

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
CENTRE UNIVERSITAIRE « SALHI AHMED » DE NAAMA



INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE TECHNOLOGIE

MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Energétique

Intitulé de Mémoire

**Modélisation par Eléments Finis d'un Problème Thermique  
Linéaire et Non Linéaire**

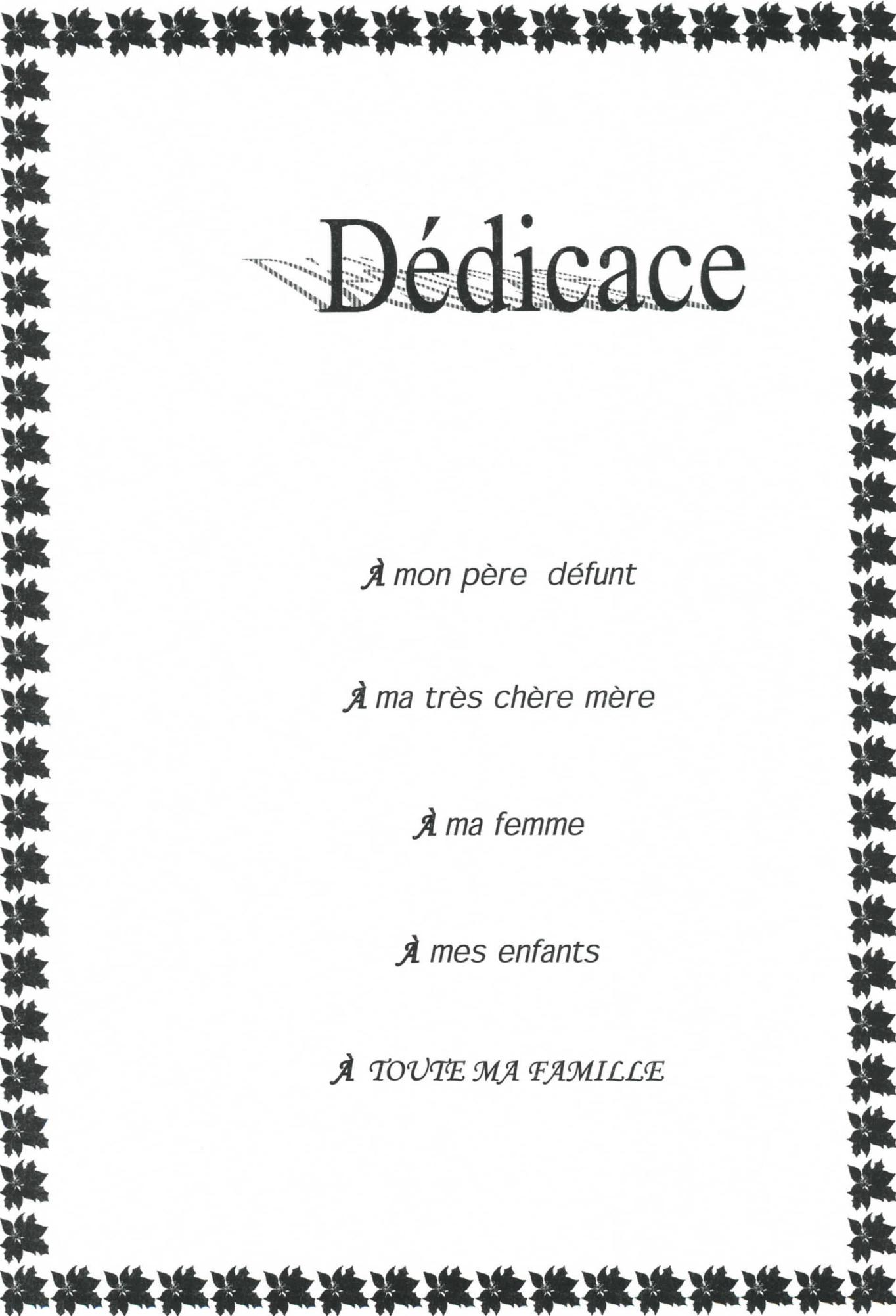
Présenté par :

**M. MANSOURI Omar**

Soutenu publiquement le : 18 mai 2017, devant le jury :

<b>M. BENDAHO Djelloul</b>	MAA	CU Naama	Président
<b>M. BELABED Zakaria</b>	MCB	CU Naama	Encadreur
<b>M. AMEUR Houari</b>	MCA	CU Naama	Examineur
<b>M. ZIANI ZAKARYA</b>	MCB	CU Naama	Examineur
<b>M TAIBI Nouredine</b>	Magistère	GAZODUC	Invité

**Année universitaire 2016-2017**



# Dédicace

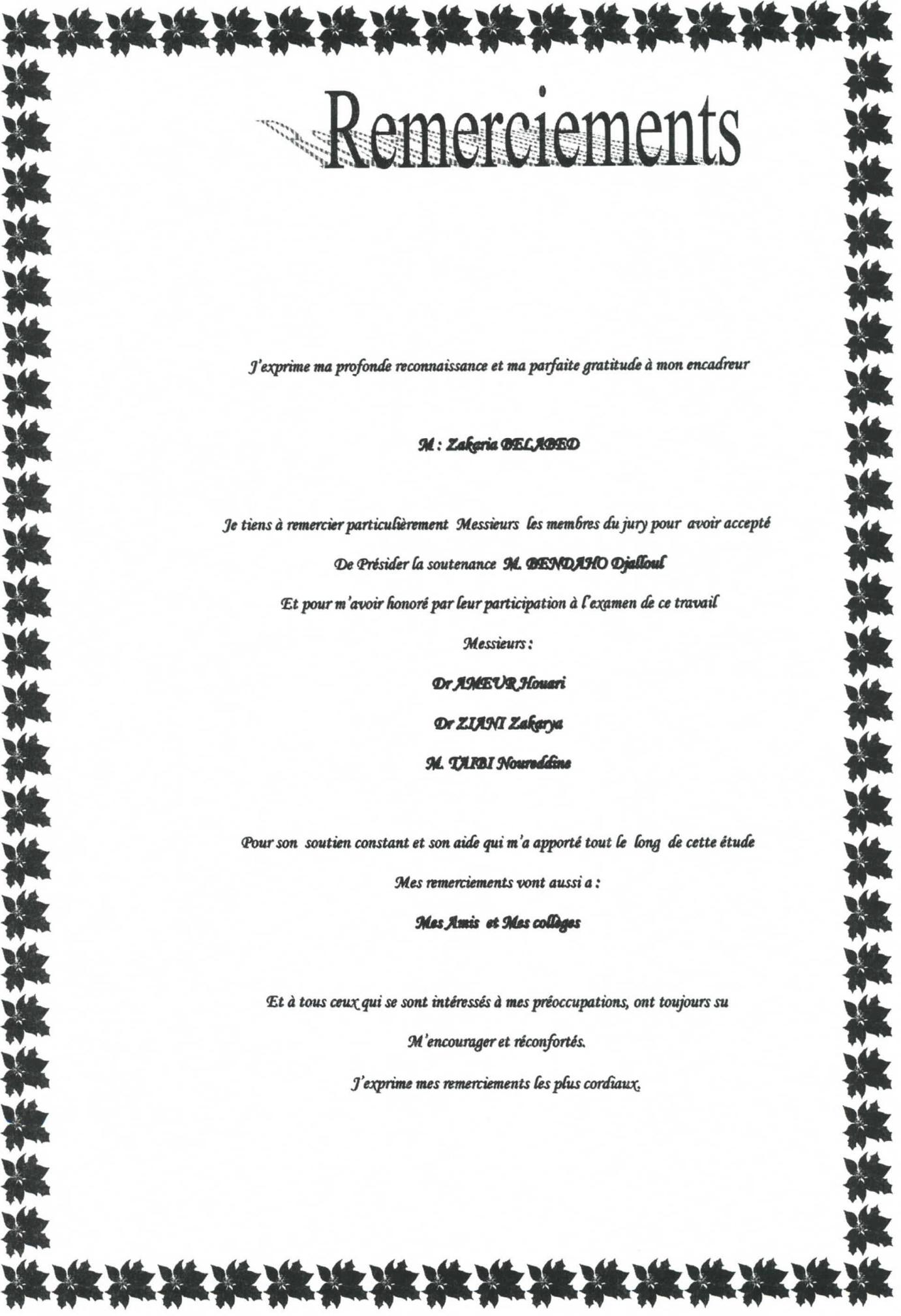
*À mon père défunt*

*À ma très chère mère*

*À ma femme*

*À mes enfants*

*À TOUTE MA FAMILLE*



# Remerciements

*J'exprime ma profonde reconnaissance et ma parfaite gratitude à mon encadreur*

**M : Zakaria BELABED**

*Je tiens à remercier particulièrement Messieurs les membres du jury pour avoir accepté*

*De Présider la soutenance M. BENDJHO Djalloul*

*Et pour m'avoir honoré par leur participation à l'examen de ce travail*

*Messieurs :*

**Dr AMEUR Houari**

**Dr ZIANI Zakarya**

**M. URBI Noureddine**

*Pour son soutien constant et son aide qui m'a apporté tout le long de cette étude*

*Mes remerciements vont aussi à :*

**Mes Amis et Mes collègues**

*Et à tous ceux qui se sont intéressés à mes préoccupations, ont toujours su*

*M'encourager et réconfortés.*

*J'exprime mes remerciements les plus cordiaux,*

---

---

# A

bstract

---

---

Knowledge of the distribution, the influence of temperature and the determination of the thermal field is a daily challenge for engineers and scientists in all fields, in order to describe exactly the physical phenomena observed.

It is in this spirit that our work is located and wants a study of theoretical and numerical nature, relating to the presentation a finite element model dedicated to the linear and nonlinear thermal analysis in the one-dimensional domains. This element has been programmed and implemented in a numerical code on Matlab.

**Keywords:** One-dimensional element, Heat transfer, Thermal conductivity, The finite element method, Numerical code on Matlab.

---

---

# Résumé

---

---

La connaissance de la distribution, l'influence de la température et la détermination du champ thermique constitue un challenge quotidien des ingénieurs et scientifiques dans tous les domaines, afin de décrire exactement les phénomènes physiques observés.

C'est dans cet esprit que notre travail se situe et se veut une étude de nature théorique et numérique, relative à la présentation un modèle en éléments finis dédiée à l'analyse thermique linéaire et non linéaire dans les domaines unidimensionnels. Cet élément a été programmé et implanté dans un code numérique sur Matlab.

**Mots clefs :** Élément unidimensionnel, Transferts thermique, Conductivité thermique, La méthode des éléments finis, Code numérique sur Matlab.

## ملخص

معرفة التوزيع، وتأثير درجة الحرارة وتحديد المجال الحراري تشكل تحديا يوميا للمهندسين والعلماء في جميع المجالات، من أجل وصف دقيق الظواهر الفيزيائية التي لوحظت. ومن هذا المنطلق عملنا على أن تكون الدراسة النظرية والعديدية على تقديم نموذج عنصر محدود مخصص للتحليل الحراري الخطي وغير الخطي في المجالات ذات بعد واحد. وقد تم التخطيط هذا البند وتنفيذها في البرنامج العددي في ماتلاب.

