du volume de contrôle sont localisées aux points e et w dans la direction x, n et s dans la direction y [32].

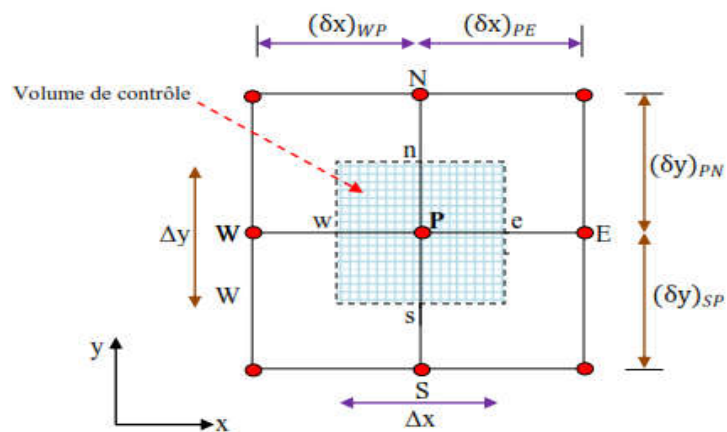


Figure 11. Volume de contrôle typique pour une situation 2D

III.2.4.3 Notion de maillage :

III.2.4.3.1 Définition :

C'est la subdivision du domaine d'étude en grilles longitudinale et transversale, dont l'intersection représente un nœud, où on trouve le point central P et les composantes u et v de vecteur vitesse, qui se trouvent au milieu des segments.

On revanche nous avons mené une recherche sur une d'autre définition, le maillage c'est : Le domaine d'étude est divisé en un certain nombre de volumes de contrôles, chaque point du domaine est localisé à l'aide des indices (i, j). Figure (12)

Les grandeurs scalaires sont stockées dans le nœud P du maillage, les grandeurs vectorielles u et v sont stockés au milieu des segments reliant les nœuds.

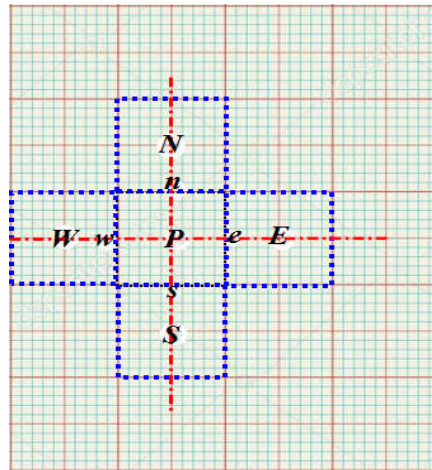


Figure 12. Volume de contrôle bidimensionnel

Le volume de contrôle de la composante transversale u est décalé vers la droite par rapport au volume de contrôle principale voir la Figure (13), celui de la composante longitudinale v est décalé vers le haut (14). Ce type de maillage, dit « maillage décalé » [32]

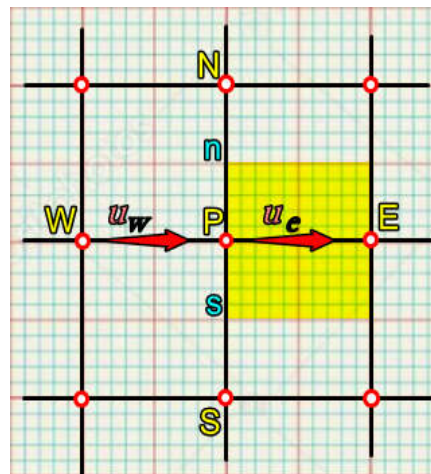


Figure 13. Volume de contrôle décalé vers la droite

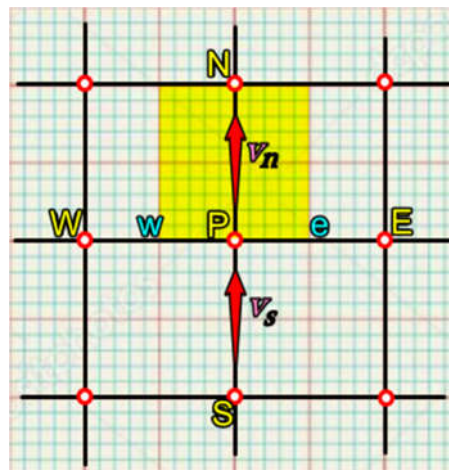


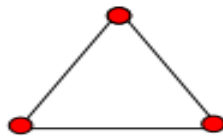
Figure 14. Volume de contrôle décalé vers le haut

III.2.4.3.2 Choix de maillage :

Après avoir créé la géométrie, il est très important de choisir un maillage adapté pour traiter le problème, Le choix du maillage est un point essentiel dans la précision et l'exactitude des résultats numériques. Pour ce faire, on doit déterminer les paramètres optimaux et choisir une stratégie de maillage qui répond à nos objectifs, Parmi ces paramètres, on peut citer :

- Le nombre de mailles,
- La distance entre les mailles (concentration des mailles),
- La forme de la maille,
- Les paramètres de déformation pour le cas du maillage déformable. [33]

Nous distinguons plusieurs types de maillages :



Elément 2D de type "triangle"



Elément 2D de type "quadrilatère"



Elément 3D de type "hexaèdre".

Figure 15. Les types des maillages

III.2.4.3.3 Exemple 1D :

Problème de diffusion 1D de la chaleur dans une barre "AB" horizontale de longueur L avec un coefficient de conductivité k et une section A avec des conditions aux limites T_A et T_B sans terme source.

- **Solution :**

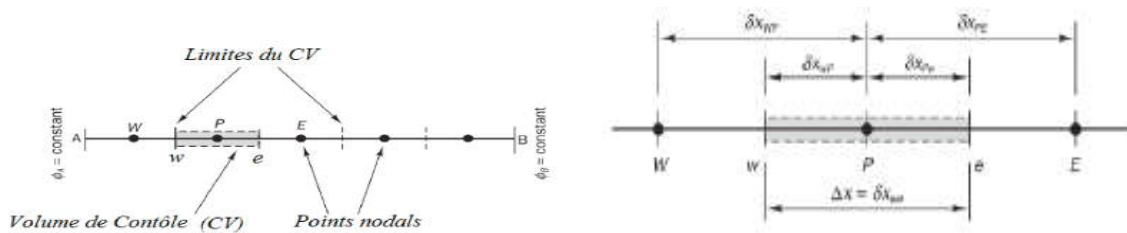


Figure 16. le domaine en volume de contrôles discrets

- **La discrétisation:**

$$\underbrace{\int_{cv} \frac{\partial(\rho T)}{dt} dv}_0 + \underbrace{\int_{cv} \text{div}(\rho T u) dv}_0 = \underbrace{\int_{cv} \text{div}(k \overline{\text{grad} T}) dv}_{\text{terme diffusif}} + \underbrace{\int_{cv} S T dv}_{\text{terme source}} \quad (III.7)$$

$$\int_v \text{div}(k \overline{\text{grad} T}) dv + \int_v S T dv = 0 \quad (III.8)$$

$$\int_v \frac{\partial}{\partial x} (k \overline{\text{grad} T}) dA dx + \int_v S T dv = 0 \quad (III.9)$$

$$(k \frac{dT}{dx})_w^e A + S u = 0 \quad (III.10)$$

$$\underbrace{(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_w A_w}{\Delta x} - S_p)}_{a_p} T_P = \underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x}}_{a_E} T_E + \underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_W} T_W + S u \quad (III.11)$$

$$a_p T_P = a_W T_W + a_E T_E + S u \quad (III.12)$$

$$a_p = a_W + a_E - S_p \quad (III.13)$$

Après la discrétisation on a trouvé :

- **Nœud (02, 03,04) :**

$$\underbrace{(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_w A_w}{\Delta x})}_{a_p} T_P = \underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x}}_{a_E} T_E + \underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_W} T_W \quad (III.14)$$

- **Nœud (01) :**

$$\underbrace{(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + 0 + \frac{2k_w A_w}{\Delta x})}_{a_p} T_P = \underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x}}_{a_E} T_E + \underbrace{T_W(0)}_{a_W} + \underbrace{\frac{2k_w A_w}{\Delta x} T_A}_{S u} \quad (III.15)$$

- **Nœud (05) :**

$$\underbrace{(\frac{k_w A_w}{\Delta x} + 0 + \frac{2k_e A_e}{\Delta x})}_{a_p} T_P = \underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_E} T_W + \underbrace{T_E(0)}_{a_W} + \underbrace{\frac{2k_e A_e}{\Delta x} T_B}_{S u} \quad (III.16)$$

Le tableau suivant traité les résultats de cinq nœuds :

| N | a_p | a_w | a_E | Su | Sp |
|-----|--|----------------------------|----------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| 1 | $\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{2k_w A_w}{\Delta x}$ | 0 | $\frac{k_e A_e}{\Delta x}$ | $\frac{2k_w A_w}{\Delta x} T_A$ | $\frac{2k_w A_w}{\Delta x}$ |
| 2 | $\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_e A_e}{\Delta x}$ | $\frac{k_w A_w}{\Delta x}$ | $\frac{k_e A_e}{\Delta x}$ | 0 | 0 |
| 3 | $\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_e A_e}{\Delta x}$ | $\frac{k_w A_w}{\Delta x}$ | $\frac{k_e A_e}{\Delta x}$ | 0 | 0 |
| 4 | $\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_e A_e}{\Delta x}$ | $\frac{k_w A_w}{\Delta x}$ | $\frac{k_e A_e}{\Delta x}$ | 0 | 0 |
| 5 | $\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{2k_e A_e}{\Delta x}$ | $\frac{k_w A_w}{\Delta x}$ | 0 | $\frac{k_e A_e}{\Delta x} T_B$ | $\frac{2k_e A_e}{\Delta x}$ |

Tableau 1. Les résultats de cinq nœuds

III.3 Conclusion :

A travers ce chapitre, nous avons présenté brièvement les trois méthodes des résolutions, des exemples sur chaque méthode. Dans notre étude on a utilisé la méthode des volumes finis pour résoudre l'équation de la chaleur. Cette équation est discrétisé dans le chapitre suivant.

Chapitre IV:

Chapitre IV:

Modèle d'équation gouvernante

IV. Chapitre IV. Modèle d'équation gouvernante

IV.1 Introduction :

Ce chapitre c'est un passage sur la modélisation de l'équation de chaleur dans une plaque. Dans un premier temps, l'équation générale de chaleur sera présentée et la méthode de résolution de cette équation par la méthode des volumes finis qui fera l'objet principal de ce présent chapitre.

IV.2 Modélisation d'équation de chaleur :

La modélisation numérique est au cœur des sciences appliquées et joue un rôle fondamentale dans presque toutes les disciplines des sciences et du génie. La modélisation ou simulation numérique, consiste à représenter un phénomène physique par un modèle mathématique sous forme de très grands systèmes d'équations qui sont résolues à l'aide des programmes.

IV.3 La discrétisation

Avant de discrétiser l'équation de la chaleur qui présentée au chapitre précédent, on va préciser les conditions aux limites.

IV.3.1 Equation gouvernante:

L'équation de la chaleur pour un problème 2D est la suivante :

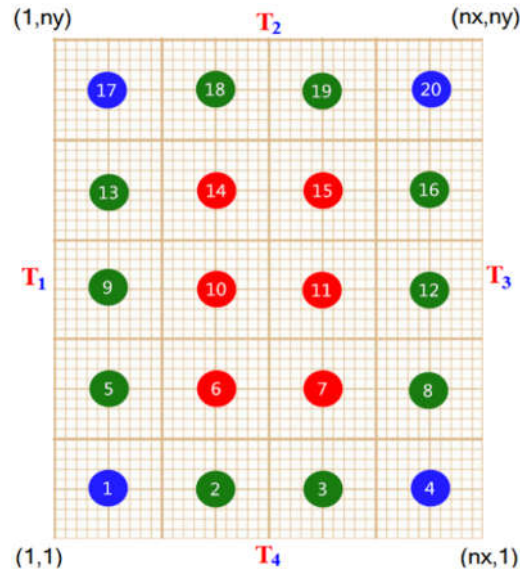
$$\underbrace{\frac{\partial(\rho T)}{dt}}_{\substack{\text{terme} \\ \text{temp}}} + \underbrace{\text{div}(\rho T u)}_{\substack{\text{terme} \\ \text{convectif}}} dv = \underbrace{\text{div}(k \overline{\text{grad} T})}_{\substack{\text{terme} \\ \text{diffusif}}} + \underbrace{ST}_{\substack{\text{terme} \\ \text{source}}} \quad (IV .1)$$

On considère une plaque rectangulaire de longueur L et de hauteur H :

IV.3.1.1 Le premier cas :

IV.3.1.1.1 Conditions aux limites de type "température imposée" (Dirichlet)

On suppose que la surface de la frontière $x=0$ est maintenue à la température uniforme T_1 et la surface de frontière à $x=L$ est maintenue la température uniforme T_3 , et la surface de la frontière $y=0$ est maintenue à la température T_4 et la surface de la frontière $y=H$ est maintenue à la température uniforme T_2 .

Figure 17. Volume de contrôle CL *Dirichlet*

IV.3.1.1.2 Résolution numérique de l'équation de chaleur en 2D par la méthode des volumes finis :

$$\underbrace{\int_v \frac{\partial(\rho T)}{dt} dv}_0 + \underbrace{\int_v \text{div}(\rho T u) dv}_0 = \underbrace{\int_v \text{div}(k \overline{\text{grad} T}) dv}_{\text{terme diffusif}} + \underbrace{\int_v S T dv}_{\text{terme source}}$$

$$\int_v \text{div}(k \overline{\text{grad} T}) dv = 0$$

$$\int_v \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dA_x dx + \int_v \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA_y dy$$

$$\int_s \left(k \frac{dT}{dx} \right) dA_x + \int_s \left(k \frac{dT}{dy} \right) dA_y = 0 \quad (VI.1)$$

$$k_e A_e \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - k_w A_w \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w + k_s A_s \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s - k_n A_n \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_n = 0 \quad (VI.2)$$

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0 \quad (VI.3)$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + S u \quad (VI.4)$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - S_p \quad (VI.5)$$

- **Nœud (1)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{2k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_1) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_4) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} + \frac{2k_w A_w}{\Delta x} + \frac{2k_s A_s}{\Delta y} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N + \underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x} T_1 + \frac{2k_s A_s}{\Delta y} T_4}_{S_u}$$

- **Nœud (4)**

$$\frac{2k_e A_e}{\Delta x} (T_3 - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_4) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} + \frac{2k_e A_e}{\Delta x} + \frac{2k_s A_s}{\Delta y} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N + \underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x} T_3 + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_4}_{S_u}$$

- **Nœud (17)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{2k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_1) + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y} (T_2 - T_P)}_0 - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} + \frac{2k_w A_w}{\Delta x} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \underbrace{\frac{2k_w A_w}{\Delta x} T_1 + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} T_2}_{S_u}$$

- **Nœud (20)**

$$\frac{2k_e A_e}{\Delta x} (T_3 - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} (T_2 - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} + \frac{2k_e A_e}{\Delta x} + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \underbrace{\frac{2k_e A_e}{\Delta x} T_3 + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} T_2}_{S_u}$$

- **Nœuds (05, 09, 13)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{2k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_1) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} + \frac{2k_w A_w}{\Delta x} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \frac{k_n A_n}{\Delta y} + \underbrace{\frac{2k_w A_w}{\Delta x} T_1}_{S_u}$$

- **Nœuds (8, 12,16)**

$$\frac{2k_e A_e}{\Delta x} (T_3 - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} + \frac{2k_e A_e}{\Delta x} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N + \underbrace{\frac{2k_e A_e}{\Delta x} T_3}_{Su}$$

- **Nœud (2,3)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \underbrace{\frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_4)}_0 = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} + \frac{2k_s A_s}{\Delta y} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N + \underbrace{\frac{2k_s A_s}{\Delta y} T_4}_{Su}$$

- **Nœud (18,19)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} (T_2 - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_2$$

- **Nœuds (6,7,10,11,14,15)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N$$