كلمات البحث: عنصر أحادي الأبعاد نقل الحرارة، التوصيل الحراري، طريقة العنصر المحدود، رمز رقمي على ماتلاب

# Table des Matière

N°	Titre	Page
	Résumé en trois langues	I
	Table des Matières	IV
	Liste des Figures & Tableaux	VI
	Notations & Abréviations	VII
	<b>Introduction Générale</b>	1
	<b>Chapitre I: Généralités sur les Transferts Thermiques</b>	
I.1)	Introduction	4
I.2)	Historique	4
I.3)	Les modes de transfert de chaleur	5
	a. La Conduction	5
	b. La Convection	9
	c. Le Rayonnement	12
	d. Modes de transfert de chaleur combinés	15
I.4)	Machines thermiques	15
	a. Définition	15
	b. Bilan énergétique et entropique d'une machine polytherme cyclique	16
I.5)	Echangeurs de chaleur	16
	a. Définition	16
	b. Technologie	16
	<b>Chapitre II: Méthodes de résolution d'un problème thermique</b>	
II.1)	Introduction	17
II.2)	Méthodes de résolution d'un problème thermique	18
	a. Méthodes analytiques	18
	b. Méthode expérimentale (réduite)	21
	c. Méthodes numériques	23
	<b>Chapitre III: Présentation du modèle linéaire</b>	
III.1)	Introduction et historique	26
III.2)	Formulation par éléments finis d'un modèle linéaire	28
	a. Méthode de résidus pondérés	30
	b. Intégration par parties	30
III.3)	Discrétisation par éléments finis:	31
	<b>Chapitre IV: Présentation du modèle non linéaire</b>	
IV.1)	Introduction	36
IV.2)	Les sources de la Non linéarité Thermique	36

---

IV.3) Formulation d'un problème non linéaire:	37
a. Conductivité thermique en fonction de la température	37
b. Non linéarité due aux conditions aux limites:	39
IV.4) Méthodes de résolution	43
a. Méthode incrémentale pure	43
b. Méthode incrémentale itérative	43
IV.5) Stratégie de Résolution (Techniques de Pilotage)	46
a. Equation d'équilibre et position du problème :	48
<b>Chapitre V: Validation &amp; évaluation</b>	
V.1) Avant Propos	50
V.2) Introduction	51
V.3) Validation en analyse linéaire	51
a. Etude de l'influence de la discrétisation sur le résultat par éléments finis	51
b. Etude de l'influence des conditions aux limites (pour le cas d'un acier)	54
V.4) Validation en analyse Non linéaire	56
a. L'influence des conditions aux limites sur le résultat par éléments finis:	56
b. L'influence de la variation de la conductivité $k(T)$	57
<b>Conclusion générale</b>	62
<b>Références Bibliographiques</b>	64
<b>Annexe</b>	65

## Liste des figures

N°	Titre	Page
I.1	Conduction dans une barre	6
I.2	Surfaces Isothermes	7
I.3	Gradient de température	8
I.4	Couche limite en convection forcée et naturelle	10
I.5	Emission et Eclairage	13
I.6	Flux net échangé entre surface	14
II.1	Maillage de domaine régulier et irrégulier	24
II.2	Molécule aux nœuds internes et de frontières selon le type domaine	24
III.1	Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments	28
III.2	Principales étapes pour une analyse par la Méthode des Éléments Finis	29
III.3	Élément fini linéaire à deux nœuds	31
III.4	Calcul élémentaire	32
IV.1	Présentation de la géométrie de l'ailette	37
IV.2	Variation de la conductivité thermique en fonction de la température	38
IV.3	Présentation de la géométrie de l'ailette	39
IV.4	Élément fini linéaire à deux nœuds	40
IV.5	Calcul élémentaire	40
IV.6	Représentation unidimensionnelle de la méthode incrémentale pure	45
IV.7	Représentation unidimensionnelle de la méthode Incrémentales-itératives newton-Raphson	45
IV.8	Représentation unidimensionnelle des types de points limites	47
V.1	Organigramme du programme développé sous MATLAB	50
V.2	Influence de la discrétisation (représentation de $T_{\text{exact}}$ et $T_{\text{apr}}$ )	53
V.3	Influence de la discrétisation (représentation de $T_{\text{exact}}$ et $T_{\text{apr}}$ ) $n_x=2$	53
V.4	Influence des conditions aux limites (Dirichlet)	54
V.5	Influence des conditions aux limites (Neumann)	55
V.6	Influence des conditions aux limites (Cauchy)	56
V.7	Influence des conditions aux limites Pb Non Linéaire	57
V.8	Analyse nonlinéaire de la conductivité thermique pour $Q=50\text{W/m}^2$	58
V.9	Analyse nonlinéaire de la conductivité thermique pour $Q=150\text{W/m}^2$	59
V.10	Analyse nonlinéaire de la conductivité thermique pour $Q=200\text{W/m}^2$	60
V.11	Etude de l'effet de la source de chaleur extérieure sur le comportement thermique nonlinéaire dans un domaine unidimensionnel	61

## Liste des tableaux

N°	Titre	Page
I.1	Résumé des fonctions de distribution de température	7
I.2	Valeur des conductivités de quelques corps solides	9
V.1	Comparaison des résultats obtenus avec les résultats analytiques pour $Q=50\text{W/m}^2$	58
V.2	Comparaison des résultats obtenus avec les résultats analytiques pour $Q=150\text{W/m}^2$	59
V.3	Comparaison des résultats obtenus avec les résultats analytiques pour $Q=200\text{W/m}^2$	60

---



---

# N

## otations & Abréviations

---



---

**Symboles :**

$\int$  : Intégrale  
 $[\ ]$  : Matrice  
 $[\ ]^T$  : Matrice transposée  
 $\langle \ \rangle$  : Vecteur ligne  
 $\{ \}$  : Vecteur colonne  
 $\{ \}^T$  : Transposé d'un vecteur  
 $d f$  : Dérivée de  $f$   
 $\sum$  : Somme  
 $[\ ]$  : Produit

**Minuscules grecques**

$\sigma$  : Constante de Stephan Boltzmann  
 $\partial$  : Dérivée partielle  
 $\lambda$  : Conductivité thermique  
 $\varepsilon$  : Émissivité

**Minuscules romaines**

$a$  : Coefficient d'absorption de la paroi en rayonnement  
 $h$  : Coefficient de transfert de chaleur par convection  
 $f$  : Fonction  
 $k$  : Conductivité thermique  
 $k_x$  : Composante de la conductivité thermique selon  $x$   
 $q$  : Flux thermique élémentaire  
 $t$  : Temps

**Abréviations**

EDP: Équations aux dérivées partielles  
 MDF: Méthode des différences finis  
 MVF: Méthode des volumes finis  
 MEF: Méthode des éléments finis

**Majuscules grecques**

$\mathcal{E}$ : Opérateur différentiel  
 $\Phi$ : Flux de chaleur

**Majuscules romaines**

$F$  : Vecteur de sollicitations  
 $G$  : Eclairement  
 $N$  : Fonction d'interpolation  
 $L$  : Polynômes de Lagrange  
 $K$  : Matrice de conductivité thermique  
 $Q$  : Flux thermique  
 $R$  : Erreur résiduel  
 $S$  : Surface  
 $T$  : Température  
 $T^*$  : Fonction de test  
 $W$  : Travail virtuel

# I Introduction générale

---

---

## **I) Introduction et problématique:**

L'analyse thermique des systèmes mécaniques, et plus particulièrement des systèmes non linéaires, est une thématique importante tant d'un point de vue académique qu'industrielle car elle concerne de nombreux domaines tels que le secteur énergétique, l'aéronautique, l'automobile ou encore le génie nucléaire. Dans le cas de l'analyse thermique linéaire s'applique et on compte jusqu'à ce jour de nombreuses applications réelles. Pourtant, dans de nombreuses situations, les structures présentent en réalité des comportements non linéaires dont l'origine est très diverse comme la thermique combinée, la conductivité thermique variable. Les modèles linéaires ne sont alors plus adaptés pour représenter le comportement de ces structures, d'où le besoin de modèles non linéaires plus précis[1].

Les conductions thermiques apparaissent dans toutes les structures, elles ont une influence considérable sur le fonctionnement et la durée de vie de ces structures. Les échanges thermiques, sont nombreux. Elles proviennent, soit de l'environnement extérieur (sol, atmosphère, eau, contacts ou chocs avec d'autres structures), soit de dispositifs internes mobiles (machines intégrées à la structure). Le plus souvent ces échanges sont néfastes pour les structures (la fatigue, rupture, chocs thermiques ou ruine) et peuvent conduire à un danger pour la structure. Ces problèmes couramment posés à l'ingénieur doivent être pris en compte aussi bien au niveau de la conception que de la vérification des structures. Ils sont complexes, phénomènes non linéaires et échanges thermiques souvent aléatoires.

Le sujet de la thermique non linéaire des structures a un intérêt continu à cause de l'utilisation de nouveaux matériaux et systèmes ayant des comportements non linéaires accentués et la tendance de réalisations des structures rigides et solides mais légères comme les composites. Ce sujet n'est pas récent, les premières études datent du XIXe siècle avec notamment Poincaré, et connaît actuellement un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à des niveaux d'échange thermique important, ou encore de traiter les nombreux problèmes non résolus de la thermique non linéaire avec contacts, jeux ou frottements. Au final, les problématiques rencontrées

concernent essentiellement des questions de dimensionnement (rupture, fatigue), ou de contrôle des isolations [2].

Pour la thermique linéaire, la gamme de techniques ou de logiciels dédiés à l'étude expérimentale ou numérique est très large et permet de traiter un grand nombre de problèmes de structures ; l'analyse par conduction en particulier constitue un outil puissant et largement utilisé. Bref, en linéaire les concepts théoriques sont clairs et de nombreux outils, classiques et bien maîtrisés, sont disponibles sur le marché. En revanche, pour le traitement de la thermique non linéaire et quelle que soit les non linéarités considérées, matériaux ou conditions aux limites, le contraste est flagrant et on se trouve rapidement limité, notamment pour les problèmes d'identification ou de calcul, d'où le besoin d'un effort de recherche. Afin de préserver les structures et les édifices contre la fatigue et la rupture, il est indispensable de caractériser et ensuite contrôler leur comportement thermique. L'étude des thermiques non linéaires des structures a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années.

Sur le plan analytique peu de solutions sont disponibles dans la littérature pour la quantité énorme de problèmes de technologie, et surtout l'analyse des structures liées au comportement non linéaire des conditions aux limites et/ou matériel. Ceci est dû à la complexité mathématique de tels problèmes. Pour ce faire, on fait appel à la théorie non linéaire de la mécanique des milieux continus qui permet de décrire le comportement du système physique grâce à des équations aux dérivées partielles. Puis, la naissance et le développement de l'informatique au cours des années soixante a entraîné l'apparition des méthodes matricielles (discrétisation) puis le développement de codes éléments finis, s'adaptant à l'augmentation constante de la taille des systèmes traités. Ainsi on est aujourd'hui capable d'élaborer des modèles numériques performants pour prédire le comportement de structures en analyse thermique. De même, l'informatique a beaucoup apporté au traitement de résultats expérimentaux, avec entre autres le développement de techniques d'analyse dans le domaine de transfert de chaleur et celui de logiciels dédiés à l'analyse thermique expérimentale de structures. [13]

Le présent travail à l'objectif de présenter une formulation simple par éléments finis à couplés à un algorithme efficace d'analyse non linéaire. L'élément utilisé est un élément linéaire à deux nœuds utilisé en analyse non linéaire des conditions aux limites et matérielle.

## I.2) Organisation de mémoire :

Après une introduction générale sur le thème de l'analyse thermique linéaire et non linéaire, cette étude est organisée en cinq (5) chapitres :

Dans **le premier chapitre**, nous présentons une recherche bibliographique détaillée consacrée au domaine de transfert de chaleur, leurs historiques, leurs évolutions et les domaines d'utilisation.