IV.3.1.2 Le deuxième cas :

IV.3.1.2.1 Conditions aux limites de type "flux nul" (Neumann), "température imposée" (Dirichlet)

- Neumann est un "flux imposé" dans notre cas "flux imposé nul" (adiabatique)

On suppose que la surface de la frontière $x=0$ est maintenue à la température uniforme T_1 et la surface de frontière à $y = H$ est maintenue la température uniforme T_2 , la surface de la frontière $x=L$ et la surface de frontière à $y = 0$ sont maintenue à la condition **Neumann**

$$\left(\frac{dT}{dy} = 0, \frac{dT}{dx} = 0 \right).$$

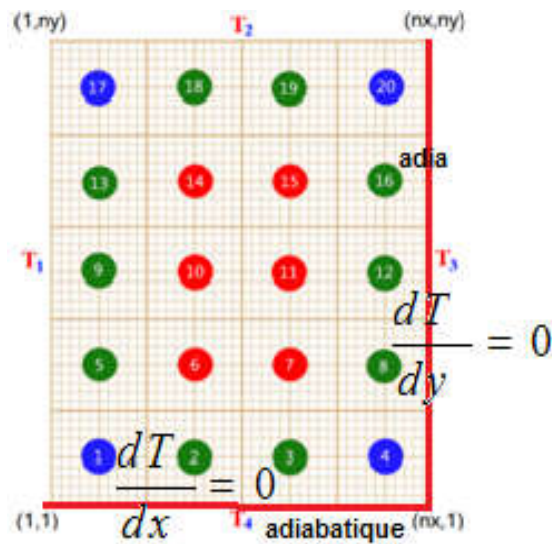


Figure 18. Volume de contrôle CL Neumann et Dirichlet

IV.3.1.2.2 Résolution numérique de l'équation de chaleur en 2D par la méthode des volumes finis :

$$\underbrace{\int_v \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} dv}_0 + \underbrace{\int_v \text{div}(\rho T u) dv}_0 = \underbrace{\int_v \text{div}(k \overline{\text{grad} T}) dv}_{\text{terme diffusif}} + \underbrace{\int_v S T dv}_{\text{terme source}}$$

$$\int_v \text{div}(k \overline{\text{grad} T}) dv = 0$$

$$\int_v \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dA_x dx + \int_v \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA_y dy$$

$$\int_s (k \frac{dT}{dx}) dA_x + \int_s (k \frac{dT}{dy}) dA_y = 0$$

$$k_e A_e \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - k_w A_w \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w + k_s A_s \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s - k_n A_n \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_n = 0$$

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) - \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) = 0$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + Su$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - S_P$$

• **Nœud 01 :**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{2k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_1) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \underbrace{\frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_4)}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow T_P = T_4$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} + \frac{2k_w A_w}{\Delta x} \right)}_{a_P} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N + \underbrace{\frac{2k_w A_w}{\Delta x} T_1}_{Su}$$

• **Nœud 04 :**

$$\frac{2k_e A_e}{\Delta x} (T_2 - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \underbrace{\frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_4)}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow T_P = T_4$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} \right)}_{a_P} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N$$

$$Su = 0 \quad Sp = 0$$

• **Nœud 17 :**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{2k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_1) + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y} (T_2 - T_P)}_0 - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} + \frac{2k_w A_w}{\Delta x} + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} \right)}_{a_P} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \underbrace{\frac{2k_w A_w}{\Delta x} T_1 + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} T_2}_{Su}$$

• **Nœud 20 :**

$$\underbrace{\frac{2k_e A_e}{\Delta x} (T_3 - T_P)}_0 - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} (T_2 - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0 \quad \Leftrightarrow T_3 = T_P$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_w} + \underbrace{\frac{k_s A_s}{\Delta y}}_{a_s} + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y}}_{-S_p} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y} T_2}_{S_u}$$

• **Nœuds (09, 05,13) :**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{2k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_1) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x}}_{a_e} + \underbrace{\frac{k_s A_s}{\Delta y}}_{a_s} + \underbrace{\frac{k_n A_n}{\Delta y}}_{a_n} + \underbrace{\frac{2k_w A_w}{\Delta x}}_{-S_p} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N + \underbrace{\frac{2k_w A_w}{\Delta x} T_1}_{S_u}$$

• **Nœuds (08, 12,16) :**

$$\underbrace{\frac{2k_e A_e}{\Delta x} (T_3 - T_P)}_0 - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0 \Leftrightarrow T_3 = T_P$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_w} + \underbrace{\frac{k_s A_s}{\Delta y}}_{a_s} + \underbrace{\frac{k_n A_n}{\Delta y}}_{a_n} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N$$

$$S_u = 0 \quad S_p = 0$$

• **Nœuds (02,03) :**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \underbrace{\frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_4)}_0 = 0 \Leftrightarrow T_P = T_B$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x}}_{a_e} + \underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_w} + \underbrace{\frac{k_n A_n}{\Delta y}}_{a_n} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N \Leftrightarrow T_4 = T_P$$

$$S_p = 0 \quad S_u = 0$$

• **Nœuds (18,19) :**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} (T_2 - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x}}_{a_e} + \underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_w} + \underbrace{\frac{k_s A_s}{\Delta y}}_{a_s} + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y}}_{-S_p} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y} T_2}_{-S_u}$$

- **Nœuds (06, 07, 10, 11, 14,15)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N$$

$$S_p = 0 \quad S_u = 0$$

IV.3.1.3 Le troisième cas :

IV.3.1.3.1 Conditions aux limites de type "flux nul" (Neumann), "température imposée" (Dirichlet) et "flux convective" (Robin)

- Neumann est un "flux imposé" dans notre cas "flux imposé nul" (adiabatique)

On suppose que la surface de la frontière $x=0$ et la surface de frontière à $x=L$ sont maintenue à la condition au limite **Neumann** (flux nul) $\left(\frac{dT}{dy} = 0 \right)$, la surface de la frontière $y=0$ est maintenue à la condition au limite **Robin** (flux convectif) et la surface de la frontière $y = H$ est maintenue à condition au limite **Dirichlet** (température imposé).

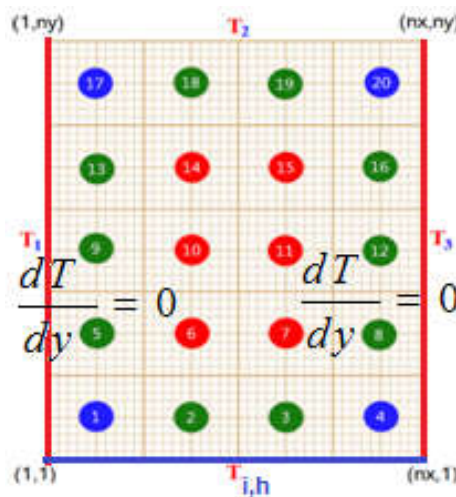


Figure 19. Volume de contrôle CL Neumann, Dirichlet et Robin

IV.3.1.3.2 Résolution numérique de l'équation de chaleur en 2D par la méthode des volumes finis :

$$\underbrace{\int_v \frac{\partial(\rho T)}{dt} dv}_{\underline{0}} + \underbrace{\int_v \text{div}(\rho T u) dv}_{\underline{0}} = \underbrace{\int_v \text{div}(k \overline{\text{grad} T}) dv}_{\text{terme diffusif}} + \underbrace{\int_v S T dv}_{\text{terme source}}$$

$$\int_v \text{div}(k \overline{\text{grad} T}) dv - \int_v h(T - T_i) = 0 \quad (IV .6)$$

$$\int_v \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dA_x dx + \int_v \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA_y dy - \int_v h(T - T_i) = 0 \quad (IV .7)$$

$$\int_s \left(k \frac{dT}{dx} \right) dA_x + \int_s \left(k \frac{dT}{dy} \right) dA_y - \int_s h \times A_s (T_p - T_i) dy = 0 \quad (IV .8)$$

$$\begin{aligned} k_e A_e \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - k_w A_w \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w + k_s A_s \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s - k_n A_n \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_n - \dots \\ \dots h \times A_s \times dy (T_p - T_i) = 0 \end{aligned} \quad (IV .10)$$

$$\begin{aligned} \frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) \dots \\ \dots - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) - h \times A_s \times dy (T_p - T_i) = 0 \end{aligned} \quad (IV .11)$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N$$

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N - S_P$$

- **Nœud (1)**

$$\begin{aligned} \frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \underbrace{\frac{2k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_1)}_0 + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \dots \\ \dots - \frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_i) - h \times A_s \times dy (T_p - T_i) = 0 \quad T_p = T_1 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x}}_{a_E} + \underbrace{\frac{k_n A_n}{\Delta y}}_{a_N} + \underbrace{\frac{2k_s A_s}{\Delta y} + h \times A_s \times dy}_{-S_P} \right)}_{a_P} T_P = \dots$$

$$\dots \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N + \underbrace{\left(\frac{2k_s A_s}{\Delta y} + h \times A_s \times dy \right)}_{S_u} T_i$$

• **Nœud (4)**

$$\underbrace{\frac{2k_e A_e}{\Delta x} (T_3 - T_P)}_0 - \frac{2k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_w) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_i) \dots$$

$$\dots - h \times A_s \times dy (T_P - T_i) = 0 \quad T_p = T_3$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_w} + \underbrace{\frac{k_n A_n}{\Delta y}}_{a_N} + \underbrace{\frac{2k_s A_s}{\Delta y} + h \times A_s \times dy}_{-S_P} \right)}_{a_P} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_w \dots$$

$$\dots + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_n + \left(\frac{2k_s A_s}{\Delta y} + h \times A_s \times dy \right) T_i$$

• **Nœud (17)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{2k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_1) + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} (T_2 - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_s) = 0 \quad T_p = T_1$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x}}_{a_E} + \underbrace{\frac{k_s A_s}{\Delta y}}_{a_s} + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y}}_{-S_P} \right)}_{a_P} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_s + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y}}_{S_u}$$

• **Nœud (20)**

$$\underbrace{\frac{2k_e A_e}{\Delta x} (T_3 - T_P)}_0 - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_w) + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} (T_2 - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_s) = 0 \quad T_p = T_3$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_w} + \underbrace{\frac{k_s A_s}{\Delta y}}_{a_s} + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y}}_{-S_P} \right)}_{a_P} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_w + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_s + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y}}_{S_u}$$

- **Nœuds (05, 09,13)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{2k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_1) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_s) = 0 \quad T_P = T_1$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_s + \frac{k_n A_n}{\Delta y}$$

$$Su = 0 \quad Sp = 0$$

- **Nœuds (8, 12,16)**

$$\frac{2k_e A_e}{\Delta x} (T_P - T_3) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_w) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_s) = 0 \quad T_P = T_3$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_w + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_s + \frac{k_n A_n}{\Delta y}$$

$$Su = 0 \quad Sp = 0$$

- **Nœud (2,3)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_w) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_i) - h \times A_s \dots$$

$$\dots \times dy (T_P - T_i) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_n A_n}{\Delta y} + \frac{2k_s A_s}{\Delta y} + h \times A_s \times dy \right)}_{a_p} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_w \dots$$

$$+ \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N + \underbrace{\left(\frac{2k_s A_s}{\Delta y} + h \times A_s \times dy \right)}_{Su} T_i$$

- **Nœud (18,19)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_w) + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} (T_2 - T_P) - \frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_s) = 0$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x}}_{a_E} + \underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_W} + \underbrace{\frac{k_s A_s}{\Delta y}}_{a_S} + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y}}_{-S_P} \right)}_{a_P} T_P = \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \underbrace{\frac{2k_n A_n}{\Delta y} T_N}_{S_U}$$

• **Nœuds (6,7,10,11,14,15)**

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_P) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_P - T_W) + \frac{k_n A_n}{\Delta y} (T_N - T_P) - \frac{k_s A_s}{\Delta y} (T_P - T_S) = 0$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\frac{k_w A_w}{\Delta x}}_{a_W} + \underbrace{\frac{k_e A_e}{\Delta x}}_{a_E} + \underbrace{\frac{k_s A_s}{\Delta y}}_{a_S} + \underbrace{\frac{k_n A_n}{\Delta y}}_{a_N} \right)}_{a_P} T_P = \frac{k_w A_w}{\Delta x} T_W + \frac{k_e A_e}{\Delta x} T_E + \frac{k_s A_s}{\Delta y} T_S + \frac{k_n A_n}{\Delta y} T_N$$

$$S_U = 0 \quad S_P = 0$$

IV.4 Organigramme de code MATLAB :

Pour la résolution de notre problème, nous avons utilisé le code de calcul **MATLAB** version R1015a.

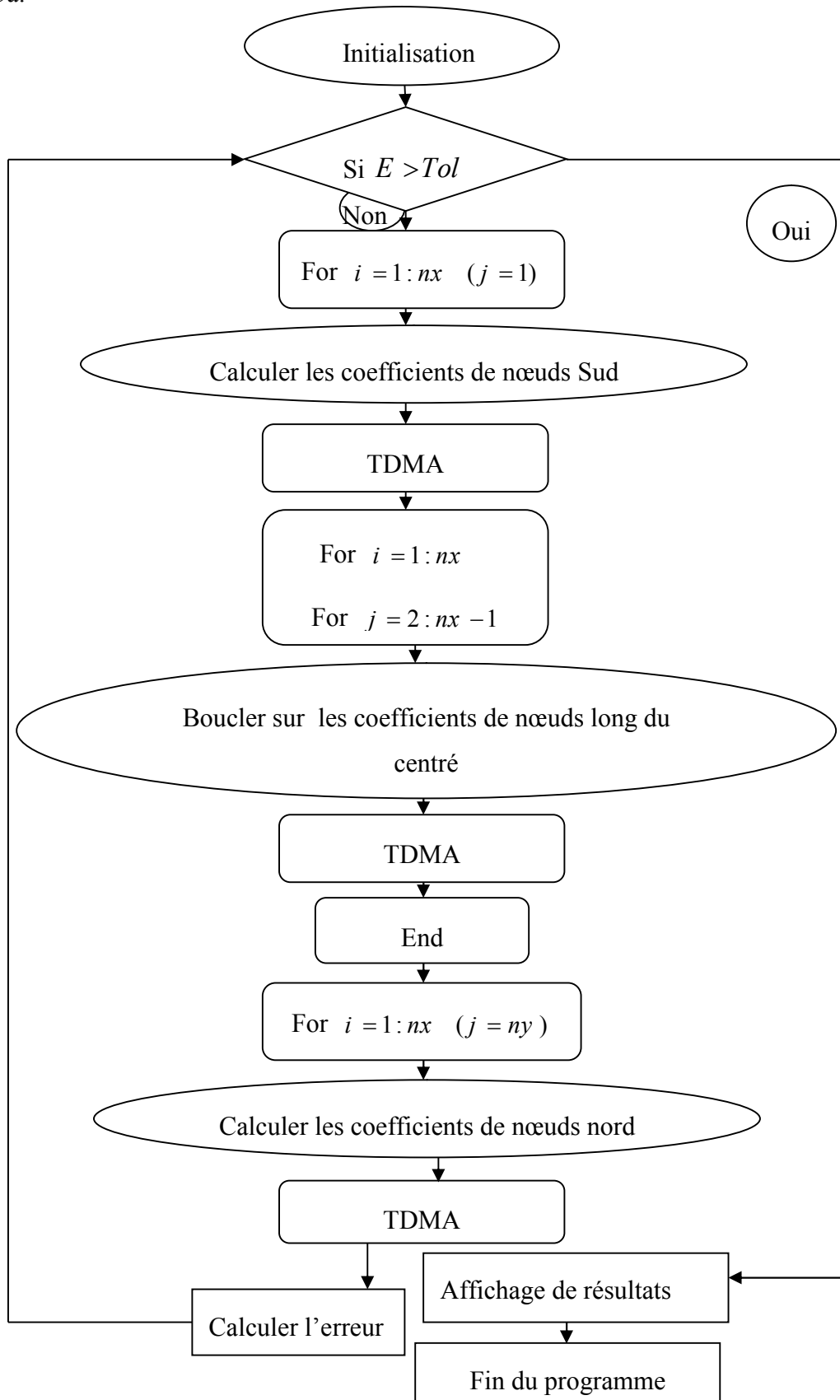


Figure 20. organigramme du programme

IV.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté une résolution numérique bidimensionnelle d'équation gouvernante par la méthode des volumes finis qui est présenté au chapitre précédente avec trois cas de condition au limites **Neumann**, **Dirichlet** et **Robin**, La résolution est effectuée par le code **MATLAB**.

Chapitre V: **Chapitre V:**

Résultats et interprétations

V. Chapitre V. Résultats et interprétations

V.1 Introduction :

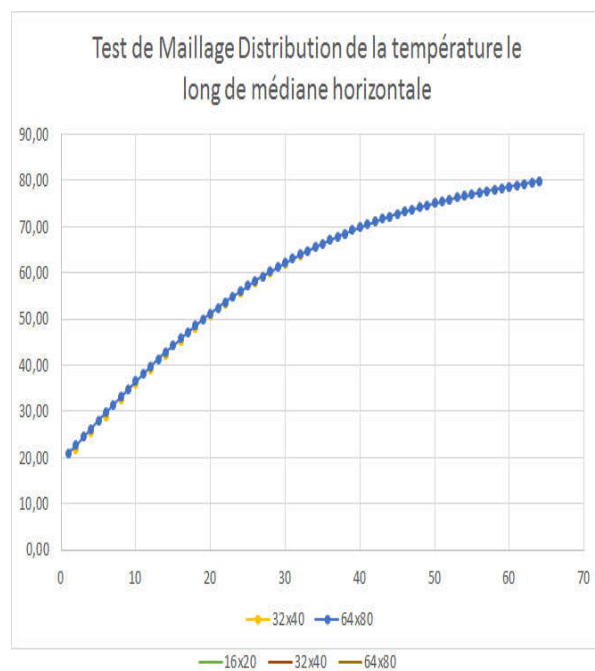
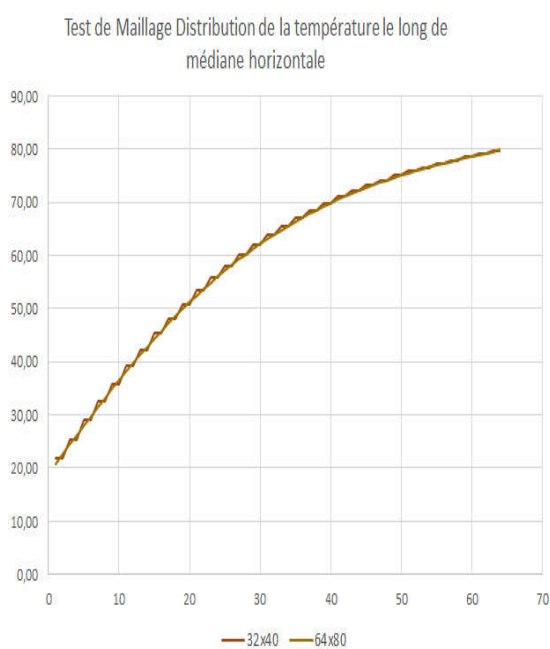
Ce chapitre comporte la comparaison des résultats numériques des programmes **MATLAB** et **COMSOL**, on employant quatre méthodes de la résolution de la matrice : TDMA, Gausse-Seidel sans et avec relaxation et Jacobi sur **MATLAB**.

V.2 Test de maillage :

On a fait le test de maillage pour connaître le seuil minimum du maillage pour l'apparition de la distribution de la température, on est arrivé aux les résultats suivants :

| nœuds | 4x5 | 8x10 | 16x20 | 32x40 | 64x80 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 39,13 | 42,41 | 44,41 | 45,32 | 45,77 |
| 2 | 62,30 | 63,10 | 63,56 | 63,82 | 63,95 |
| 3 | 74,44 | 74,16 | 74,13 | 74,17 | 74,19 |
| 4 | 79,72 | 79,26 | 79,50 | 79,72 | 79,85 |

Tableau 2. Test de maillage



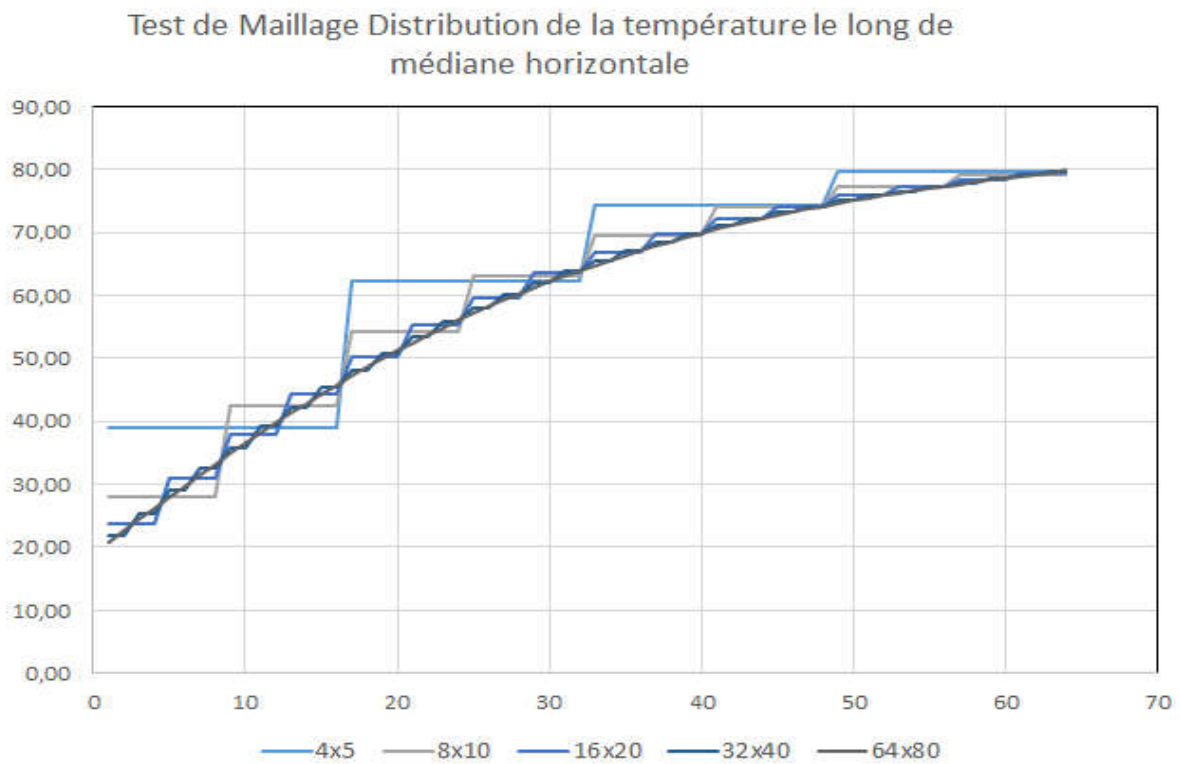
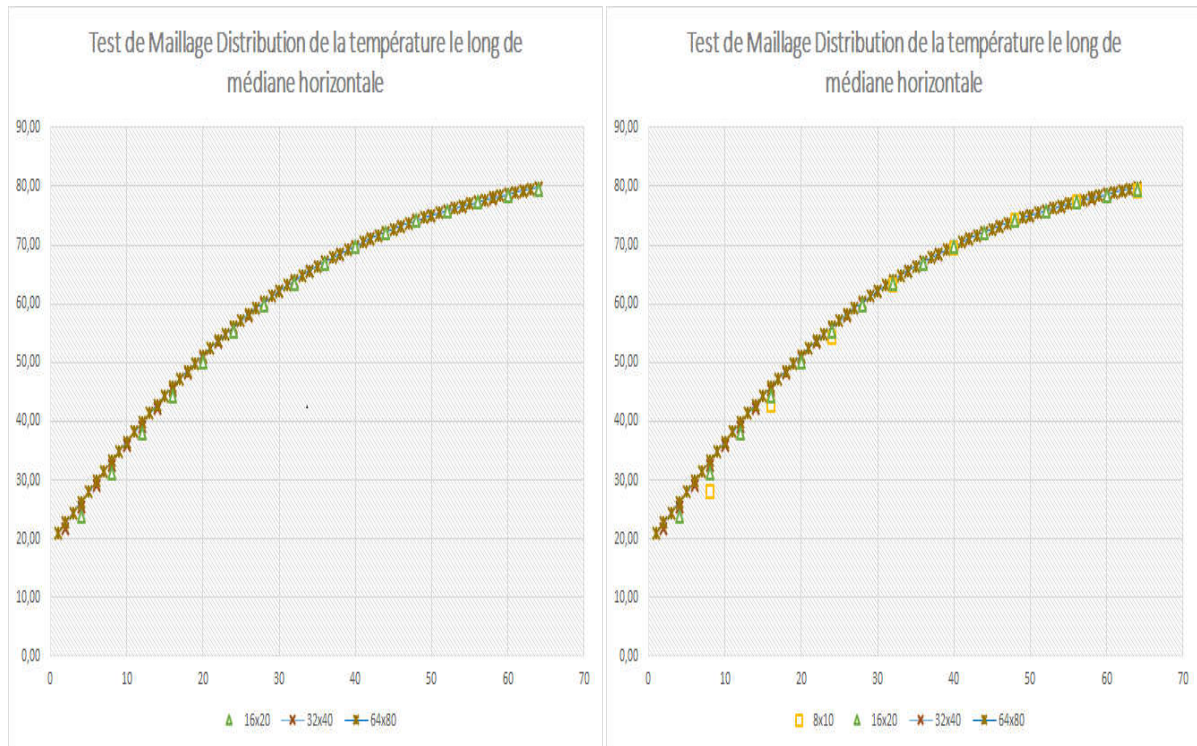


Figure 21. les courbes de test de maillage.

V.2.1 Discussions :

La figure 21 représente les courbe de teste de maillage, d'après le test, on a conclu que le maillage ($n_x=32$ $n_y=40$) est le seuil minimum pour la variation de la distribution de la température le long de la médiane.

V.1 Initialisation des données :

Pour la validation de nos résultats, nous avons pris les données suivantes pour chaque cas :

| Les données | Lx | Ly | dz | T ₁ | T ₂ | T ₃ | T ₄ | K | h | erreur | itération |
|----------------------|-----|-----|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|---|------------------|-----------|
| 1 ^{er} cas | 0,4 | 0.5 | 0.001 | 40 | 60 | 80 | 100 | 100 | X | 10 ⁻⁵ | 5000 |
| 2 ^{eme} cas | 0,4 | 0.5 | 0.001 | 40 | 60 | 80 | 100 | 100 | X | 10 ⁻⁵ | 5000 |
| 3 ^{eme} cas | 0,4 | 0.5 | 0.001 | 40 | 60 | 80 | 100 | 100 | 5 | 10 ⁻⁵ | 5000 |

Tableau 3. Initialisation des données

Pour le troisième cas on a pris $T_4=T_i$

V.2 Validation de nos résultats:

Dans le but principal de notre étude est la discrétisation de l'équation de la chaleur en 2D dans une plaque rectangulaire, avec différentes conditions aux limites par la méthode des volumes finis. D'après nos calculs on est arrivé aux les résultats suivants :

V.2.1 Par TDMA

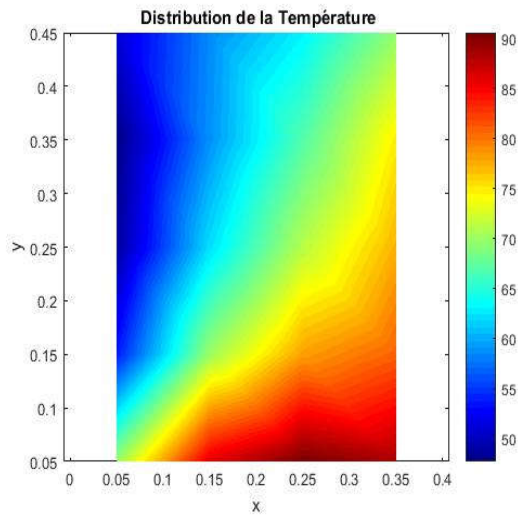
V.2.1.1 Premier cas

Dans le premier cas on a discrétisé avec une condition aux limites de type **Dirichlet** :

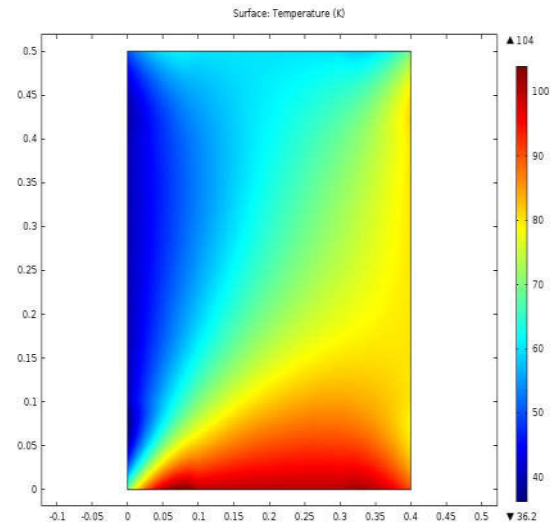
MATLAB

COMSOL

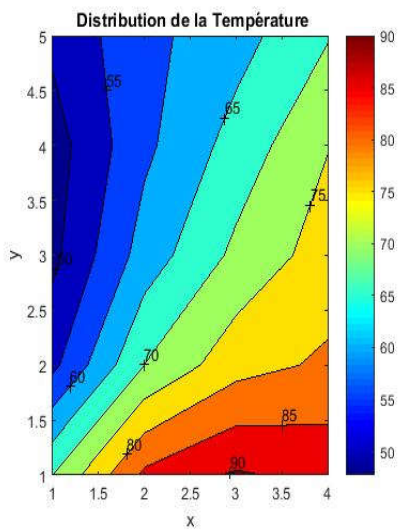
- Les résultats obtenus avec (nx=4 ny=5)



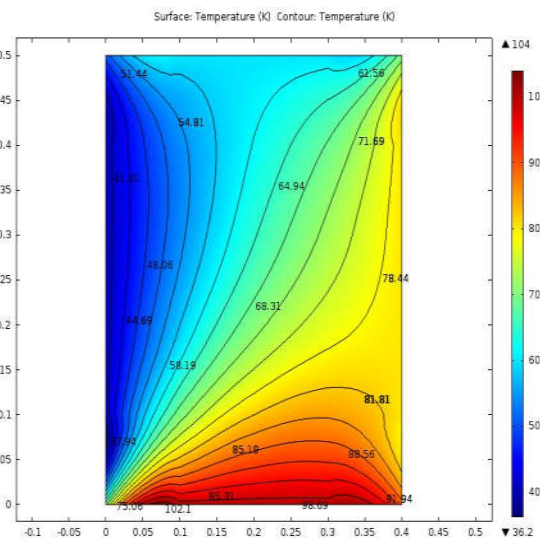
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 22. La distribution et les isothermes de la température avec une condition aux limites *Dirichlet* (nx=4 ny=5) méthode TDMA

- Les résultats obtenus avec (nx=40 ny=50)