**Le deuxième chapitre** concerne les méthodes principales et les leurs formulations pour résoudre les problèmes thermiques. Une définition des variables et convention de signes utilisés dans le programme est présentée à la fin de ce chapitre.

Une formulation par la méthode des éléments finis est présentée dans **le chapitre trois** où nous détaillons le passage de la conduction thermique vers le modèle élément fini dédié pour l'analyse linéaire utilisée dans le code développé.

La théorie non linéaire et la formulation en éléments finis non linéaire sont bien détaillées dans **le chapitre quatre** pour l'obtention d'un modèle non linéaire valable à l'analyse des structures sous chargement thermique dû aux conditions aux limites ou matériels.

**Le chapitre cinq** est réservé à l'application des modèles linéaires et non linéaires et les résultats numériques obtenus par le code sur des exemples analytiques et numériques.

**Enfin**, on résume les différentes conclusions obtenues et des recommandations pour des travaux futurs.

---

---

# C

## HAPITRE I: Généralités sur les Transferts Thermiques

---

---

### I.1) Introduction:

L'énergie thermique se transmet d'un point à un autre, dans un même corps, à chaque fois qu'il existe un gradient de température. Ce phénomène est aussi valable lorsque deux systèmes, à températures différentes se mettent en contact. La théorie qui étudie le processus de propagation de la chaleur porte le nom de transfert ou transmission de chaleur.

La chaleur transmise ne peut être mesurée ou observée directement, mais les effets qu'elle produit sont observables et mesurables. Dans le domaine d'engineering la clef des problèmes consiste à la détermination du taux de transfert de chaleur correspondant à une différence de température bien spécifique.

Pour estimer le coût, la faisabilité et les dimensions de l'équipement nécessaires à la transmission d'une certaine quantité de chaleur pour un temps donné, une analyse détaillée du mécanisme de transfert de chaleur doit être réalisée. En transfert de chaleur, comme dans d'autres branches d'engineering, les solutions réussies des problèmes nécessitent des suppositions et idéalizations. Il est presque possible de décrire exactement un phénomène physique. Ainsi, pour exprimer un problème sous forme d'équations qui peuvent être résolues il est nécessaire d'introduire des approximations.

En réalité les propriétés physiques telles que: chaleur spécifique ou la viscosité changent avec la température. Mais si une valeur moyenne adéquate est choisie, le calcul peut être considérablement simplifier sans faire d'erreur appréciable dans les résultats finaux.

### I.2) Historique

Historiquement, c'est avec l'invention des machines thermiques que la thermodynamique est née en tant que science. Les notions de température, d'énergie, de travail et de chaleur, ont été introduites pour modéliser le fonctionnement des machines à vapeur, et améliorer leur rendement. Toutes les machines thermiques sont basées sur le même principe que la machine

à vapeur du 19<sup>e</sup> siècle : de l'énergie thermique (issue de la combustion de charbon, de pétrole, ou de la fission nucléaire) est convertie en énergie mécanique (rotation d'une turbine ou d'un arbre) par l'intermédiaire d'un fluide (liquide ou gaz, par exemple de l'eau ou de l'air) qui subit un cycle de transformations.

La modélisation thermodynamique des machines a permis d'imaginer des dispositifs fonctionnant en sens inverse (conversion d'énergie mécanique ou électrique en chaleur), ce qui est la base des appareils de refroidissements : réfrigérateur, climatiseur...

### **I.3) Les modes de transfert de chaleur:**

Généralement dans la littérature sur le transfert de chaleur, il est reconnu trois modes de transmission de la chaleur: Conduction, Rayonnement et Convection.

#### **I.3.a) La Conduction**

Dans un même corps (solide, liquide ou gazeux) si on soumet l'une de ses parties à une température plus élevée, par exemple, l'équilibre thermique (même température partout) dans lequel se trouvait ce corps sera rompu et la différence de température (gradient de température) qui s'installe va engendrer une propagation de la chaleur vers les parties les moins chaudes. Ce phénomène porte le nom de transfert de chaleur par conduction. L'agitation moléculaire élevée de la zone chaude communiquera de l'énergie cinétique aux zones plus froides par interactions de ces dernières.

Ce phénomène a lieu sans déplacement de la matière. C'est pour cette raison que, généralement, la conduction concerne les corps solides. Il en est de même pour les liquides et gaz, mais dès que le milieu se met en mouvement ça devient un autre mode de transfert de chaleur qui est la convection.

La conduction est un phénomène de diffusion qui permet donc à la chaleur de se propager à l'intérieur d'un corps solide. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par la diffusion des électrons libres.

#### **I.3.a.1) Quelques définitions**

Pour bien comprendre les définitions qui suivent prenons un exemple concret de transfert de chaleur. Considérons le cas d'une barre.

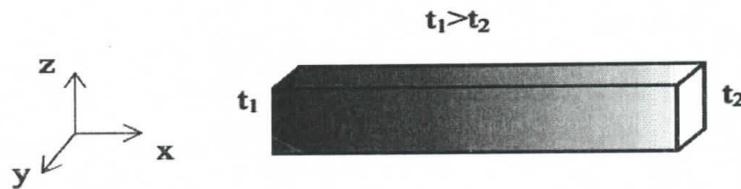


Fig. I.1: Conduction dans une barre

### Champ de température

Le processus de transfert de chaleur par conduction, comme d'autres modes d'échange de chaleur, peut avoir lieu uniquement dans le cas où il y a une différence de température entre les points de ce corps (Fig. I.1). Ce phénomène s'accompagne d'une variation de température dans l'espace et dans le temps. L'étude analytique de la conduction conduit à la résolution de l'équation :

$$T = f(x, y, z, t), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad \text{I.1}$$

Cette équation représente l'expression mathématique du champ de température. Ainsi, nous définissons le champ de température comme étant l'ensemble des valeurs de température de tous les points de l'espace étudié dans le temps.

### Régime temporel

Du point de vue temporel on peut citer les 2 cas possibles de type de conduction.

- La conduction en régime **stationnaire** appelé aussi régime **permanent**, lorsque la température ne dépend pas du temps. Dans ce cas là l'équation (I.1) s'écrit :

$$T = f(x, y, z); \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{I.2}$$

Exemple : Si on maintient les extrémités de la barre (Fig. I.1) à des températures différentes et constantes tout en isolant les surfaces latérales, on peut constater la stabilité des températures de tous les points de la barre. Ces températures deviennent constantes et ne varient pas dans le temps.

On peut réaliser cela facilement expérimentalement en plaçant l'extrémité gauche de la barre dans un récipient d'eau en ébullition (100°C) et l'extrémité droite dans un autre récipient contenant de la glace fondante (0°C).

- Dans le cas contraire, lorsque la température dépend du facteur temps, on dit que le régime est **instationnaire** ou **variable** (défini par l'équation I.1)

Exemple : Dans le cas de la barre (Fig. I.1) entre l'instant initial où la température de tous les points est la même (équilibre thermique) et l'état de stabilité des températures de tout ces points et les extrémités à T1 et T2, il y a eu évolution des températures dans le temps.

Pour la résolution des problèmes thermiques on est souvent appeler à rechercher l'équation de la distribution de la température qui est elle-même celle du champ de température.

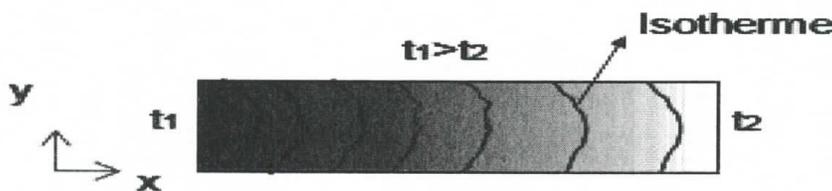
Selon les exigences une étude thermique peut être considérée dans l'un des cas suivants :

**Tableau I.1:** Résumé des fonctions de distribution de température

	Stationnaire	Variable
Unidimensionnelle	$T = f(x), \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \frac{\partial T}{\partial t} = 0$	$T = f(x, t), \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$
Bidimensionnelle	$T = f(x, y), \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \frac{\partial T}{\partial t} = 0$	$T = f(x, y, t), \frac{\partial T}{\partial z} = 0$
Tridimensionnelle	$T = f(x, y, z), \frac{\partial T}{\partial t} = 0$	$T = f(x, y, z, t),$

**Gradient de température**

Dans le cas de la barre (Fig. I.1), certains points peuvent avoir la même température. La liaison de ces points donne une surface isotherme. Si on suppose que les surfaces latérales sont soumises à un échange de chaleur avec le milieu ambiant et que les points du centre ont des températures plus élevées, on peut représenter schématiquement les surfaces isothermes dans la barre. Comme un point ne peut avoir deux températures différentes, les surfaces isothermes ne se coupent pas. La coupe des surfaces isothermes par un plan perpendiculaire à l'une des surfaces latérales donne un ensemble d'isothermes (Fig. I.2). [12]



**Fig. I.2:** Surfaces Isothermes

Le plus grand accroissement de température entre des isothermes voisines a lieu dans la direction normale aux isothermes (Fig. I.3)[12].

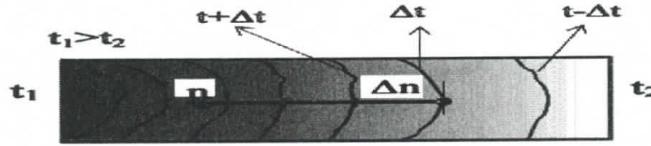


Fig. I.3: Gradient de température

Cet accroissement est caractérisé par le gradient de température qui est défini par la relation mathématique suivante :

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta T}{\Delta n} \right) = \text{grad } T \quad ; \quad \text{grad } T = n_0 \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{I.3}$$

où  $n_0$  : est le vecteur unitaire normal à l'isotherme.

$\Delta n$  : distance entre 2 isothermes voisines.

Le gradient de température est un vecteur dirigé suivant la normale à l'isotherme dans le sens de l'augmentation de la température. Ainsi, il est opposé au sens de propagation de la chaleur.

La valeur scalaire du gradient de température  $\partial t / \partial n$  n'est pas la même pour les différents points d'une isotherme. Cette valeur est plus grande là où  $\Delta n$  est plus petite.

La valeur de  $\partial t / \partial n$  dans le sens de la propagation de chaleur est négative. [12]

### I.3.a.2) Loi de Fourier

Le transfert de chaleur spontané dans un corps solide, d'une zone de température élevée vers une autre zone de température plus basse obéit à la loi dite de Fourier (établie mathématiquement par Jean Baptiste Biot en 1804 puis expérimentalement par Fourier en 1822). Le flux de chaleur (dimension W/m<sup>2</sup>) transféré par conduction dans une direction donnée est proportionnel au gradient de température dans cette direction. Cette loi, dite de Fourier, est donc telle que la composante sur l'axe Ox du flux est égale à :

$$\varphi_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{I.4}$$

$\varphi_x$  est la composante du flux sur l'axe Ox et  $T$  la température au point considéré.

Dans cette loi, le coefficient de proportionnalité  $\lambda$  est une caractéristique physico-chimique du point matériel désignée sous le nom de conductivité ou conductibilité thermique.

Dans le système international, elle s'exprime en W/m.K. [12]

Dans le tableau suivant sont reportées les conductivités de quelques corps solides, liquides et gazeux. D'une façon générale, les métaux sont beaucoup plus conducteurs de la chaleur que les substances non métalliques. Les gaz sont plutôt mauvais conducteurs : le caractère isolant de la laine de verre est dû à la présence de l'air emprisonné entre les fibres.