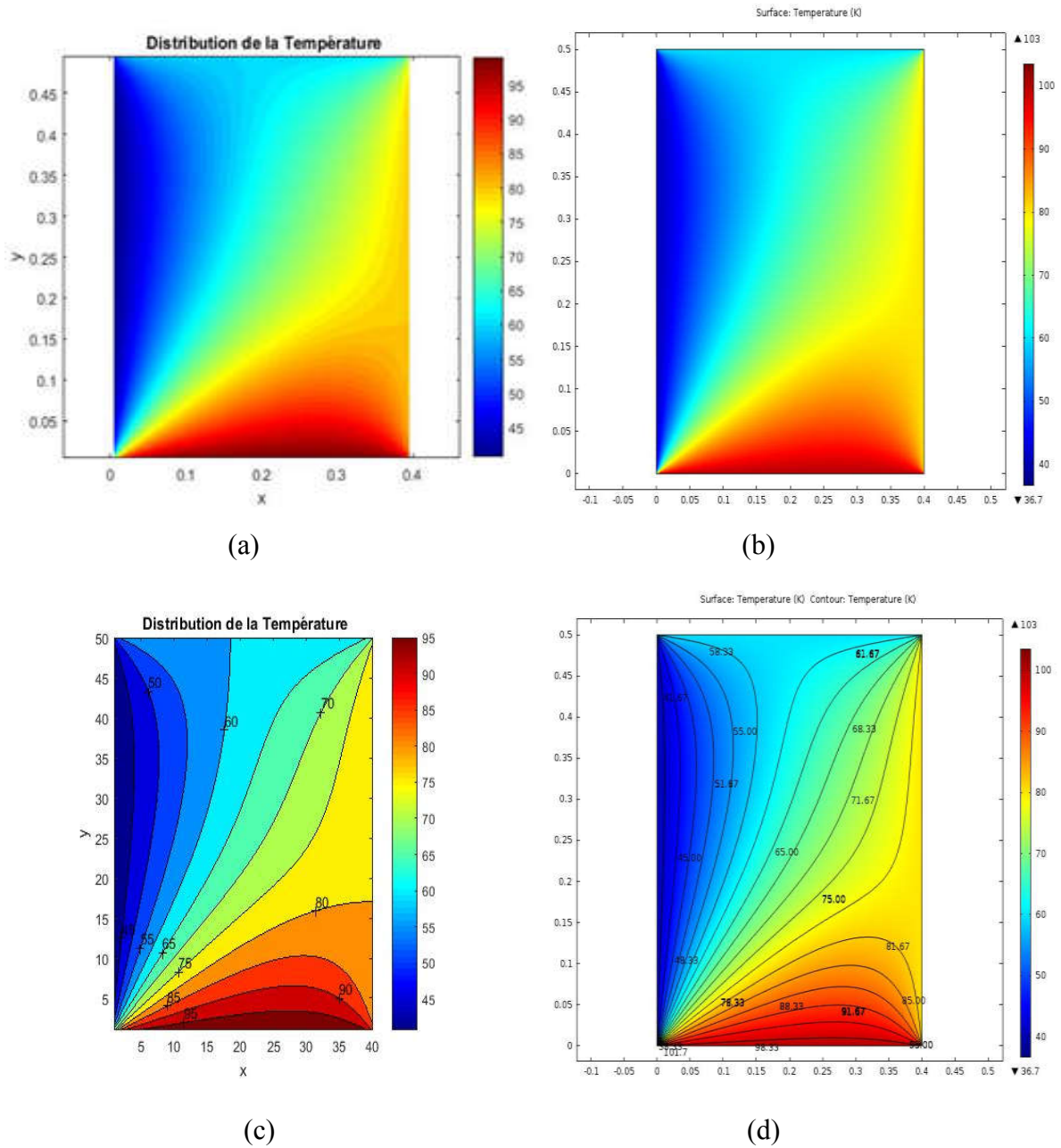


Figure 23. La distribution et les isothermes de la température avec une condition aux limites *Dirichlet* ($n_x=40$ $n_y=50$) méthode TDMA

- Les résultats obtenus avec ($n_x=80$ $n_y=100$)

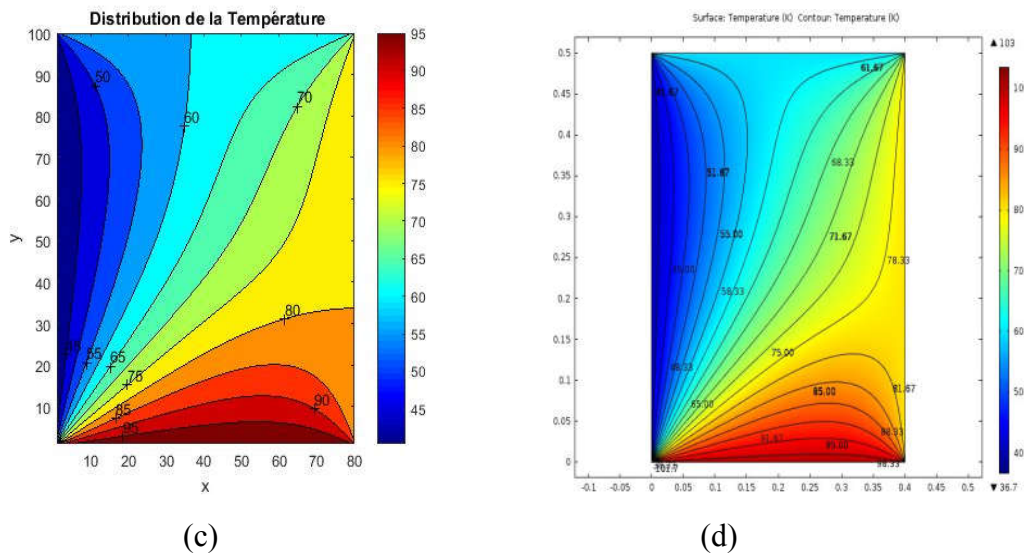
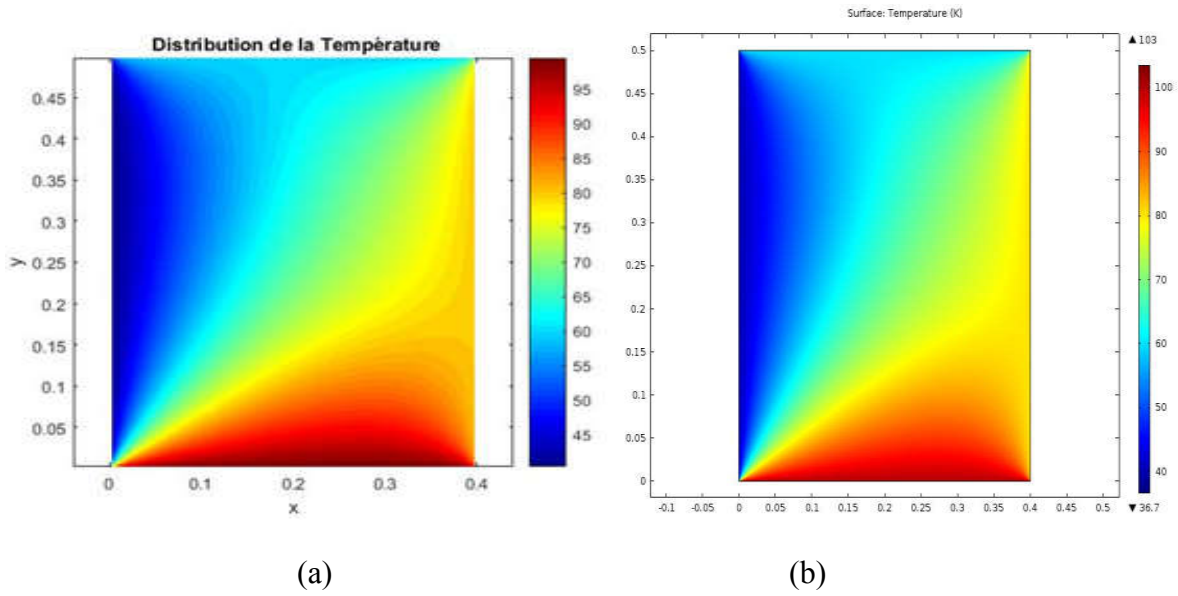
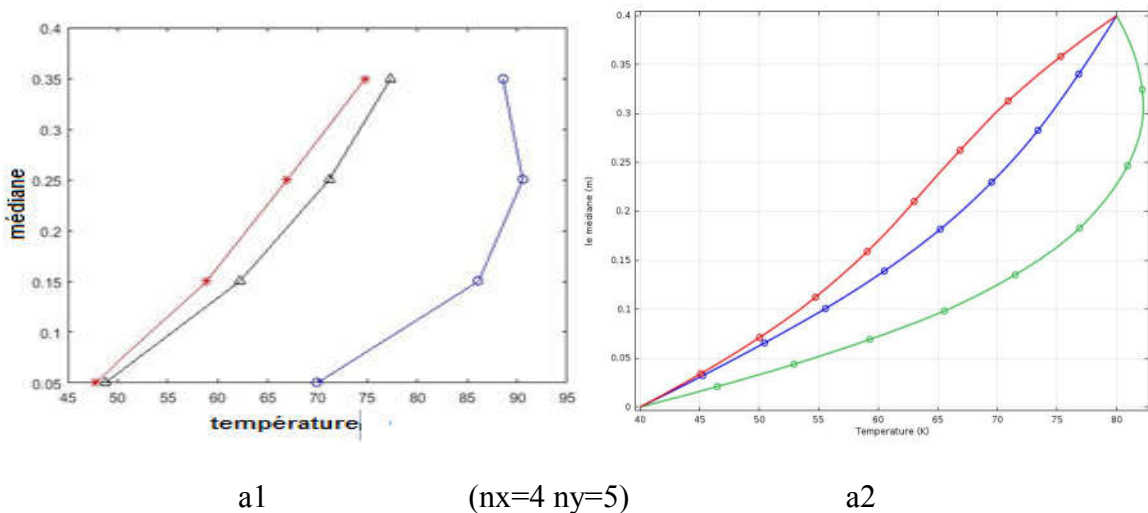
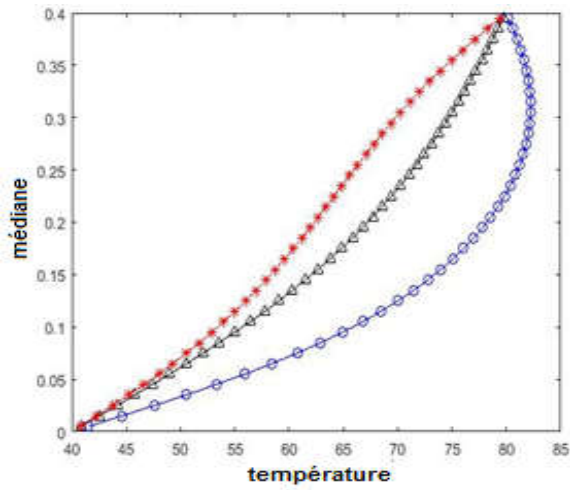
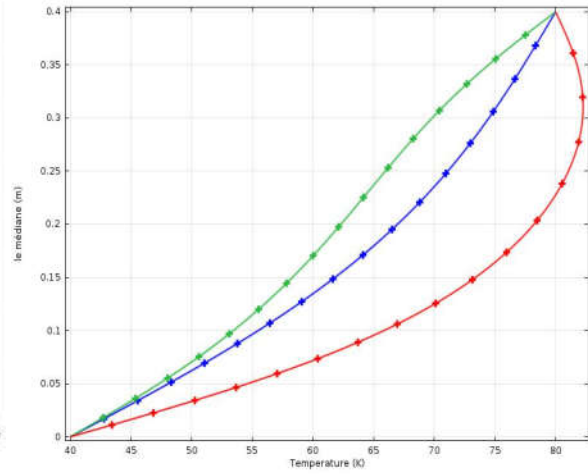


Figure 24. La distribution et les isothermes de la température avec une condition aux limites **Dirichlet** ($n_x=80$ $n_y=100$) méthode TDMA

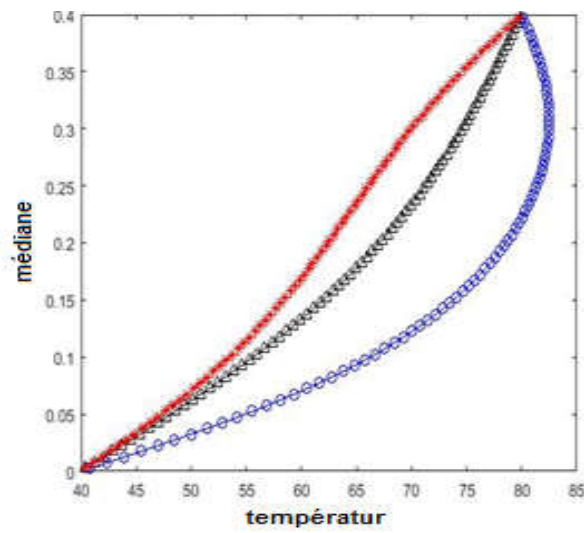




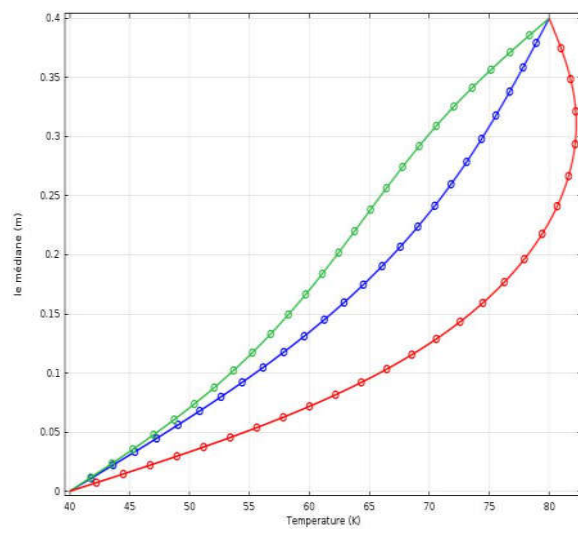
b1 (nx=40 ny=50)



b2



c1 (nx=80 ny=100)



c2

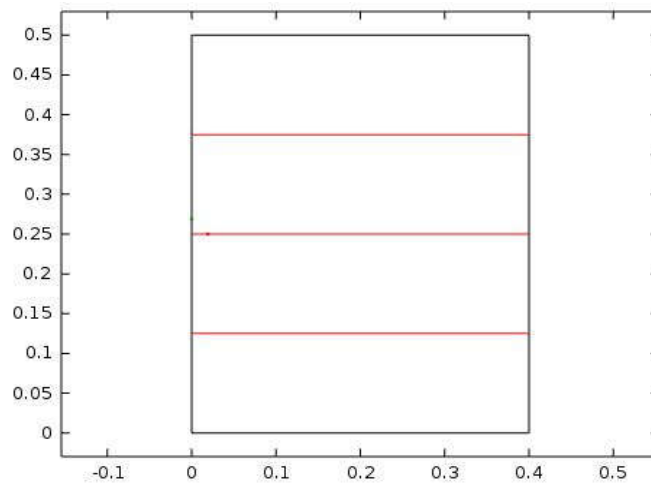


Figure 25. (a1, a2, b1, b2, c1 et c2) Représente La distribution de la température, le long des trois lignes : la médiane, au-dessus et en-dessous de la médiane par **MATLAB** et **COMSOL**

V.2.1.1.1 Discussions :

Les figures 22,23 et 24 représentent la comparaison des résultats numériques entre le code de calcul **MATLAB** et **COMSOL** dans la condition aux limites **Dirichlet**, on remarque une concordance entre les résultats obtenus par les deux codes , sauf pour un maillage grossier (4x5) on remarque des résultats non concordants.

La figure 25 représente la distribution de la température, le long des trois lignes : la médiane, au dessus et en dessous de la médiane par **MATLAB** et **COMSOL**, on remarque aussi une similarité entre les résultats obtenus, sauf pour un maillage grossier (4x5) on remarque des résultats non similaires.