**Tableau I.2:** valeur des conductivités de quelques corps solides

Matériau	$\lambda$ (W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )	Matériau	$\lambda$ (W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
Chrome	449	Ardoise	2,2
Argent	419	Grès	1,8
Cuivre	386	Verre	0,78
Papier	0,48	Aluminium	204
Zinc	112	Liège	0.040
Laine de verre	0,038	Fer (pur)	73
Acier Inox	16	Eau	0,556
Mercure	8,2	Air	0,0262

### I.3.b) La Convection

La convection est le mode de transfert de chaleur lié au mécanisme de propagation de la chaleur entre une surface solide et un fluide (gaz ou liquide) en mouvement en contact de cette surface. Ce phénomène est omniprésent dans notre vie quotidienne. Les enfants ont toujours appris que pour refroidir un aliment chaud, il faut lui souffler dessus. En hivers, pour réchauffer les mains froides on souffle dessus. Pour refroidir un verre de lait chaud on le verse dans un autre verre. Pour faire sécher des cheveux mouillés on utilise un séchoir qui envoie de l'air chaud.

Dans l'industrie on utilise des équipements appelés échangeurs de chaleurs qui fonctionnent sur le principe de la convection pour chauffer ou refroidir des fluides. Les deux fluides (l'un chauffant et l'autre chauffé) s'échangent de la chaleur à travers une paroi. On

peut citer le radiateur de la voiture qui constitue l'un des meilleurs exemples des échangeurs de chaleur.

La convection peut être forcée ou naturelle (libre). Dans le cas où le mouvement du fluide est provoqué par une force extérieure : pompes pour les liquides ; ventilateurs et compresseurs pour les gaz, on est en présence de la convection forcée (Fig. I.1.4a). Et dans le cas contraire, quand le mouvement du fluide se fait naturellement sous l'effet de la différence de masse volumique des particules du fluide, on l'appelle naturelle (Fig. I.1.4b).

Dans ce cas les particules qui ont reçu une énergie thermique de la part de la paroi leur masse volumique diminue, et sous l'effet de la poussée d'Archimède un écoulement ascendant est créé au sein du fluide.

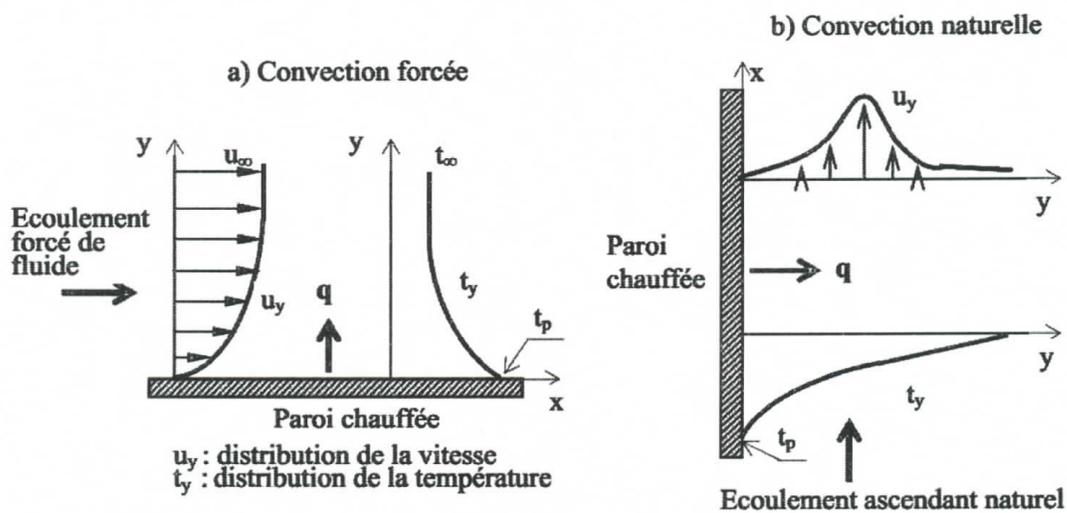


Fig. I.4: Couche limite en convection forcée et naturelle

Dans les deux cas de la figure I.4 (forcée ou naturelle) au contact de la surface de la paroi la vitesse des particules du fluide est nulle, en raison des effets de la viscosité. On sait aussi, d'après la mécanique des fluides, que la vitesse augmente de plus en plus en s'éloignant de la paroi, jusqu'à une certaine distance de la surface, où la vitesse devient constante et égale à  $u_\infty$ . La couche de fluide à côté de la paroi dans laquelle la vitesse varie de zéro à la valeur  $u_\infty$  porte le nom de couche limite dynamique. Dans cette couche l'écoulement peut être aussi bien laminaire que turbulent.

Dans le cas de la convection naturelle, la vitesse croît de zéro jusqu'à une valeur maximale, correspondant à un maximum de la poussée d'Archimède. Puis décroît jusqu'à

s'annuler en raison de la perte d'énergie thermique en s'éloignant de la paroi. La paroi étant chauffée et maintenue à la température  $T_p$  supérieure à celle du fluide, elle provoque la variation de la température dans une certaine couche du fluide de  $T_p$  à  $T_\infty$ . Cette couche dans laquelle la température varie de  $T_p$  à  $T_\infty$  s'appelle couche limite thermique. Au-delà de cette couche la température du fluide reste constante à  $T_\infty$ .

Le transfert de chaleur par convection est proportionnel à l'écart de température existant entre la paroi et le fluide. Mathématiquement ceci peut être exprimé par la relation suivante :

I.5

$$\Phi \propto S(t_p - t_\infty)$$

Avec S : surface de contact du fluide.

En introduisant une constante proportionnelle, on obtient :

$$\Phi = S(T_p - T_\infty) \quad \text{I.6}$$

$$\Phi = h.S.\Delta T \quad \text{I.7}$$

La constante de proportionnalité « h » s'appelle coefficient de transfert de chaleur par convection. Il dépend d'un grand nombre de paramètres caractérisant le fluide, l'écoulement, la géométrie de la paroi, etc. Son unité est : W/m<sup>2</sup>.K ou bien: W/m<sup>2</sup>.°C.

La différence de température  $\Delta T$  de l'expression (I.3) peut s'écrire de deux façons :

- Dans le cas où l'échange de la chaleur se fait de la paroi vers le fluide

$$\Delta T = (T_p - T_\infty) \quad \text{I.8}$$

- Dans le cas contraire

$$\Delta T = (T_\infty - T_p) \quad \text{I.9}$$

### I.3.b.1) Valeurs typiques du coefficient de transfert de chaleur par convection

#### a. Convection naturelle

- Paroi verticale H=0,25 m (hauteur), à l'air libre : h = 5,0 w/m<sup>2</sup> .K
- Cylindre horizontale,  $\Phi=5$  cm (extérieur), à l'air libre h = 8,0 w/m<sup>2</sup> .K
- Cylindre horizontale,  $\Phi=2$ cm (extérieur), dans l'eau h = 800 w/m<sup>2</sup> .K
- Sphère,  $\Phi = 2$  cm, dans l'huile moteur : h = 60 w/m<sup>2</sup> .K

**b. Convection forcée**

- Écoulement d'air à  $u=10\text{m/s}$  et  $T=25^\circ\text{C}$  sur paroi plane de longueur :

$$L = 10 \text{ cm} : h = 40 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$L = 50 \text{ cm} : h = 17 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

- Écoulement :  $u=5\text{m/s}$  à travers cylindre:  $\Phi = 1 \text{ cm}$  (extérieur)

$$\text{Air atmosphérique} : h = 85 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\text{Huile moteur} : h = 1800 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

- Écoulement d'eau à l'intérieur d'un tube :

$\Phi = 2,5 \text{ cm}$  (intérieur) à un débit de:

$$0,5 \text{ kg/s} : h = 3500 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$1,0 \text{ kg/s} : h = 11000 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

**c. Convection avec changement de phase**

- Eau en ébullition :

$$\text{Bassin ou récipient} h = 2500 \text{ à } 35000 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\text{Écoulement dans un tube} h = 5000 \text{ à } 100000 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

- Condensation de la vapeur d'eau:

$$\text{Surfaces verticales} h = 4000 \text{ à } 11000 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\text{A l'extérieur de tube horizontal} h = 9500 \text{ à } 25000 \text{ w/m}^2 \cdot \text{K}$$

**I.3.c) Le Rayonnement**

La conduction et la convection sont des mécanismes de transfert de chaleur qui nécessitent des milieux matériels pour la propagation de la chaleur. Alors que la chaleur peut aussi bien être transmise sans la présence de ce milieu matériel. L'exemple le plus connu de tous est celui de l'échauffement de la terre par le soleil. Effectivement c'est grâce aux ondes électromagnétiques, qu'on appelle rayonnement, que la chaleur est transmise entre les corps. D'après la théorie des ondes électromagnétiques, on sait que leur vitesse de propagation dans le vide est de  $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  (vitesse de la lumière dans le vide). Pour faire la part des choses, il faut dire que ce n'est pas toutes les ondes électromagnétiques qui transportent de la chaleur. Parmi la variété d'ondes électromagnétiques les plus connues telles que : rayon de transmission de radio et télévision, téléphonie, micro-ondes, infrarouge, Lumière visible, ultraviolet, rayon X, rayon cosmiques  $\gamma$  et  $\beta$ , seules les rayons infrarouge, lumière visible et l'ultraviolet transportent la chaleur.

### I.3.c.1) Lois du rayonnement

D'après la théorie du rayonnement, tout corps rayonne quelque soit sa température. Considérons une paroi plane telle que représentée sur la figure 10. Etant à une température différente de celle des corps avoisinant, elle reçoit et émet du rayonnement thermique.



Fig. I.5: Emittance et Eclairement

Le rayonnement émit par la paroi, appelé aussi Emittance, est défini comme suit.

- **Emittance** : noté par la lettre "E", correspond à l'énergie émise par la paroi. D'après la loi de Stefan-Boltzman, on peut calculer l'Emittance d'un corps noir :

$$E_n = \sigma T^4 \quad [\text{w/m}^2] \quad \text{I.10}$$

Avec  $\sigma$ : constante de Stefan-Boltzman,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ [w/m}^2 \cdot \text{K}^4]$ ;

T : température de la surface de la paroi en Kelvin ;

L'indice « n » indique que le corps est noir ;

Connaissant l'Emittance d'un corps noir, on peut calculer le flux de chaleur émit par ce corps.

$$\Phi = E_n \cdot S = S \cdot \sigma T^4 \quad [\text{w}]$$

Avec S : surface émettant le rayonnement.

I.11

- **Emittance d'un corps réel** :

$$E = \varepsilon \sigma T^4 \quad [\text{w/m}^2]$$

$$\Phi = S \cdot \varepsilon \sigma T^4 \quad [\text{w}]$$

Avec  $\varepsilon$ : coefficient d'émissivité thermique, caractérisant l'état de surface ;  $\varepsilon \leq 1$ , pour les corps noir  $\varepsilon = 1$ . D'après cette loi, on en déduit qu'un corps noir émet plus que tous les corps réels.

Le rayonnement reçu par la paroi, appelé aussi rayonnement **incident** ou **éclairement**, est défini comme suit.

- **Eclairement** : noté par la lettre "G", est défini comme étant le rayonnement parvenant de l'extérieur à la surface de la paroi. Selon les caractéristiques radiatives de cette surface, une partie ou la totalité de ce rayonnement incident peut être absorbée. L'énergie

thermique du rayonnement absorbée par la paroi peut être calculée d'après la relation suivante:

$$G_{abs} = a \cdot G \quad I.12$$

Avec  $a$ : coefficient d'absorption de la paroi

Pour certains corps  $a = \varepsilon$ .