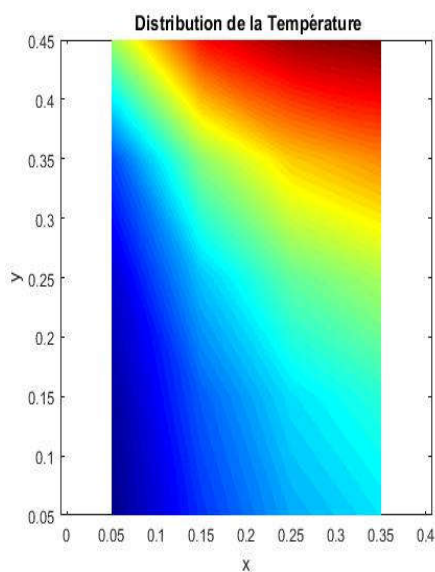
V.2.1.2 Deuxième cas

Dans le deuxième cas on discrétisé avec les conditions aux limites mixte de type **Dirichlet** et **Neumann** :

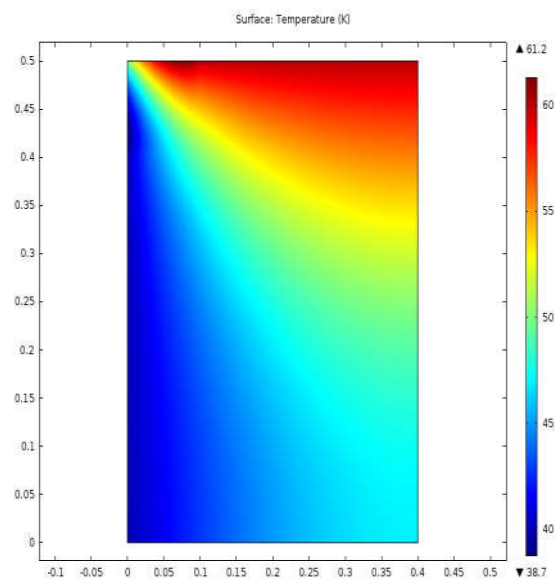
MATLAB

COMSOL

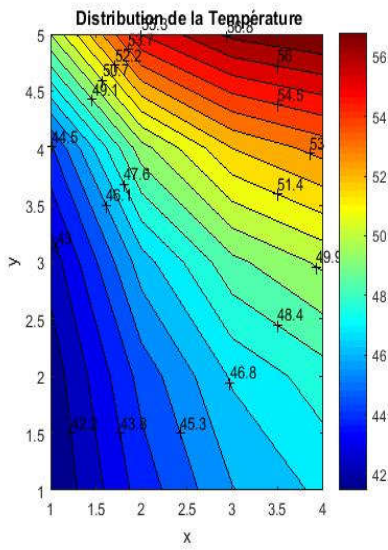
- Les résultats obtenus avec (nx=4 ny=5)



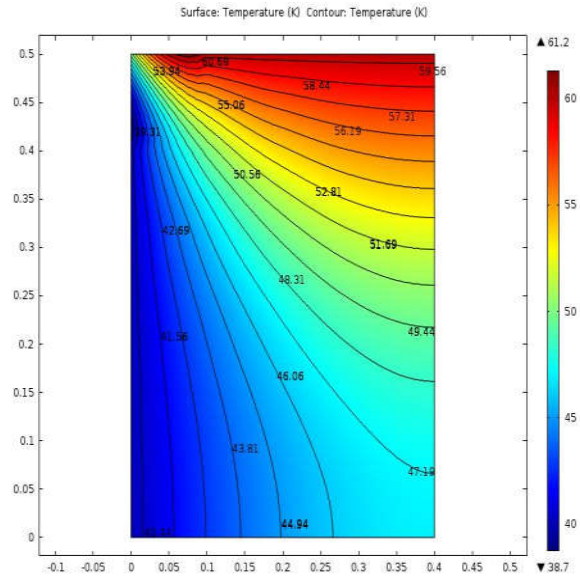
(a)



(b)



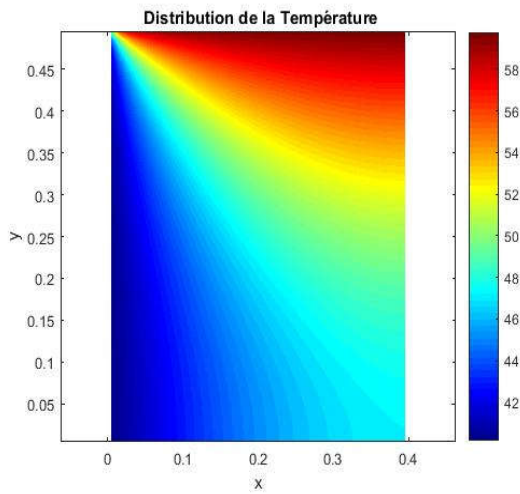
(c)



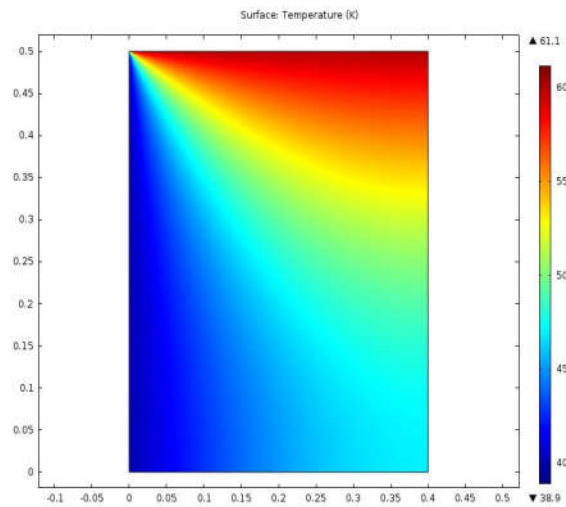
(d)

Figure 26. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites *Dirichlet* et *Neumann* ($n_x=4$ $n_y=5$) méthode TDMA

- Les résultats obtenus avec ($n_x=40$ $n_y=50$)



(a)



(b)

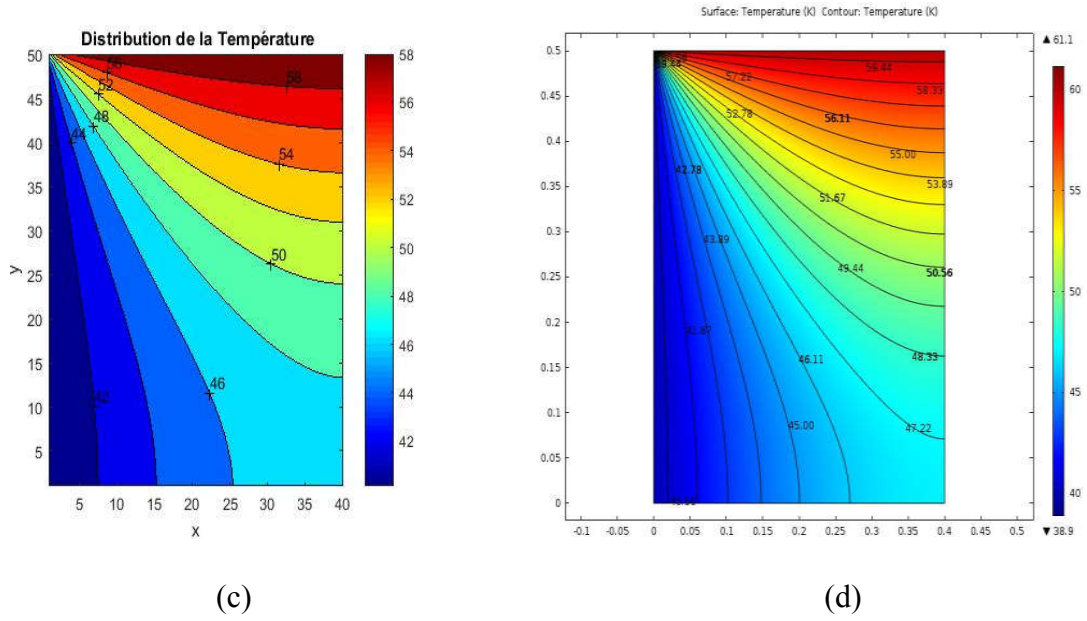
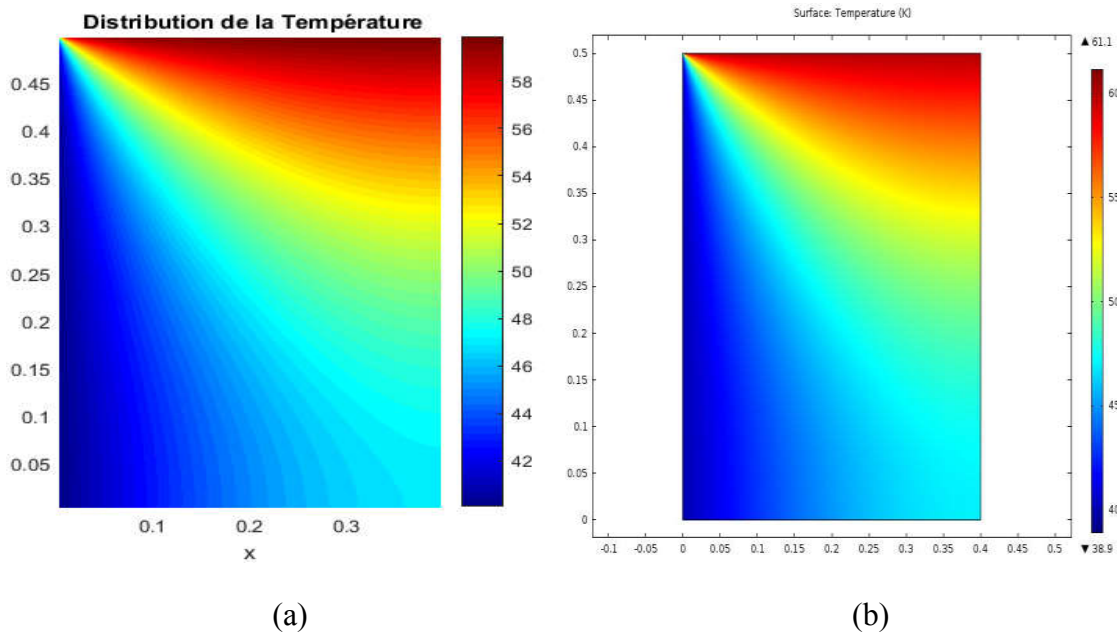
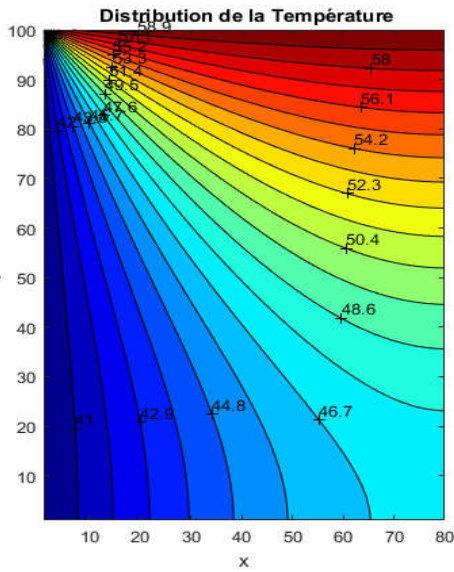


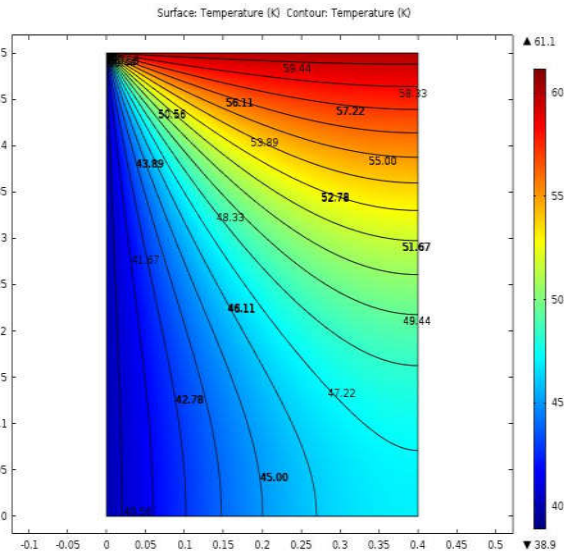
Figure 27. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites *Dirichlet* et *Neumann* ($n_x=40$ $n_y=50$) méthode TDMA

- Les résultats obtenus avec ($n_x=80$ $n_y=100$)



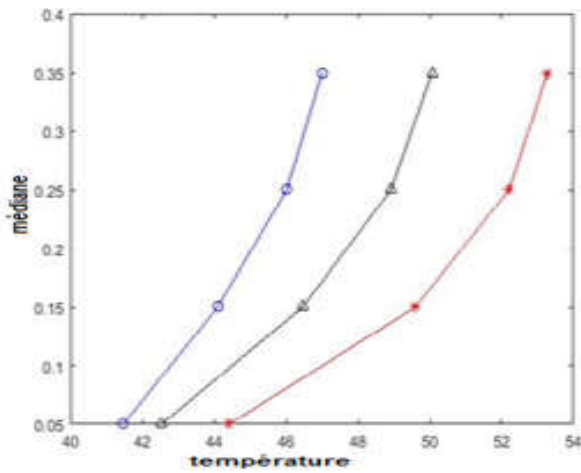


(c)



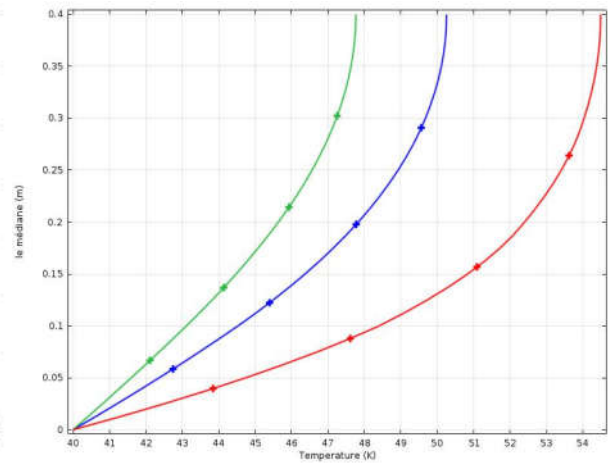
(d)

Figure 28. La Distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet et Neumann (nx=80 ny=100) méthode TDMA

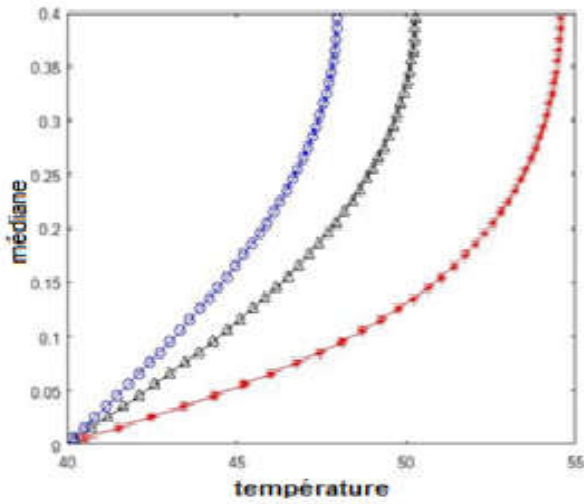


a1

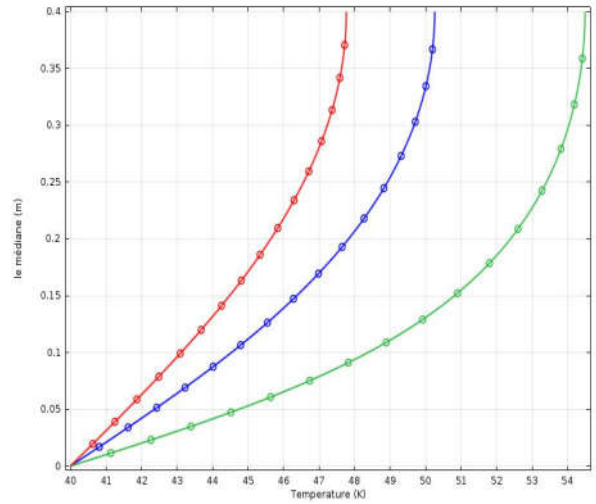
(nx=4 ny=5)