### I.3.c.2) Échange de chaleur entre surfaces

Le phénomène de rayonnement implique toujours l'échange de chaleur entre deux ou plusieurs surfaces. Dans ces conditions on s'intéresse à la connaissance du flux net résultant de cet échange de chaleur. Ainsi, le flux net est égal à la différence entre les flux de chaleur émit et absorbé par une surface. En général, le calcul du flux net est compliqué, car il dépend des propriétés radiatives des surfaces en interaction, de l'orientation de ces surfaces et du milieu qui les sépare. Parfois Les surfaces sont séparées par un milieu participant au rayonnement (absorbant, émettant et même diffusant) appelé milieu semi transparent.

Considérons le cas simple d'un corps de surface  $S_1$  et un coefficient d'émissivité  $\varepsilon_1$ , à la température absolue  $T_1$  qui se trouve complètement entouré par un autre corps noir ( $\varepsilon_2=1$ ) de surface plus grande  $S_2$  à la température  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) (Fig. I.6). Le milieu séparant les 2 corps étant un milieu transparent (milieu non absorbant, non émettant et non diffusant), l'air par exemple, le flux net échangé est calculé de la manière suivante.

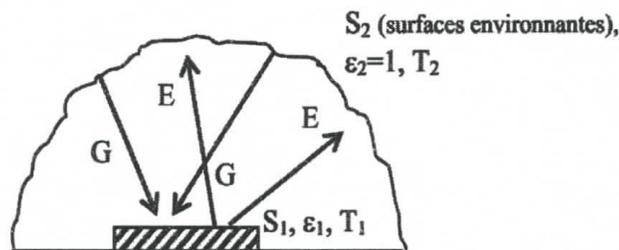


Fig. I.6: Flux net échangé entre surface

En appliquant la définition du flux net échangé entre ces 2 surfaces, il en résulte :

$$\Phi_{net} = \Phi_{1 \rightarrow 2} - \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = S_1 \varepsilon_1 \sigma T_1^4$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = S_1 G_{abs} \text{ et } G_{abs} = a_1 \cdot G = a_1 \sigma T_2^4$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = S_1 a_1 \sigma T_2^4$$

d'où

$$\Phi_{net} = S_1 \sigma (\varepsilon_1 T_1^4 - a_1 T_2^4)$$

et pour  $\varepsilon = a$ ,

$$\Phi_{\text{net}} = S_1 \varepsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad [\text{W}] \quad \text{I.13}$$

Pour plus de commodité, nous écrivons l'expression précédente du flux net sous la même forme que celle de la convection. Au lieu du coefficient de convection  $h$  nous introduisons le coefficient de rayonnement  $h_r$ . Ainsi nous aurons la relation suivante :

$$\Phi_{\text{net}} = S_1 h_r (T_1 - T_2) \quad \text{I.14}$$

avec

$$h_r = \sigma \varepsilon (T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2) \quad \text{I.15}$$

### I.3.d) Modes de transfert de chaleur combinés

De manière générale, il est rare de trouver un processus de transmission de chaleur réalisé sous un seul mode de transfert de chaleur (conduction, convection ou rayonnement).

Dans la plupart des cas pratiques les modes de transfert de chaleur sont combinés et associés à 2 ou 3 modes en même temps.

Exemple : pour un corps chaud en contact d'un fluide, sa chaleur est transmise au milieu ambiant par convection et rayonnement. Dans ce cas 3 situations peuvent se présenter.

- Si le corps est en contact de liquide c'est la convection qui est dominante ;
- Si le corps est à haute température et est en contact de gaz, c'est le rayonnement qui est dominant ;
- Si aucun mode n'est dominant, on doit considérer la convection et le rayonnement.

## I.4) Machines thermiques

**I.4.a) Définition :** Une machine thermique est un système capable de convertir un transfert thermique  $Q$  en travail  $W$  ou inversement.

Dans les machines, la circulation d'un fluide (air, eau, fréon...) permet les échanges d'énergie entre la machine et le milieu extérieur.

Pour fonctionner en continu la machine doit effectuer des cycles de transformations (retour à l'état initial); on parle donc de **machines thermiques cycliques**.

S'il y a échange de matière avec l'extérieur, la machine est **ouverte**, sinon elle est **fermée**.

**I.4.b) Bilan énergétique et entropique d'une machine polytherme cyclique:**

Une machine est **polytherme** si elle échange de la chaleur avec plusieurs thermostats (de températures  $T_1, T_2, \dots, T_n$ ) au cours d'un cycle. Au cours d'un cycle, la machine thermique échange - Un travail  $W$  avec l'extérieur - Des transferts thermiques  $Q_i$  avec les thermostats (sources) de températures  $T_i$ . Pour distinguer **Le bilan énergétique** d'un cycle, on applique le 1er principe de la thermodynamique pour en déduire une relation entre  $W$  et les  $Q_i$  ( $i$  variant de 1 à  $n$ ).

**I.5) Échangeurs de chaleur**

**I.5.a) Définition :** Les échangeurs de chaleur sont des appareils permettant de transférer de la chaleur entre deux fluides à des températures différentes. Dans la plupart des cas, les deux fluides ne sont pas en contact, et le transfert s'effectue à travers une surface d'échange. Au sein de la paroi séparatrice, le mécanisme de transmission de la chaleur est la conduction, et, sur chacune des deux surfaces de contact avec les fluides, ce sont presque toujours les phénomènes de convection qui prédominent.

**I.5.b) Technologie:** Dans de nombreux cas, les fluides restent monophasiques, qu'ils soient gazeux ou liquides. Il existe toutefois trois grandes catégories d'échangeurs dans lesquelles surviennent des changements de phase : les vaporiseurs ou évaporateurs où l'on vaporise un liquide, les condenseurs où une vapeur est liquéfiée, et les vapo-condenseurs dans lesquels les deux fluides changent de phase.

Bien qu'il existe une très importante variété de modèles d'échangeurs, les quatre principales catégories utilisées dans les systèmes énergétiques sont les suivantes :

- Les échangeurs tubulaires
- Les échangeurs à tube et calandre
- Les échangeurs à ailettes
- Les échangeurs à plaques

---

---

# C

## HAPITRE II: Méthodes de résolution d'un problème thermique

---

---

### II.1) Introduction

Le problème mécanique que pose la réalité quotidienne concerne des corps, qui n'ont jamais des formes simples et pour les quelles on ne peut pas espérer des solutions analytiques simples, il devient alors nécessaire de recourir à une pratique plus systématique de la décomposition en morceaux déformables ou modélisation. En conséquence, la méthode des éléments finis est généralement considérée comme l'outil le plus puissant à l'analyse linéaire dans la conception des structures, même si, pour des raisons pratiques (résistance, esthétique...), on limite souvent le domaine de fonctionnement normal des structures à des déplacements faibles, de sorte que des calculs linéaires suffisent à prédire leur comportement.

Cependant, il ne doit pas être perdu de vue que les structures réelles ont un comportement en général non-linéaire. A ce stade, cette méthode gagne encore du terrain, leur importance reste indispensable pour des situations non-linéaires délicates (évaluation du comportement au moment de la ruine de la structure), quelle dépend de deux facteurs principaux [1]:

- Premièrement, en raison des opérations numériques accrues liées aux problèmes non linéaires, la puissance d'un calcul considérable est exigée. Les développements dans la dernière décennie ont assuré des calculateurs numériques qui satisfont ce besoin avec un coût de calcul réduit.
- Deuxièmement, avant que la méthode des éléments finis puisse être employée dans la conception, l'exactitude de n'importe quelle solution technique proposée doit être prouvée. Le développement des caractéristiques améliorées d'élément et des solutions algorithmiques non linéaires plus efficaces et l'expérience acquise dans les problèmes rencontrés ont assuré la réalisation des analyses non linéaires avec certaine fiabilité.

Par conséquent des obstacles à l'exploitation de ces techniques sont rapidement enlevés et le processus sur le plan économique est acceptable pour des applications industrielles choisies.

## II.2) Méthodes de résolution d'un problème thermique

### II.2.a) Méthodes analytiques

Lors de la résolution d'un problème thermique ou physique par les méthodes analytiques, on suit en général les étapes suivantes [2]:

#### 1. Le Modèle mathématique

Pour écrire la formulation d'un problème, on adopte des modèles mathématiques c'est-à-dire une approche schématique du problème. Cette approche diffère selon le but à atteindre. Par exemple pour analyser le mouvement de la terre autour du soleil la terre et le soleil sont approchés par des points matériels tandis que si on veut étudier le mouvement de la terre par rapport à son axe, la terre n'est plus approchée par un point mais par une sphère par exemple. Le modèle mathématique est un point matériel dans la première approche et une sphère dans la seconde.

#### 2. La formulation

Une fois le modèle adopté, on écrit sa formulation, c'est-à-dire les équations qui régissent le problème. Le problème est décrit en général par des équations aux dérivées partielles. Dans notre étude le type d'équation est de la forme

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi = G \quad \text{II.1}$$

qui est une équation linéaire du second ordre à deux variables indépendantes  $x$  et  $y$ .  $\phi$  est la solution recherchée. Les problèmes physiques les plus rencontrés et régis par des équations de ce type sont les suivants :

a) **Corde vibrante:** Son équation est donnée par

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{II.2}$$

$y = y(x, t)$  représente la vibration transversale d'un point d'abscisse  $x$  de la corde à l'instant  $t$ .

**b) Propagation de la chaleur:** L'équation est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad \text{II.3}$$

$T = T(x, t)$  Est la température en un point  $x$  du milieu unidimensionnel à l'instant  $t$ ,  $\kappa$  est la constante de diffusion,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$  est le Laplacien. [12]

**c) Équation de Laplace (ou du potentiel):** L'équation est donnée par :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{II.4}$$

On retrouve cette équation, représentant un phénomène stationnaire, dans de nombreuses applications : en transfert thermique,  $\phi$  représente la température  $T$ , en électrostatique,  $\phi$  représente le potentiel électrostatique, etc.

### 3. Les méthodes de résolution

Deux méthodes les plus courantes sont utilisées pour la résolution des problèmes donnés par les équations de type (II.1) accompagnés des conditions aux limites.

**La première méthode** consiste à déterminer la solution générale de l'équation aux dérivées partielles, puis de la particulariser afin d'obtenir la solution du problème en utilisant les conditions aux limites. La seconde méthode consiste, par contre, à rechercher d'abord des solutions particulières, puis de les utiliser à la recherche de la solution du problème.

#### a) Solutions générales

Dans cette méthode on recherche d'abord la solution générale, puis la solution particulière qui satisfait aux conditions limites. Cette solution est obtenue en utilisant les théorèmes suivants :

**Théorème 1** (Principe de superposition) : Si  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  sont solutions, linéairement indépendantes, d'une équation aux dérivées partielles homogène ( $G=0$ ), alors

$$\phi = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots + \alpha_n \phi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i, \text{ où } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ sont des constantes, est}$$

aussi solution

**Théorème 2:** La solution générale d'une EDP non homogène ( $G \neq 0$ ) c'est-à-dire dont le second membre n'est pas nul) s'obtient en ajoutant une solution particulière de l'équation non homogène à la solution générale de l'équation homogène.

$$\text{On a: } \phi = \phi_p + \phi_h$$

où  $\phi_p$  est la solution particulière et  $\phi_h$  est la solution de l'équation homogène. [2]

Si les coefficients A, B, C, D, E, F dans l'équation (1.1) sont des constantes, la solution de l'équation homogène est de type  $\phi_h = e^{ax+by}$ .