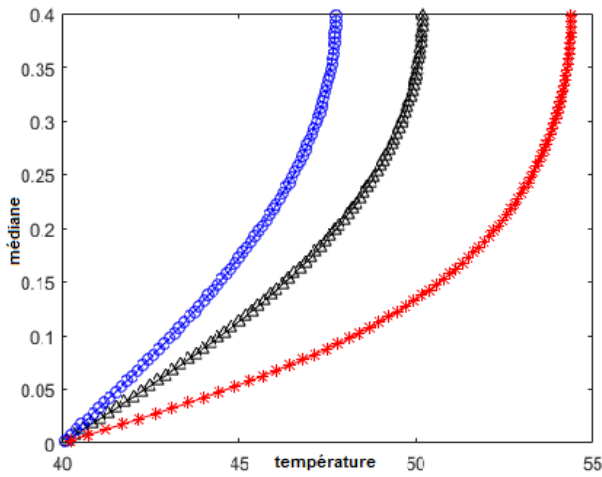
a2



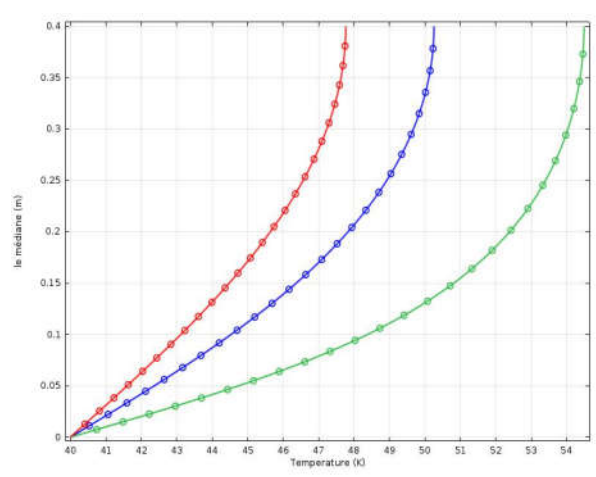
b1 (nx=40 ny=50)



b2



c1 (nx=80 ny=100)



c2

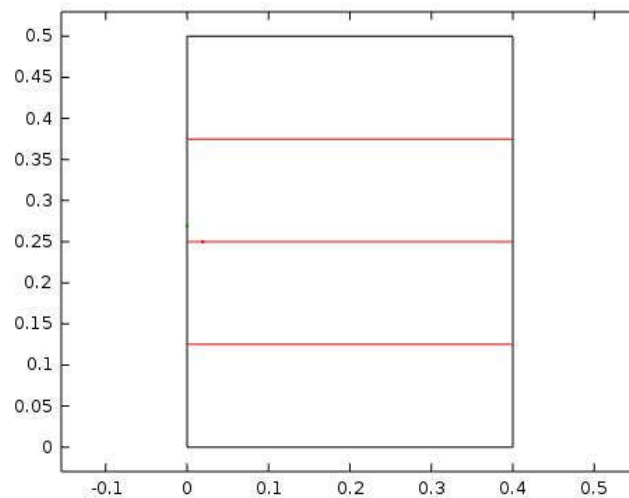


Figure 29. (a1, a2, b1, b2, c1 et c2) représente La distribution de la température, le long des trois lignes : la médiane, au-dessus et en-dessous de la médiane par **MATLAB** et **COMSOL**

V.2.1.2.1 Discussions

Les figures 26,27 et 28 représentent la comparaison des résultats numériques entre le code de calcul **MATLAB** et **COMSOL** dans les conditions aux limite **Dirichlet** et **Neumann**, on remarque aussi des résultats une similarité entre les résultats obtenus par les deux codes, sauf pour un maillage grossier (4x5) on remarque des résultats non concordants.

Une certaine instabilité par rapport au **COMSOL**, est très remarquée dans les cas des isothermes, cette instabilité disparaît pour un maillage plus fin.

La figure 29 représente la distribution de la température, le long des trois lignes : la médiane, au dessus et en dessous de la médiane par **MATLAB** et **COMSOL**, on remarque aussi une concordance entre les résultats obtenues, sauf pour un maillage grossier (4x5) les non similaires.

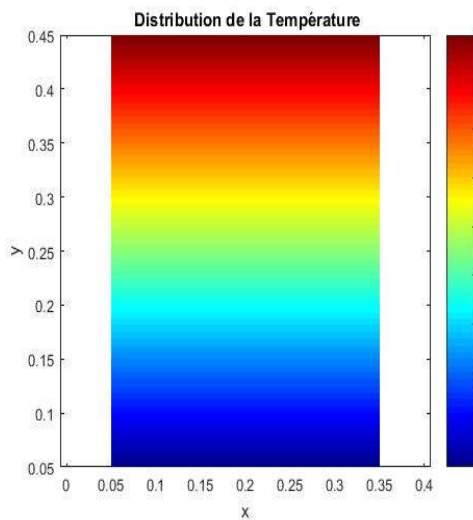
V.2.1.3 Troisième cas

Aussi dans le troisième cas on a discrétisé avec les conditions aux limites mixtes (type **Dirichlet**, **Neumann** et **Robin**)

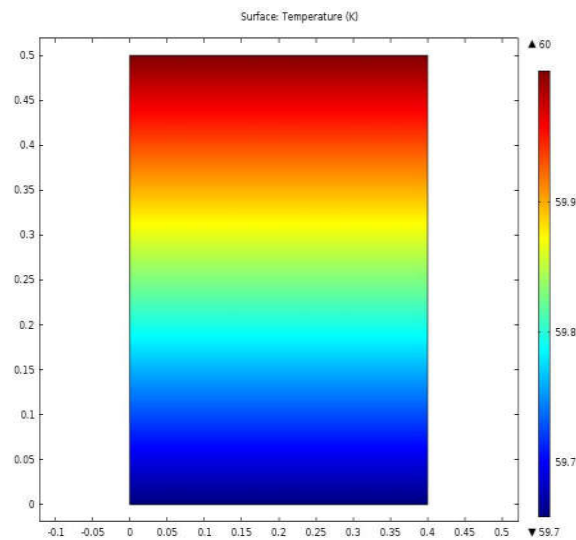
MATLAB

COMSOL

- Les résultats obtenus avec (nx=4 ny=5)



(a)



(b)

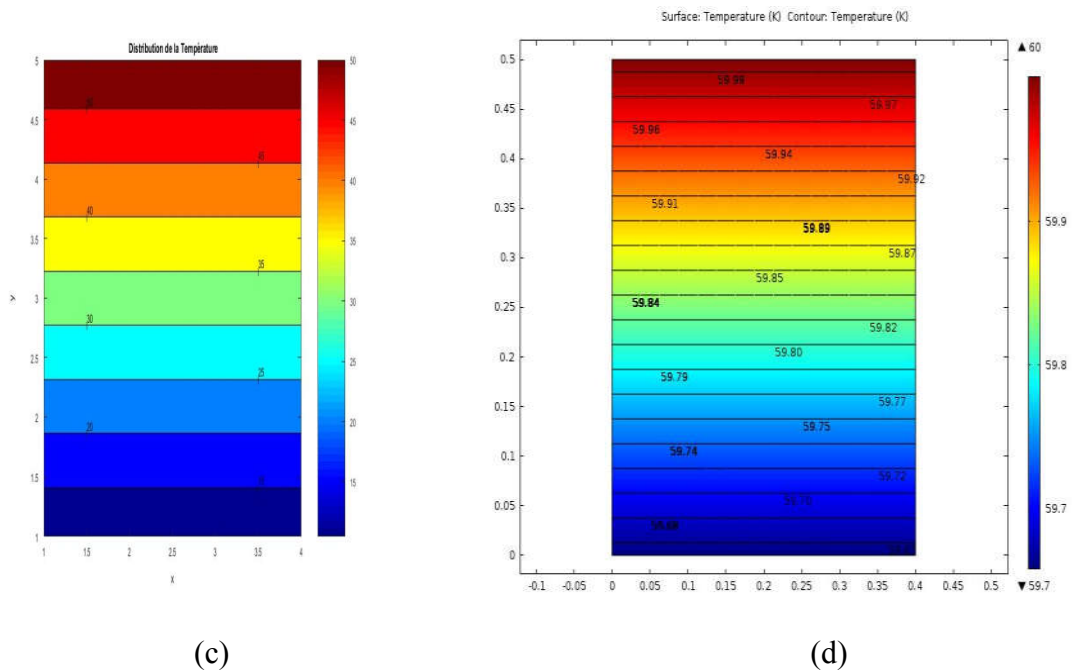
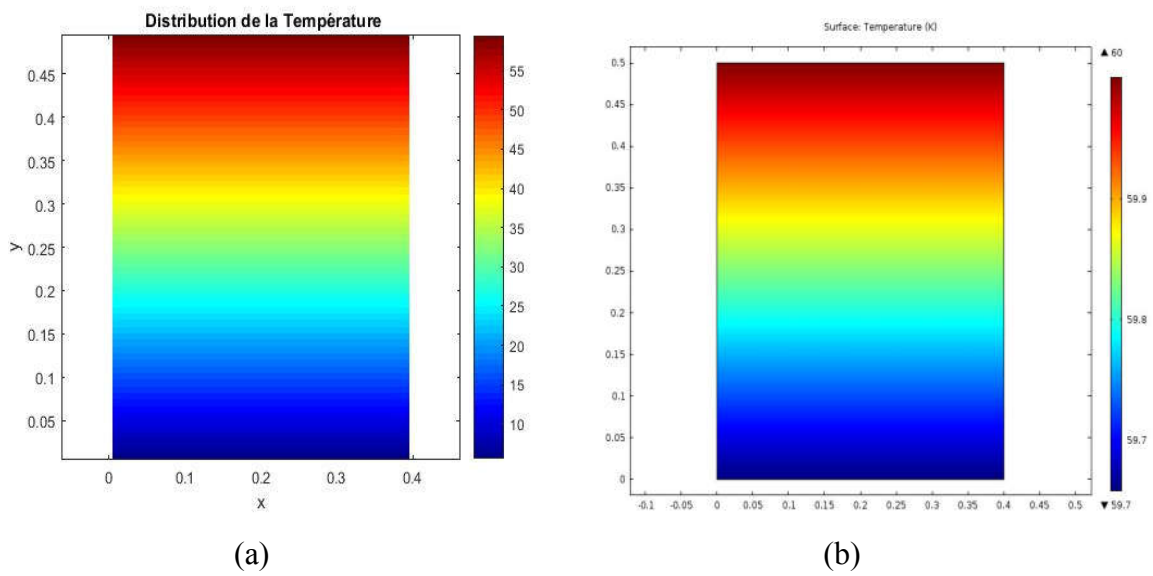
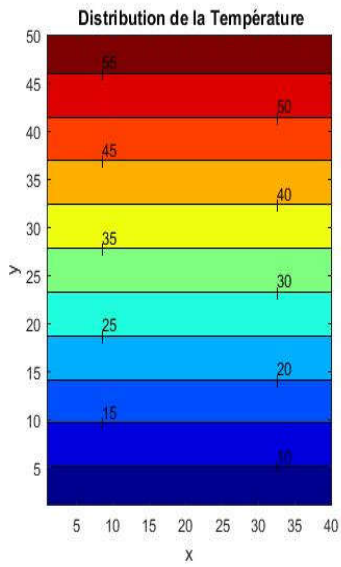


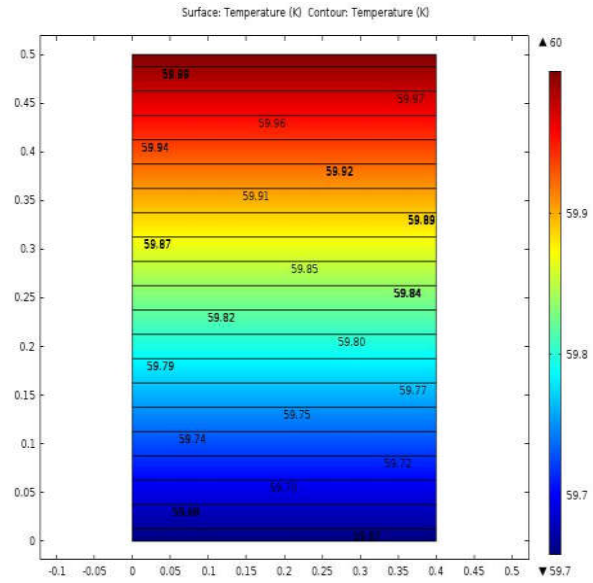
Figure 30. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites **Dirichlet**, **Neumann** et **Robin** ($n_x=4$ $n_y=5$) méthode TDMA

- Les résultats obtenus avec ($n_x=40$ $n_y=50$)





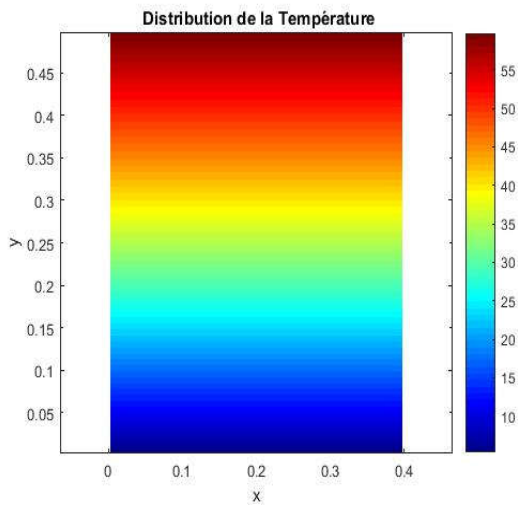
(c)



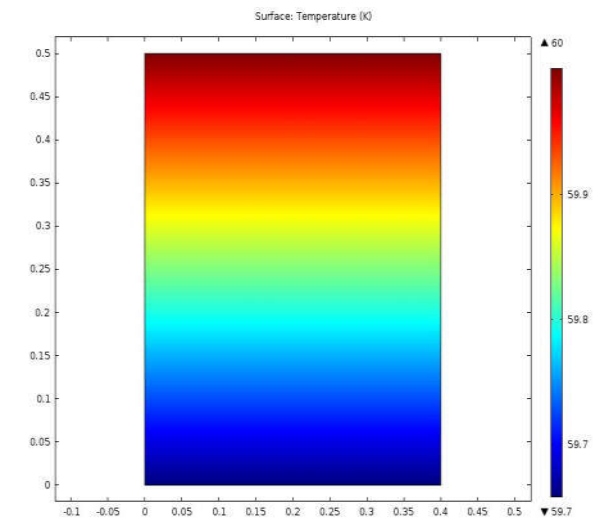
(d)

Figure 31. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites **Dirichlet**, **Neumann** et **Robin** ($n_x=40$ $n_y=50$) méthode TDMA

- Les résultats obtenus avec ($n_x=80$ $n_y=100$)



(a)



(b)