Exemple équation de vibration :

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad ; \text{ où } C=0$$

donc l'équation devienne sous la forme

$$\ddot{x} + \frac{K}{M} x = 0 \Rightarrow x + \omega^2 x = 0$$

la solution est de la forme  $x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

$$\ddot{x} = (a\omega \cos \omega t)' = -a\omega^2 \sin \omega t \quad \dot{x}(0) = 0 \quad x(0) = x_0$$

**La deuxième méthode** est la méthode de séparation des variables:

Cette méthode est la plus utilisée à cause de sa simplicité et de sa puissance de résolution. On exprime la solution comme le produit de fonctions inconnues, chacune de ces fonctions ne dépendant que d'une seule variable indépendante  $x$  ou  $y$ . L'intérêt de cette méthode réside en ce qu'il est possible d'écrire l'équation résultante sous une forme telle que l'un de ses membres ne dépende que d'une variable, l'autre membre contient toutes les variables restantes- d'où l'on peut déduire que chaque membre de l'équation doit être constant. Ce processus est répété jusqu'à déterminer toutes les fonctions inconnues. La solution finale est obtenue par la superposition de toutes ces solutions. [4]

Exemple d'application:

$$T(t, x, y, z) = f_1(x) * f_2(y) * f_3(z) * f_4(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} T * T(t, x) = f(t) * g(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} T = g(x) * \frac{\partial f}{\partial t} \dots\dots (1) \\ \frac{\partial^2}{\partial t} T = f(t) * \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \dots\dots (2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} g(x) * \frac{\partial f}{\partial t} = \alpha f(t) * \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \\ \frac{1}{f(t)} * \frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{1}{g(x)} * \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\frac{1}{f(t)} * \frac{\partial f}{\partial t} = \lambda \rightarrow \int \frac{\partial f}{f(t)} = \int \lambda dt$$

$$\alpha \frac{1}{g(x)} * \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = \lambda$$

$$\ln f(t) = \lambda t + c \rightarrow f(t) = e^{\lambda t + c} = C_1 * e^{\lambda t}$$

ou  $C_1$  sera calculé à partir des conditions initiales et aux limites

## II.2.b) Méthode expérimentale (réduite):

### 1. Introduction:

La méthode expérimentale est définie par Claude Bernard (1966) comme une activité de construction du savoir, dans le domaine scientifique. L'expérimentation est de loin l'étape la plus difficile du procédé scientifique : chaque expérience réalisée est un cas spécial, elle demande imagination tout en respectant des normes précises. La connaissance et l'expérience passée aident habituellement pour ce qui est de la technique utilisée; mais construire l'expérience, décidée des moyens qui serviront à vérifier une hypothèse, cela demande intuition, imagination et rigueur. L'expérimentation est le seul moyen précis d'évaluer les différentes hypothèses qui ont été émises, elle servira à aller chercher des données, c'est-à-dire des informations qui serviront à confirmer ou à infirmer une hypothèse. Dans la mesure du possible, il est préférable d'aller chercher des résultats mathématiques car elles sont objectives et résistent bien à la subjectivité. Il est nécessaire d'exercer un contrôle rigoureux de l'expérience à réaliser. Les étapes principales à respecter pour que l'expérimentation soit conforme aux normes scientifiques sont les suivantes:

1. Objectif à atteindre (émission d'hypothèses, formulation)
2. Procédure d'analyse expérimentale et matériel expérimental
3. Résultats (appelés données)
4. Interprétation des résultats et validation

On utilise encore pour désigner la méthode expérimentale l'appellation 'OPHERIC' (Observation, Problème, Hypothèse, Expérience, Résultats, Interprétation, Conclusion), couramment utilisé dans la conduite d'activités expérimentales. [6]

## 2. Le modèle

L'expérience est au centre du processus ; elle est précédée d'une phase de formulation d'hypothèses ou de formulation mathématique du problème : c'est la phase de l'élaboration du modèle. Le modèle peut être nouveau ou résulte d'une étude antérieure.

Une hypothèse est une relation de causalité supposée entre deux faits. Pour vérifier cette causalité il suffit de faire varier la cause. L'observation des effets obtenus permet de conclure sur cette relation.

## 2. Procédure d'analyse expérimentale

Pour réussir un travail expérimental, l'ingénieur doit suivre une procédure expérimentale générale qui respecte les exigences et les normes scientifiques afin de bien contrôler les variables de l'expérience et d'en faire varier, d'une façon précise, celle désirée. Cette méthode peut être décrite par la succession de différentes étapes :

1. a. méthodes de réalisation de l'expérience (techniques utilisées)  
b. Etablir le budget optimal, la main d'œuvre et le temps requis
2. a. Etablir les objectifs de l'expérience par émission d'hypothèses sur le but à atteindre. Donner l'analyse théorique s'il y a lieu ou d'autres études expérimentales similaires dans la littérature.  
b. Nomenclature adoptée (système de classification, systèmes et unités de mesure employés)
3. Accomplir les tâches suivantes :
  - a. Établir les variables primaires qui doivent être mesurées (force, déformation, pression, température, etc...)
  - b. Déterminer la précision requise sur les mesures primaires et le nombre de ces mesures qui sont requises pour l'analyse des data (résultats expérimentaux).
  - c. Analyser les erreurs possibles des résultats anticipés avant que l'expérience ne commence de telle façon que des modifications sur la précision requise sur les différentes mesures peuvent être changées si nécessaire.

4. Choisir les instruments pour les différentes mesures pour atteindre les précisions requises

Il est à noter que tous ces renseignements ne s'appliquent évidemment pas à chaque expérience, il faudra donc juger de ce qu'il sera utile de préciser dans chaque cas particulier. Cette procédure doit être assez explicite pour que le principe de répétitivité, c'est-à-dire réaliser plusieurs fois l'expérience, soit acquis. De plus, la description de la méthode utilisée sert aussi de référence quant à la valeur du travail en question. Si, par exemple, les résultats sont exprimés sans faire mention de la méthode utilisée, les résultats ne sembleront pas assez fiables pour servir de référence pour une autre recherche.

### II.2.c) Méthodes numériques

Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution de problèmes aux limites. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis et surtout la méthode des éléments finis.

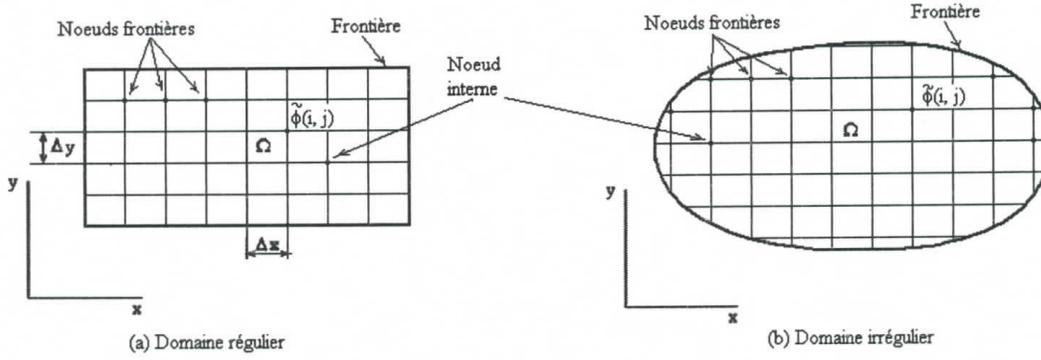
#### 1. La Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation des fonctions dérivées apparaissant dans les équations de formulation du problème. Les fonctions dérivées sont écrites sous une forme approchée en utilisant le développement limité de Taylor. L'équation aux dérivées partielles est ainsi approchée par une équation aux différences finies. Cette équation est écrite ou projetée en un point du maillage sous forme de schéma.

Plusieurs types de schémas aux différences finies sont utilisés ; différences finies en avant, en arrière et centrées. Ces schémas, ayant des précisions différentes, sont utilisés selon le problème rencontré.

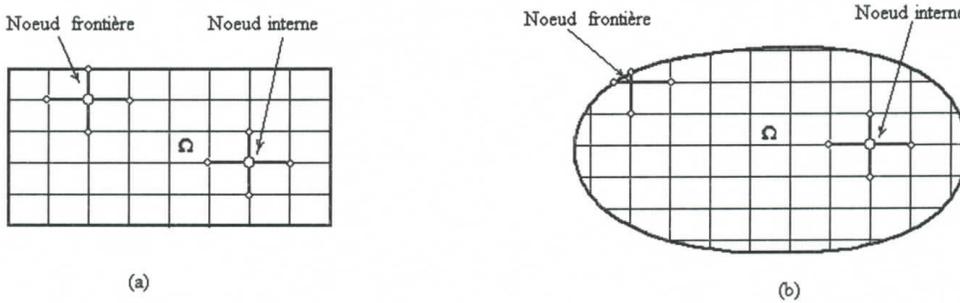
La méthode des différences finies utilise une discrétisation géométrique ou maillage du domaine  $\Omega$  (Fig. II.1). Le domaine peut être aussi bien régulier (Fig. II.1 a) qu'irrégulier (Fig. II.1 b). [7]

L'équation aux dérivées partielles est approchée localement selon la formule choisie (différences finies, en avant ou en arrière) en tout point, ou nœud, du maillage du domaine  $\Omega$ . On obtient alors une molécule donnant le schéma aux différences finies (Fig. II.2). La solution recherchée  $\tilde{\phi}(i, j)$  est rattachée au nœud  $(i, j)$  en question (nœud central de la molécule).



**Fig. II.1:** Maillage de domaine régulier et irrégulier

A cause du changement des pas de discrétisation aux nœuds de frontières  $\Delta x \rightarrow \alpha \Delta x$  et  $\Delta y \rightarrow \beta \Delta y$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant des coefficients de correction du pas, connus, inférieurs à 1, la molécule est reformulée pour les nœuds aux frontières dans le cas où le domaine est irrégulier (Fig. II.2 b).



**Fig. II.2:** Molécule aux nœuds internes et de frontières selon le type domaine.

On obtient les équations algébriques aux nœuds internes et aux nœuds de frontières. La résolution du système d'équations algébriques donne la solution recherchée du problème,  $\tilde{\phi}(i, j)$  en tout nœud  $(i, j)$  du maillage.

**2. Méthode des volumes finis**

La méthode des volumes finis est une méthode alternative à la méthode des différences finies. Toutes deux permettent de résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles, mais bien entendu de façon différentes. La méthode des volumes finis est basée sur le théorème de la divergence. Les différences finies utilisent des approximations de dérivées, la méthode des volumes finis fait des approximations d'intégrales à l'instar de la méthode des

éléments finis. Cette méthode se développe également sur un maillage qui est constitué de volumes finis. Elle utilise les lois de conservation sur un volume. On intègre les divergences des flux sur des surfaces, qui peuvent être transformées en intégrales des flux sur des volumes grâce au théorème de la divergence. Un des grands avantages de cette méthode est qu'elle permet d'utiliser des maillages non-structurés car seuls les volumes sont pris en compte et non le maillage lors de la discrétisation. [9]

### 3. La Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode est que sa formulation utilise des procédés standards qui se répètent au cours de la résolution de problèmes de nature différente. La méthode utilise une formulation intégrale de type Galerkin. Les fonctions de base de la méthode de Galerkin sont remplacées par des fonctions de forme standard.