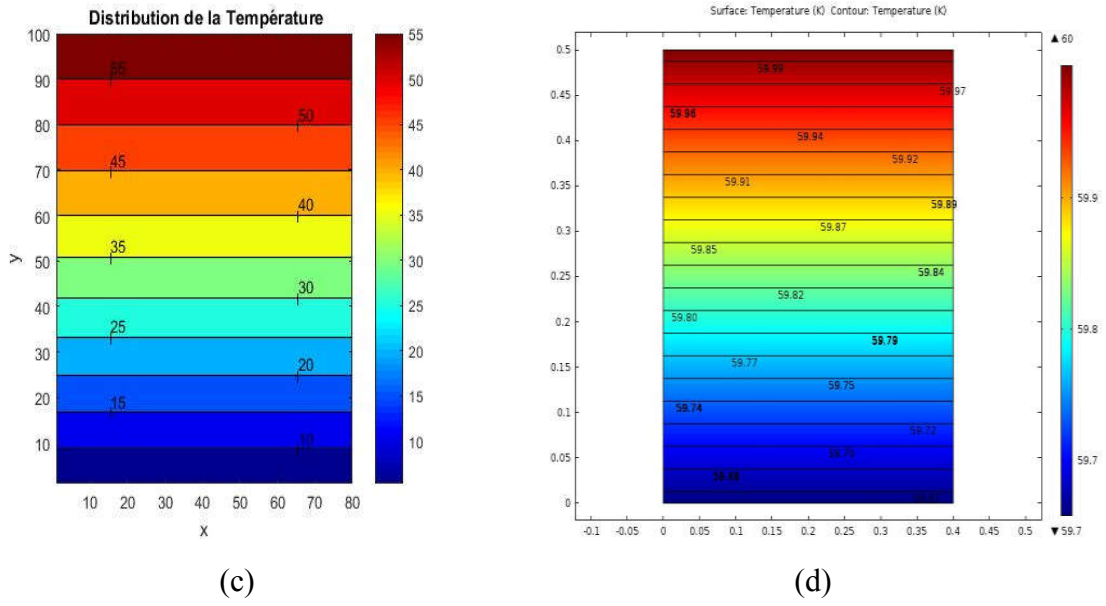
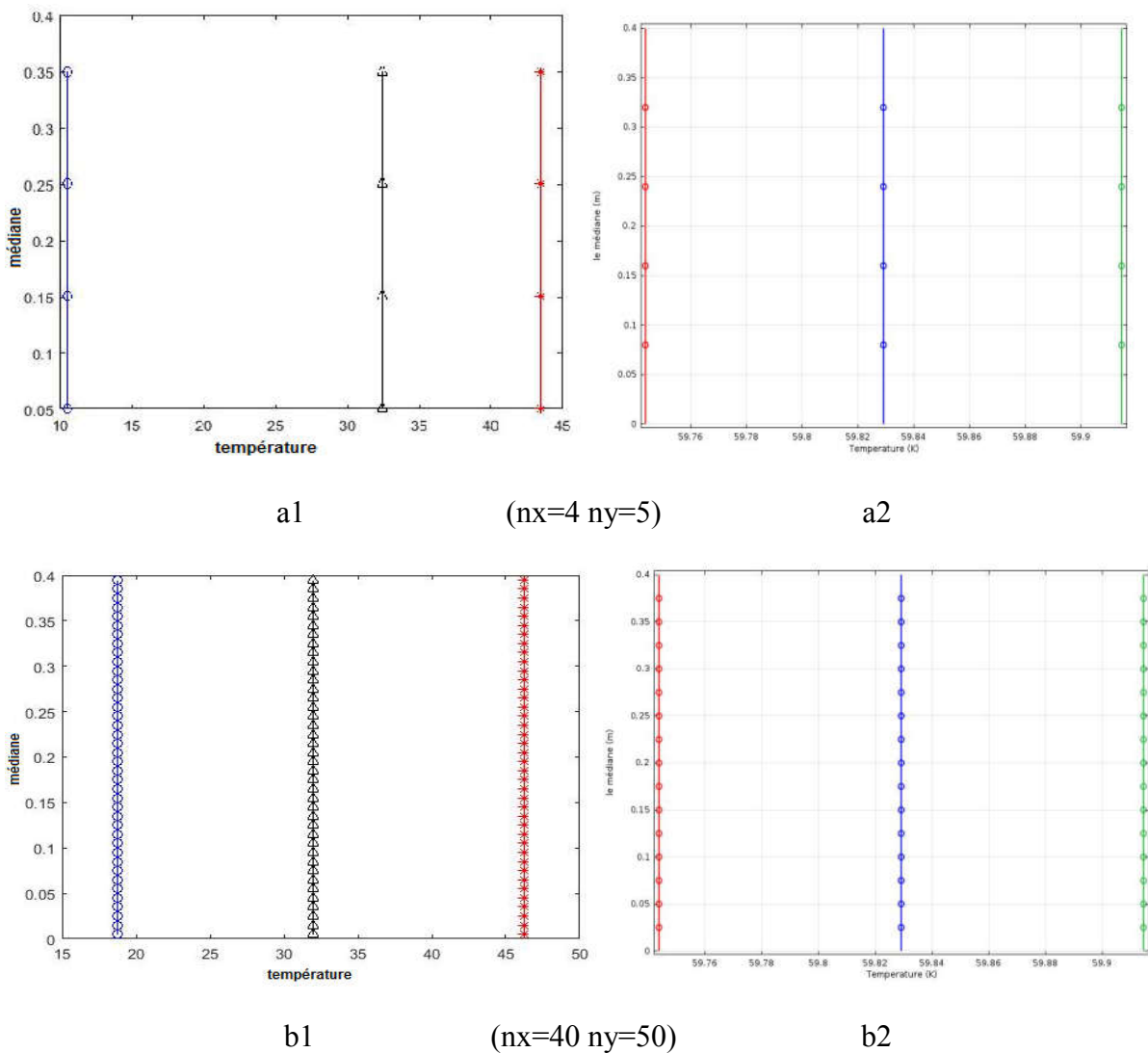


Figure 32. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet, Neumann et Robin ($n_x=80$ $n_y=100$) méthode TDMA



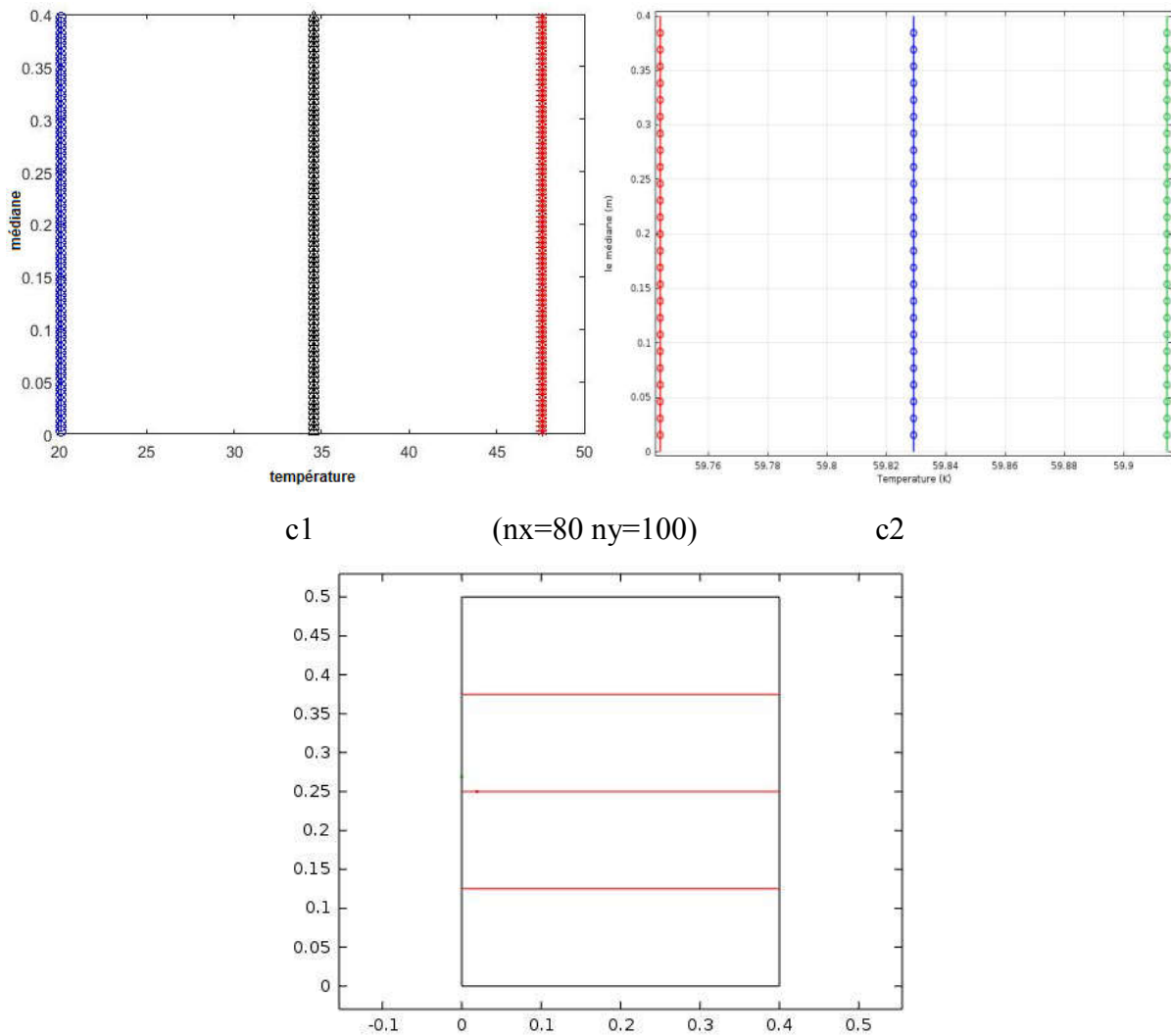


Figure 33. (a1, a2, b1, b2, c1 et c2) Représente La distribution de la température, le long des trois lignes : la médiane, au-dessus et en-dessous de la médiane par **MATLAB** et **COMSOL**

V.2.1.3.1 Discussions

Les figures 30,31 et 32 représentent la comparaison des résultats numériques entre le code de calcul **MATLAB** et **COMSOL** dans les conditions aux limites **Dirichlet Newman** et **Robin**, on remarque aussi des résultats similaires même par un maillage grossier, et une similarité entre les résultats obtenus entre les deux codes.

Une certaine instabilité par rapport au **COMSOL**, est très remarquée dans les cas des isothermes, cette instabilité disparaît pour un maillage plus fin.

La figure 33 représente La distribution de la température, le long des trois lignes : la médiane, au dessus et en dessous de la médiane par **MATLAB** et **COMSOL**, on remarque aussi résultats plus proche pour un maillage plus fin, et pour un maillage grossier (4x5) les résultats non similaires.

V.2.2 Les méthodes de résolution de la matrice

Lors de la discrétisations de l'équation de la chaleur par la méthode MVF on a obtenue une matrice creuse tridiagonal, cette matrice est généralement résolu par la méthode TDMA, mais on a voulu la résoudre avec d'autres méthodes classique utilisé pour les matrices pleine, pour voir la rapidité de l'exécution du code, par ces méthodes, on a effectué des simulations pour un maillage de (80x100):

- Gauss- Seidel Sans relaxation
- Gauss- Seidel avec relaxation
- Jacobi

Et pour connaitre plus d'informations sur ces méthodes vous pouvez voir les annexes, pages (pp 79-82).

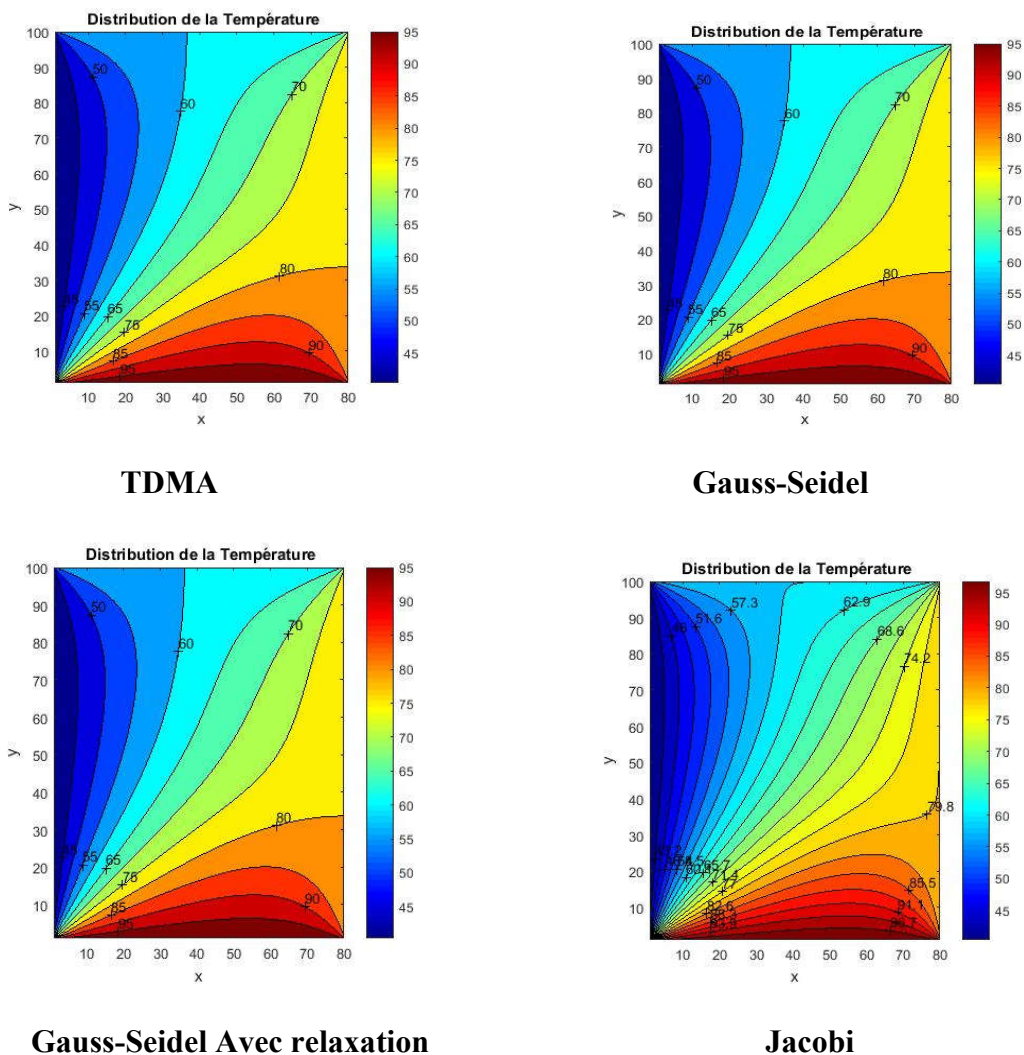


Figure 34. Les isothermes de la température avec une condition aux limites Dirichlet par les quatre méthodes

V.2.2.1 Discussions

La figure 34 représente Les isothermes de la température avec condition aux limites **Dirichlet** par les quatre méthodes, on remarque des résultats similaires, on voit la différence entre les résultats exécuté au niveau du nombre d'itération (temps d'exécution)

V.3 Tableau de comparaison des itérations entres les quatre méthodes

| tolérance | maillage | TDMA | GSSR | GSR | Jacobi |
|--------------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1×10^{-4} | 4×5 | 826 | 826 | 826 | 826 |
| 1×10^{-4} | 40 ×50 | 1873 | 1872 | 1875 | 1869 |
| 1×10^{-4} | 80×100 | 1954 | 1957 | 1959 | 1968 |

Tableau 4. Comparaison des itérations entres les quatre méthodes

V.3.1.1 Discussions

Le tableau 4 représente la comparaison des itérations entres les quatre méthodes, on remarque le nombre des itérations plus proche pour toutes les méthodes.

La méthode de TDMA reste la méthode la plus fiable, et surtout pour un maillage serré, elle converge rapidement

V.4 Conclusion :

En utilisant le langage **MATLAB**, on a écrit un code par la méthode des volumes finis, qui une méthode conservatrice on a pu déterminer les distributions des températures, les isothermes, la solution numérique de l'équation de la chaleur, ainsi la validation avec un code commercial connu, basé sur la méthode des éléments finis, on a comparé nos résultats pour différent maillage, en utilisant différente méthodes de résolution de la matrice tridiagonal. On a remarqué que les résultats obtenus étaient très satisfaisantes.

Conclusion générale

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire est destiné à mieux comprendre une étude numérique de transfert de chaleur par conduction dans une plaque rectangulaire, en se basant sur une étude numérique basé sur la discrétisation de l'équation de la chaleur 2D par la méthode des volumes finis, Les conditions aux limites sont de type **Dirichlet** (température imposé), **Neumann** (flux de chaleur nul) et **Robin** (flux convectif).

Le sujet traité nous a permis de connaitre et de mettre en œuvre plusieurs méthodes numériques :

- La résolution numérique et discrétisation de l'équation de la chaleur par la méthode la plus conservatrice, méthode des volumes finis (MVF).
- Méthode de résolution du système d'équation linéaire, TDMA, Gauss-Seidel avec et sans relaxation, ainsi que Jacobi.

Les résultats de simulations numériques sont obtenus avec un code de calcul que nous avons élaboré et testé par **MATLAB**, les résultats obtenus sont comparés avec **COMSOL**.

D'après les résultats obtenus nous concluons :

- le maillage ($n_x=32$ $n_y=40$) est le seuil minimum pour la variation de la distribution de la température le long de la médiane.
- une concordance entre les résultats obtenus par les deux codes sauf pour un maillage grossier (4×5) on remarque des résultats non concordants, pour les trois cas.
- Les résultats similaires entre les quatre méthodes, on voit la différence entre les résultats exécuté au niveau du nombre d'itération (temps d'exécution).
- la variation des itérations dans le maillage ($n_x=4$ $n_y=5$), mais pour un maillage plus fin les itérations plus proche pour toutes les méthodes sauf Jacobi.
- La méthode de TDMA reste la méthode la plus fiable, par ce quelle est la plus rapide de converge.