Le domaine  $\Omega$  est discrétisé géométriquement en un nombre fini de sous domaines. La forme intégrale est alors construite sur ces sous domaines qu'on appelle éléments finis. Ces éléments ont des formes standard. On a donc une bibliographie d'éléments connus. Les fonctions de forme deviennent alors spécifiques à ces éléments. Les éléments sont formés par un certain nombre de points appelés points nodaux qui interconnectent les éléments. Le domaine global est formé de l'union des éléments finis interconnectés entre eux par les nœuds. L'approximation  $\tilde{\phi}^e$  est propre à chaque élément. C'est une interpolation de la solution exacte aux points nodaux de l'élément. La transformation des équations différentielles en système d'équations algébriques se fait au niveau de chaque élément fini. A cette étape on parle de calcul élémentaire. Une technique d'assemblage permet d'obtenir alors le système d'équation algébrique sur le domaine global  $\Omega$ . Les inconnues sont les variables nodales. L'incorporation des conditions limites au niveau des équations algébriques permet de trouver la solution représentée par le vecteur nodal global. [8]

---

---

# C

## HAPITRE III: Présentation du modèle linéaire

---

---

### III.1) Introduction et historique:

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique: problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaire ou non linéaire, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

Les techniques de calcul des structures ont connu ces quarante dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries de pointes et soutenu par les progrès réalisés dans le domaine des ordinateurs. [10]

Ainsi la méthode des éléments finis (en abrégé M.E.F) est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des problèmes thermiques dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, nucléaire, génie civil, construction mécanique, etc...

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la M.E.F appliquée en domaine du thermique est une technique récente, à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- Transfert thermique : convection, conduction, rayonnement et les modes mixtes.
- L'analyse numérique : l'interpolation, intégration numérique, résolution des systèmes linéaires, résolution des systèmes non linéaires, des problèmes aux valeurs propres....
- L'informatique appliquée : techniques de programmation et algorithmiques.

La méthode des éléments finis est apparue vers [1955], en même temps que les ordinateurs puissants. D'abord appliquée au calcul des structures et solides, elle a pris, dès [1965], une extension fantastique, quand on a réalisé qu'elle représentait, en fait, une méthode générale de résolution numérique des problèmes aux limites.

Tout phénomène physique, dont la modélisation conduit à des équations différentielles avec conditions aux limites, lui devenait accessible : structure, solide, chaleur, fluide, combustion, électromagnétisme, acoustique...

Les bases théoriques de M.E.F reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation. Après la deuxième guerre mondiale on assiste, dans l'industrie aéronautique, au développement de méthodes matricielles permettant de traiter des problèmes de structures assez complexes, parmi les contributions les plus importantes, citons celle de LEVY en [1947] et GARVEY en [1951] pour la méthode des forces et LEVY en [1953] pour la méthode des déplacements.

En fin, en [1956] TURNER et CLOUGH publièrent une présentation systématique de la méthode des déplacements. Ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de la M.E.F comme technique de calcul des structures complexes. [11]

Cependant, il existe bien d'autres types de structures où l'opération de discrétisation n'est pas aussi immédiate ; pour les problèmes de coques ou de plaques par exemple.

Il faut alors utiliser des techniques d'approximation appropriées. Dans le cadre de la M.E.F, on étudie un modèle discret du continuum. Ce modèle est basé sur subdivision du domaine continu en sous domaines de forme géométrique simple que l'on appellera « éléments finis » interconnectés en des points remarquables appelés « nœuds ».

De plus, on définit dans chaque élément une approximation adéquate de la solution permettant de résoudre le problème en fonction uniquement des valeurs de la solution aux nœuds. [14]

On formule le problème en fonction des températures aux nœuds et les différentes étapes de calcul sont les suivantes :

- Formulation / modélisation : choix du modèle numérique
- Discrétisation : maillage.
- Choix des hypothèses sur le champ thermique ( type d'élément ) et interpolation de la température dans l'élément fini en fonction des inconnues nodales qui conduit à l'établissement des matrices de conductivité élémentaires.
- Formation de la matrice de la conductivité thermique de la structure tout entière en vue d'écriture des équations d'équilibre aux nœuds.
- Formulation du vecteur force nodale (source de chaleur Q) correspondant aux diverses charges thermiques appliquées.

- Introduction des conditions aux limites des températures imposées et les flux nodaux de la structure.
- Résolution des équations d'équilibre pour déterminer le vecteur des températures et flux nodaux (inconnus nodaux).
- Substitution des températures des nœuds pour construire : le champ de flux.

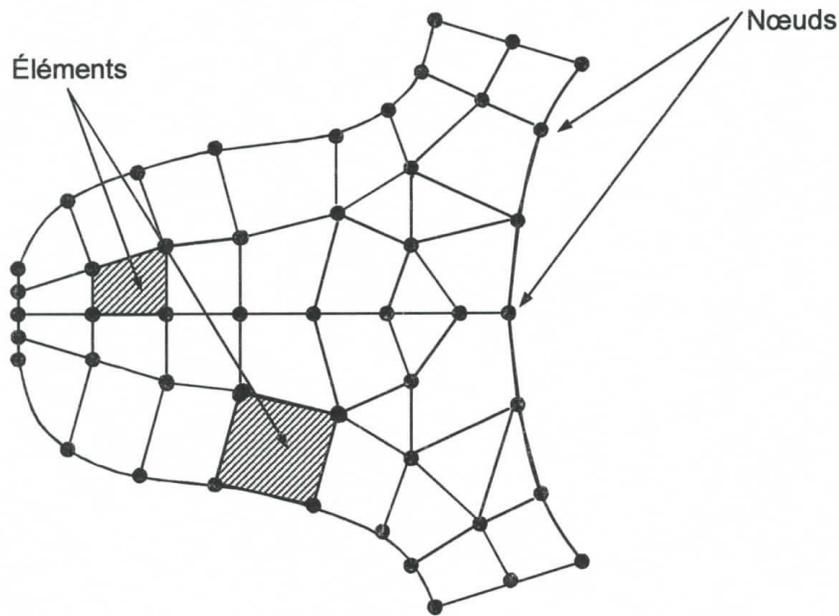


Fig. III.1: Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments

### III.2) Formulation par éléments finis d'un modèle linéaire :

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux formulations intégrales (ou variationnelles) des équations de comportement de systèmes physiques. La méthode des éléments finis, discrétise une formulation intégrale pour conduire à un système d'équations algébriques qui fournit une solution approchée du problème (Fig. III.2)

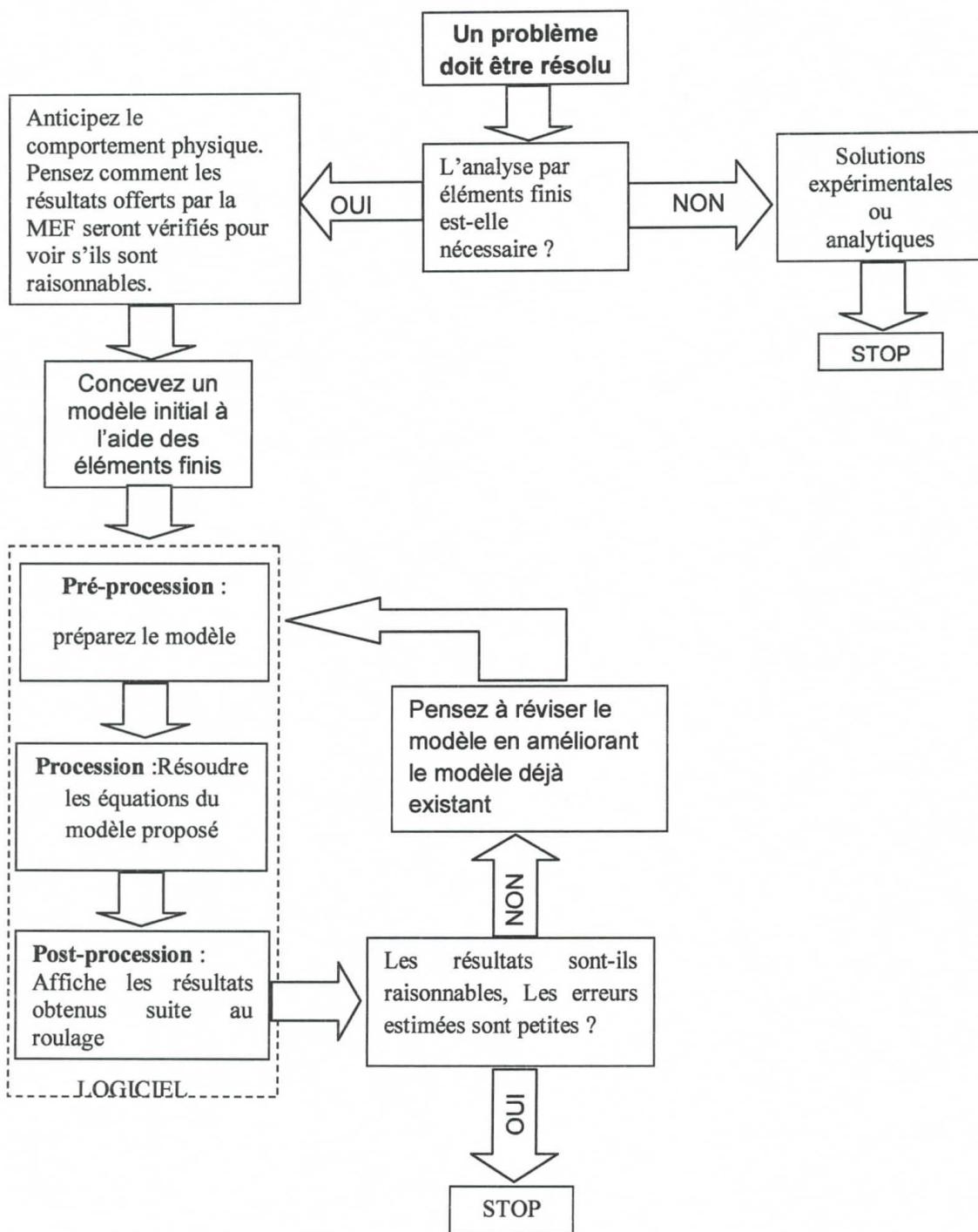


Fig.III.2 Principales étapes pour une analyse par la Méthode des Éléments Finis

**III.2.a) Méthode de résidus pondérés :**

L'équation générale de chaleur, en régime stationnaire, peut s'écrire de la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{III.1}$$

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q = 0 \quad \text{III.2}$$

La méthode de résidus pondérés consiste à rechercher des fonctions  $T$  qui annulent la forme intégrale:

$$W(T) = \int_v \langle T^* \rangle \{R(T)\} dv = \int_v \langle T^* \rangle \{E(T) + f_v\} dv = 0 \quad \text{III.3}$$

avec  $T^*$ : une fonction de test et  $R$  présente le résidu

Pour notre cas, nous allons limiter notre étude sur un élément unidimensionnel à deux noeuds avec une longueur de  $l$ , donc le problème thermique (l'équation III.2) s'écrira de la manière suivante:

$$R = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q \quad \text{III.4}$$

Pour  $R=0$ ,  $T$  est la solution de l'équation III.3 et on écrit:

$$\int_0^l T^* R = 0 \quad \text{III.5}$$

$$\int_0^l [T^* k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q] dx = 0 \quad \text{III.6}$$

$$\int_0^l [T^* k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T^* Q] dx = 0 \quad \text{III.7}$$

L'équation III.7 représente la **forme forte de l'intégral** (l'ordre de la dérivée)

**III.2.b) Intégration par parties:**

L'intégration par parties permet de transformer une forme intégrale du type III.1 de manière à diminuer les conditions imposées à la fonction  $T$ .