Dans les travaux futurs, nous suggérons d'élargir ce travail par :

La résolution de l'équation de convection-diffusion, et celle de Navier-Stokes par la méthode des volumes finis dans un maillage décalé, on a utilisant les trois variables (u , v , p), et validé les résultats obtenus avec les benchmarks de **Vahl Davis**, et de **Ghia** d'une cavité carré différentiellement chauffée, une cavité avec un mur en mouvement (Lid driven cavity).

Références bibliographique

Références bibliographique

Références bibliographiques

- [1] M. T. Manzari and M. T. Manzari, “ON Numerical solution of hyperbolic heat conduction,” *numerical method in biomedical engineering* .,vol. 866, no. October 1998, pp. 853–866, 1999.
- [2] A. Grine, J. Y. Desmons, and S. Harmand, “Models for transient conduction in a flat plate subjected to a variable heat flux,” *Appl. Therm. Eng.*, vol. 27, no. 2–3, pp. 492–500, 2007.
- [3] A. Gersborg-Hansen, M. P. Bendsøe, and O. Sigmund, “Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 31, no. 4, pp. 251–259, 2006.
- [4] A. V. Itagi, “Finite volume method for the fourier heat conduction in layered media with a moving volume heat source,” *Japanese J. Appl. Physics, Part 1 Regul. Pap. Short Notes Rev. Pap.*, vol. 46, no. 4 A, pp. 1482–1489, 2007.
- [5] J. T. S. A. Diószegi, É. Diószegi, J. Tóth, “Modelling and simulation of heat conduction in 1-D polar spherical coordinates using control volume-based finite difference method,” *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, vol. 26, no. 1, pp. 2–17, 2015.
- [6] G. Sachdeva, K. S. Kasana, and R. Vasudevan, “Heat transfer enhancement by using a rectangular wing vortex generator on the triangular shaped fins of a plate-fin heat exchanger,” *Heat Transf. - Asian Res.*, vol. 39, no. 3, pp. 151–165, 2010.
- [7] S. Mazumder, “Comparative Assessment of the Finite Difference, Finite Element, and Finite Volume Methods for a Benchmark One-Dimensional Steady-State Heat Conduction Problem,” *J. Heat Transfer*, vol. 139, no. 7, p. 71301, 2017.
- [8] Q. Xue, X. F. Xiao, and N. Z. Fan, “Heat Conduction Equation Finite Volume Method to Achieve on MATLAB,” *Mech. Eng. Intell. Syst. Pts 1 2*, vol. 195–196, pp. 712–717, 2012.
- [9] S. Murakami and Y. Asako, “A finite volume method on distorted quadrilateral meshes for discretization of the energy equation’s conduction term,” *Heat Transf. - Asian Res.*, vol. 42, no. 2, pp. 163–184, 2013.
- [10] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch, “Geometric numerical integration for

- complex dynamics of tethered spacecraft,” *Proc. 2011 Am. Control Conf.*, vol. m, no. March, pp. 1885–1891, 2011.
- [11] W. Li, B. Yu, X. Wang, P. Wang, and S. Sun, “A finite volume method for cylindrical heat conduction problems based on local analytical solution,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 55, no. 21–22, pp. 5570–5582, 2012.
- [12] P. Duda, “Finite element method formulation in polar coordinates for transient heat conduction problems,” *J. Therm. Sci.*, vol. 25, no. 2, pp. 188–194, 2016.
- [13] O. N. T. H. E. Effect *et al.*, “A Riemann-Hilbert problem for a heat conduction in an infinite plate with a rectangular hole,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 16, no. 10, pp. 1941–1943, 1973.
- [14] H. T. Kim, B. W. Rhee, and J. H. Park, “Application of the finite volume method to the radial conduction model of the CATHENA code,” *Ann. Nucl. Energy*, vol. 33, no. 10, pp. 924–931, 2006.
- [15] R. Chaabane, F. Askri, and S. Ben Nasrallah, “Analysis of two-dimensional transient conduction-radiation problems in an anisotropically scattering participating enclosure using the lattice Boltzmann method and the control volume finite element method,” *Comput. Phys. Commun.*, vol. 182, no. 7, pp. 1402–1413, 2011.
- [16] C. Luo, B. Moghtaderi, and A. Page, “Modelling of wall heat transfer using modified conduction transfer function, finite volume and complex Fourier analysis methods,” *Energy Build.*, vol. 42, no. 5, pp. 605–617, 2010.
- [17] S. Han, “Finite volume solution of two-step hyperbolic conduction in casting sand,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 93, pp. 1116–1123, 2016.
- [18] S. Singh, P. K. Jain, and Rizwan-uddin, “Analytical solution to transient heat conduction in polar coordinates with multiple layers in radial direction,” *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 47, no. 3, pp. 261–273, 2008.
- [19] J. J. J. Stefaniak, “AN APPROXIMATE SOLUTION OF HEAT CONDUCTION EQUATION WITH MIXED,” *Mech. Res. Commun.*, vol. 25, no. 6, pp. 631–636, 1998.
- [20] A. Evgrafov, M. M. Gregersen, and M. P. Sorensen, “Convergence of cell based finite volume discretizations for problems of control in the conduction coefficients,” *ESAIM*
-

- Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 45, no. 6, pp. 1059–1080, 2011.
- [21] S. Han, “Finite volume solution of a 1-D hyperbolic conduction equation,” *Numer. Heat Transf. Part A Appl.*, vol. 67, no. 5, pp. 497–512, 2015.
- [22] Z.Abdallah, “DETERMINATION DU CHAMP DE TEMPERATURES DANS UNE CAVITE PLEINE EN UTILISANT LA METHODE MIXTE VOLUMES FINIS – ELEMENTS FINIS Soutenu,” UNIVERSITE DE OUARGLA, 2004.
- [23] K. D. L.Hafnaoui, “Optimisation du bilan thermique d’un circuit de refroidissement du solvant lourd en présence du phénomène d’encrassement,” UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED, 2015.
- [24] J.Brau, *Transferts de chaleur et de masse . INSA .LYON*. 2006.
- [25] H.abdelkrim, *Transferts Thermique*. Dar-El-Djazairia.Alger. 2001.
- [26] M. Djamel, “Étude de l’influence des paramètres climatiques sur la température du sol (application au site de Biskra),” Université de Biskra Faculté, 2013.
- [27] W. KORICHI, “Simulation numérique d’une plaque bidimensionnelle avec source de chaleur,” Université Mohamed khider – BISKRA –, 2014.
- [28] K. Fayçal, “Conversion thermodynamique de l’énergie solaire: Etude et modélisation d’un capteur solaire,” UNIVERSITE DE BATNA, 2014.
- [29] M.Gacem, “Comparaison Entre l’Isolation Thermique Extérieure et Intérieure d’une pièce D’un Habitat Situé Dans Le Site De Ghardaïa,” L’UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAID-TLEMCEN, 2011.
- [30] E.Goncalvès, *Méthodes et Analyse Numériques*. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble. 2007.
- [31] N.Ouassila, “Etude et modélisation des paliers planaires,” UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE, 2009.
- [32] H.Karima, “ETUDE DU TRANSFERT DE CHALEUR A TRAVERS UNE AILETTE VERTICALE,” de constantine.
- [33] M.Younes, “Etude Numérique Comparative Entre Deux Types de Chicane et Ailettes (Trapézoïdale et Triangulaire) Utilisées Pour Améliorer les Performances des Capteurs
-

Solaires Plans à Air.”,” Abou Bekr Belkaïd Tlemcen, 2012.

Annexes

Annexes

Annexes A : code MATLAB

MATLAB (matrix laboratory) est un langage de programmation de quatrième génération émulé par un environnement de développement du même nom, il est utilisé à des fins de calcul numérique. Développé par la société The MathWorks, **MATLAB** permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs.

- Exemple de calcul des coefficients des nœuds sud

```

% Noeud SE (4) %----noeud---4---SE-----
aw(nx,1)=kw*Aw/dx;
ae(nx,1)=0.;
as(nx,1)=0.;
an(nx,1)=kn*An/dy;
Sp(nx,1)=-(2*ke*Ae/dx + 2*ks*As/dy);
Su(nx,1)=2*ke*Ae/dx*T3+ 2*ks*As/dy*T4;
ap(nx,1)= an(nx,1)+ aw(nx,1)+ as(nx,1)+ ae(nx,1)- Sp(nx,1);
a(nx)=-aw(nx,1);
b(nx)=ap(nx,1);
c(nx)=-ae(nx,1);
d(nx)=Su(nx,1) + an(nx,1)*Told(nx,2);
erreur=erreur+ abs(an(nx,1)*Told(nx,2)+aw(nx,1)*T(nx-1,1)+Su(nx,1)-ap(nx,1)*T(nx,1));
Frp = Frp + abs(ap(nx,1)*T(nx,1));
%----fin cellule Sud--1---2---3---4-----
%-----TDMA-----
T(:,1) = MyTDMA(a,b,c,d);

```

- Exemple de calcul des coefficients des nœuds de centre

```

%----noeuds intr---6--7--10--11--14--15---
for i=2:nx-1
aw(i,j)=kw*Aw/dx;
ae(i,j)=ke*Ae/dx;
as(i,j)=ks*As/dy;
an(i,j)=kn*An/dy;
Sp(i,j)=0.;
Su(i,j)=0.;
ap(i,j)=as(i,j)+ an(i,j)+ ae(i,j)+ aw(i,j)- Sp(i,j);
a(i)=-aw(i,j);
b(i)=ap(i,j);
c(i)=-ae(i,j);
d(i)=Su(i,j) + an(i,j)*Told(i,j+1)+as(i,j)*T(i,j-1);
erreur=erreur+abs(ae(i,j)*Told(i+1,j)+an(i,j)*Told(1,j+1)+as(i,j)*T(1,j-1)+aw(i,j)*T(i-1,j)+Su(i,j)-ap(i,j)*T(i,j));
Frp = Frp + abs(ap(i,j)*T(i,j));
end

```

Annexe B : méthode TDMA

L'algorithme matriciel tridiagonal (TDMA), également connu sous le nom d'algorithme de Thomas, est une forme simplifiée d'élimination gaussienne qui peut être utilisée pour résoudre des systèmes d'équations tridiagonales. Un système tridiagonal peut être écrit comme :

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

Où $a_1 = 0$ et $c_n = 0$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} a_p & -a_w & 0 & 0 \\ -a_e & a_p & -a_w & 0 \\ 0 & -a_e & a_p & -a_w \\ 0 & 0 & -a_e & a_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Su_1 + a_s T_s + a_n T_n \\ Su_2 + a_s T_s + a_n T_n \\ Su_3 + a_s T_s + a_n T_n \\ Su_4 + a_s T_s + a_n T_n \end{bmatrix}$$

Algorithm :

```

function Phi = MyTDMA(a,b,c,d)
nx=length(a);
for k=2:nx
    m=a(k)/b(k-1);
    b(k)=b(k)-m*c(k-1);
    d(k)=d(k)-m*d(k-1);
end
Phi(nx)=d(nx)/b(nx);
%....phase de substitution en arriere....%
for k=nx-1:-1:1
    Phi(k)=(d(k)-c(k)*Phi(k+1))/b(k);
end

```

Annexe C : Méthode de Gausse-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative de résolution d'un système linéaire de la forme $Ax = b$.

Le principe de la méthode peut s'étendre à la résolution de systèmes d'équations non linéaires et à l'optimisation.

- Exemple de calcul par le code **MATLAB**

```

%----j=1-----
%----noeud---1---SW-----
aw(1,1)=0.;
ae(1,1)=ke*Ae/dx;
as(1,1)=0.;
an(1,1)=kn*An/dy;
Sp(1,1)=-(2*kw*Aw/dx + 2*ks*As/dy);
Su(1,1)=2*kw*Aw/dx*T1+ 2*ks*As/dy*T4;
ap(1,1)=ae(1,1)+ an(1,1)+ aw(1,1)+ as(1,1)- Sp(1,1);
a(1)=-aw(1,1);
b(1)=ap(1,1);
c(1)=-ae(1,1);
d(1)=Su(1,1) + an(1,1)*Told(1,2);
erreur = erreur + abs(ae(1,1)*Told(2,1)+an(1,1)*Told(1,2)+Su(1,1)-ap(1,1)*T(1,1));
Frp = Frp + abs(ap(1,1)*T(1,1));
% GAUSS-SEIDEL %%%%%%%%%%
T(1,1) = ( ae(1,1) *Told(2,1) + an(1,1)*Told(1,2) + Su(1,1))/ap(1,1);

```

Annexe D : Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi, due au mathématicien allemand Karl Jacobi, est une méthode itérative de résolution d'un système matriciel de la forme $Ax = b$. Pour cela, on utilise une suite x^k qui converge vers un point fixe x , solution du système d'équations linéaires.

- Exemple de calcul par le code **MATLAB**

```

%----noeuds-----18--19-----
for i=2:nx-1
    aw(i,ny)=kw*Aw/dx;
    ae(i,ny)=ke*Ae/dx;
    as(i,ny)=ks*As/dy;
    an(i,ny)=0.;
    Sp(i,ny)=-(2*kn*An/dy);
    Su(i,ny)=2*kn*An/dy*T2;
    ap(i,ny)=as(i,ny)+ aw(i,ny)+ae(i,ny)+an(i,ny)- Sp(i,ny);
    a(i)=-aw(i,ny);
    b(i)=ap(i,ny);
    c(i)=-ae(i,ny);
    d(i)=Su(i,ny)+as(i,ny)*T(i,ny-1);
    erreur=erreur + abs(ae(i,ny)*Told(i+1,ny)+as(i,ny)*T(i,ny-1)+aw(i,ny)*T(i-1,ny)+Su(i,ny)-ap(i,ny)*T(i,ny));
    Frp = Frp + abs(ap(i,ny)*T(i,ny));
    % Jacobi| %%%%%%%%%%
    T(i,ny) = ( aw(i,ny)*Told(i-1,ny)+ ae(i,ny)*Told(i+1,ny) + as(i,ny)*Told(i,ny-1)+ Su(i,ny))/ap(i,ny);
end

```

Résumé :

La méthode de simulation numérique de la conduction de la chaleur a 2 dimensions, dans une plaque rectangulaire, en utilisant la méthode des volumes finis avec un maillage structuré, des coordonnées cartésiennes et différents conditions aux limites, en utilisant le langage **MATLAB** comme outil de programmation a été élaboré.

Les résultats obtenus avec **MATLAB** sont comparés avec **COMSOL**, et ont permis de déterminer la distribution de la température et la solution numérique de l'équation de la chaleur.

Mots-clés : Conduction thermique, Volumes finis, **MATLAB**, **COMSOL**, simulation numérique.

ملخص

إن طريقة المحاكاة الرقمية لناقلية الحرارة ببعديها قد أنجزت في لوحة مستطيلة باستعمال طريقة الأحجام المنتهية مع شبكة منتظمة وأبعاد ديكارتية مع مختلف الشروط في الحدود، مستعملين برنامج ماتلاب كأداة برمجة. فالنتائج المتحصل عليها مع برنامج ماتلاب ومقارنتها مع برنامج كومسول سمحت بتحديد توزيع الحرارة والحل الرقمي لمعادلة الحرارة. **الكلمات المفتاحية:** الناقلية الحرارية، أحجام منتهية، برنامج ماتلاب، برنامج كومسول، محاكاة رقمية.

Abstract

A numerical simulation method of 2-dimensional heat diffusion, in a rectangular plate, using the finite volume method with a structured mesh and Cartesian coordinates, with different boundary conditions, using the **MATLAB** language as programming tool, was elaborated.

The results obtained with **MATLAB** are compared with **COMSOL**, permit to determine the temperature distribution and the numerical solution of the heat equation.

Keywords: Thermal Conduction, Finite Volume Method, **MATLAB**, **COMASOL**, Numerical Simulation.