D'abord on dérive:

$$\left( T^* k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right)' = \frac{\partial T^*}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} + T^* k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{III.8}$$

En suite on intègre l'équation III.8:

$$\int_0^l T^* k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx = \int_0^l \frac{\partial T^*}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_0^l T^* k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \quad \text{III.9}$$

$$\int_0^l \left[ T^* k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx \right] = \int_0^l \frac{\partial T^*}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx + \underbrace{\int_0^l T^* k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx}_A \quad \text{III.10}$$

De l'équation III.10 on déduit l'intégral A, on trouve:

$$\int_0^l T^* k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \int_0^l \left[ T^* k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx \right] - \int_0^l \frac{\partial T^*}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx \quad \text{III.11}$$

On remplace III.11 dans l'équation III.9 on trouve:

$$\underbrace{\int_0^l \left[ T^* k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx \right]}_{W_{cl}} - \underbrace{\int_0^l \frac{\partial T^*}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx}_{W_{int}} + \underbrace{\int_0^l T^* Q dx}_{W_{ext}} = 0 \quad \text{III.12}$$

où :

- $W_{cl}$  est le travail des conditions aux limites
- $W_{int}$  est le travail interne qui représente aussi la forme faible de l'intégral de l'équation III.1
- $W_{ext}$  est le travail externe

### III.3) Discrétisation par éléments finis:

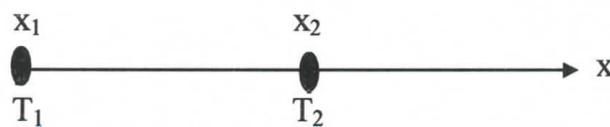


Fig. III.3 élément fini linéaire à deux nœuds

$$T(x) = N_1 T_1 + N_2 T_2 \quad \text{III.13}$$

Avec  $N_1$  et  $N_2$  sont des fonctions de formes ou d'interpolation

Pour construire une solution approchée  $T$  nous discrétisons l'équation III.1 on doit d'abord on choisi une méthode d'interpolation.

#### Interpolation de Lagrange:

soit la fonction

$$f(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + \dots + L_n f(x_n)$$

$L_1, L_2, \dots, L_n$  sont des polynômes de Lagrange

$$L_n = \prod \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

#### Calcul élémentaire

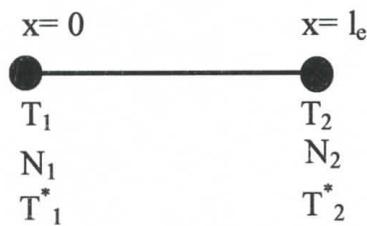


Fig. III.4 Calcul élémentaire

$$T(x) = N_1 T_1 + N_2 T_2 \quad \text{III.14}$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{(x - l_e)}{(0 - l_e)} = 1 - \frac{x}{l_e} \\ N_2 = \frac{(x - 0)}{(l_e - 0)} = \frac{x}{l_e} \end{cases}$$

De même

$$T^*(x) = N_1 T_1^* + N_2 T_2^* = \langle T_1^* T_2^* \rangle \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \quad \text{III.15}$$

On dérive les équations III.14 et 15 on trouve:

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} T_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} T_2 = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad \text{III.16}$$

$$\frac{\partial T^*(x)}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} T_1^* + \frac{\partial N_2}{\partial x} T_2^* = \langle T_1^* T_2^* \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{III.17}$$

On remplace III.16 et 17 dans  $W_{\text{int}}$  et  $W_{\text{ext}}$  on aura:

$$\begin{cases} W_{\text{int}} = - \int_0^l \frac{\partial T^*}{\partial x} k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx \\ W_{\text{ext}} = \int_0^l T^* Q dx \end{cases} \quad \text{III.18}$$

$$\begin{cases} W_{\text{ext}} = \int_0^l T^* Q dx \end{cases} \quad \text{III.19}$$

$$\begin{cases} W_{\text{int}} = - \int_0^l \langle T_1^* T_2^* \rangle \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{Bmatrix} k_x \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx \\ W_{\text{ext}} = \int_0^l \langle T_1^* T_2^* \rangle \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} Q dx \end{cases} \quad \text{III.20}$$

$$\begin{cases} W_{\text{ext}} = \int_0^l \langle T_1^* T_2^* \rangle \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} Q dx \end{cases} \quad \text{III.21}$$

$$\begin{cases} W_{\text{int}} = \langle T_1^* T_2^* \rangle \left[ - k_x \int_0^l \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial N_1}{\partial x} \right)^2 & \left( \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial N_2}{\partial x} \right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx \right] \\ W_{\text{ext}} = \int_0^l \langle T_1^* T_2^* \rangle \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} Q dx \end{cases} \quad \text{III.22}$$

Entre temps on dérive  $N_1$  et  $N_2$  pour les remplacer dans les équations III.21 et 22

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{l_e} \\ N_2 = \frac{x}{l_e} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{l_e} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{l_e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{int} = \langle T_1^* T_2^* \rangle \left[ -k_x \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{l_e}\right)^2 & \left(-\frac{1}{l_e} \frac{1}{l_e}\right) \\ \left(-\frac{1}{l_e} \frac{1}{l_e}\right) & \left(-\frac{1}{l_e}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx \right] & \text{III.23} \\ W_{ext} = \langle T_1^* T_2^* \rangle \int_0^{l_e} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l_e} \\ \frac{x}{l_e} \end{Bmatrix} Q dx & \text{III.24} \end{cases}$$

$$W_{int} + W_{ext} = \langle T_1^* T_2^* \rangle \left[ -\frac{k_x}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} + \frac{Q l_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] \quad \text{III.25}$$

### L'assemblage:

Caractéristique de la méthode des éléments finis, l'assemblage permet de passer des matrices et vecteurs élémentaires aux matrices et vecteurs globaux.

$$W(T) = \int_v \langle T^* \rangle \{R(T)\} dv = \int_v \langle T^* \rangle \{\mathcal{E}(T) + f_v\} dv = 0$$

$$W = \sum_{e=1}^n W^e = \sum_{e=1}^n \int_v \langle T^* \rangle \{\mathcal{E}(T) + f_v\} dv = 0$$

### Les conditions aux limites:

$$W_{int} + W_{ext} + W_{cl} = 0$$

Il existe trois types de conditions aux limites:

1. type Dirichlet: où la température  $T$  imposée;
2. type Neumann: où le flux est imposé;
3. type Cauchy (mixte): où la température et le flux sont imposés.

On suppose que nous avons un cas mixte pour simuler les deux autres cas:

$$\begin{cases} T(x=0) = q_0 \\ T(x=l) = h(T_1 - T_{ext}) \end{cases} \quad \text{III.26}$$

$$W_{cl} = \int_0^l \left[ T^* k_x \frac{\partial T}{\partial x} dx \right] = T_2^* k_x h(T_2 - T_{ext}) - T_1^* q_0 \quad \text{III.27}$$

$$W_{cl} = \langle T_1^* T_2^* \rangle \begin{Bmatrix} q_0 \\ k_x h(T_2 - T_{ext}) \end{Bmatrix}$$

Ecrivant  $W_{cl}$  sous une forme matricielle

$$W_{cl} = \langle T_1^* T_2^* \rangle \left\{ \underbrace{-\begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{vecteur extérieur}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ k_x h T_{ext} \end{pmatrix}}_{\text{forces réaction}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_x h \end{bmatrix}}_{\text{matrice conductivité}} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{III.28}$$

Maintenant écrivant l'équation générale:  $W_{int} + W_{cl} + W_{cl} = 0$

$$\langle T_1^* T_2^* \rangle \left\{ -\frac{k_x}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \frac{ql_e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k_x h T_{ext} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_x h \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad \text{III.29}$$

$$\begin{cases} \langle T_1^* T_2^* \rangle \neq 0 \\ k_x \begin{bmatrix} \frac{1}{l_e} & -\frac{1}{l_e} \\ -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} - h \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \frac{ql_e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k_x h T_{ext} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{III.30}$$

$$\begin{cases} \langle T_1^* T_2^* \rangle \neq 0 \\ k_x \begin{bmatrix} \frac{1}{l_e} & -\frac{1}{l_e} \\ -\frac{1}{l_e} & \frac{1}{l_e} - h \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \frac{ql_e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k_x h T_{ext} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{III.31}$$

Introduction des températures connues:

$$x = 0 \rightarrow T(0) = T_1 = T_0$$

Enfin nous arrivons à la forme finale de la solution:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k_x}{l_e} & k_x \left( \frac{1}{l_e} - h \right) \end{bmatrix}}_{[Ke]} \underbrace{\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}}_{\{Te\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ql_e}{2} \end{pmatrix}}_{\{Fe\}} + \underbrace{\begin{pmatrix} T_0 \\ -k_x h T_{ext} \end{pmatrix}}_{\{CL\}} \quad \text{III.32}$$

avec [Ke]: matrice de la conductivité élémentaire

{Te}: vecteur de la Température de l'élément

{Fe}: vecteur des forces extérieures dues à la source

{CL}: vecteur des conditions aux limites

---

---

# C

## HAPITRE IV: Présentation du modèle non linéaire

---

---

### IV.1) Introduction

Dans le chapitre précédant, nous avons introduit la méthode des éléments finis pour résoudre un problème thermique linéaire.

En réalité, les différents paramètres (propriétés thermiques et physiques, conditions aux limites, ....etc.), rarement où sont exprimés d'une manière simple dans les modèles mathématiques. Tel est le cas lorsque l'application à simuler couvre une vaste plage de température ou implique des changements de phase.

### IV.2) Les sources de la Non linéarité Thermique :

Les densités de flux de surface sur la limite du solide, ainsi que le terme de source de chaleur volumétrique  $Q$ , peuvent dépendre de la température d'une manière non linéaire. [3]

Dans ce cas, le problème à résoudre est également non linéaire. Parmi les problèmes à prendre en considération figurent:

- Les interactions entre un liquide de refroidissement et un matériau. Dans le cas de l'extinction de l'eau en acier, ces interactions sont souvent modélisées par un coefficient d'échange variable de manière non linéaire selon la température de la surface de la pièce. Pour illustrer cette variation, on peut dire que ce coefficient est faible lorsque la température de la surface est élevée (état de chauffage), puis augmente brusquement lorsque le film d'éjection est percé par des gouttelettes de liquide qui arrivent à la surface (état d'ébullition du nucléate) et diminue à nouveau. Lorsque la température de surface dépasse la température d'ébullition de l'eau (état de convection);
- Les effets des rayonnements matériels vers un environnement externe, souvent exprimés par un coefficient d'échange équivalent variable en fonction de la température. Ces effets sont importants lorsque la température du solide est généralement supérieure à 300 ° C;
- Le point de transition Curie lors du chauffage par induction en acier. Au-dessus de cette température, l'effet d'induction sur le volume du matériau change sensiblement,

de sorte que la source de chaleur volumétrique utilisée devient une fonction fortement non linéaire de la température.

#### IV.3) Formulation d'un problème non linéaire:

La formulation du problème non linéaire produit un système d'équation non linéaire et les techniques de solution doivent être appropriées.

Les non-linéarités traditionnelles dans un système thermique sont dues aux:

- Conductivité thermique en fonction de la température ;
- Présence de la radiation thermique avec la conduction.

Il existe d'autres causes de la non-linéarité Par exemple, le cas du contact thermique traité avec une résistance de contact conduit le plus souvent à un problème non linéaire. [4]

Dans cette section, nous limiterons notre étude aux deux non-linéarités classiques.

##### IV.3.a) Conductivité thermique en fonction de la température :

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le problème devient non linéaire dès que la conductivité thermique  $\lambda$  (écrite dans les équations  $\mathbf{k}$ ), la masse volumétrique  $\rho$ , ou la chaleur massique  $C_p$ , du matériau sont en fonction de la température.

Dans le cas du flux  $q$ , les conditions aux limites ou la source de chaleur volumétrique  $Q$ , le problème reste linéaire tant que ces mêmes fonctions restent linéaires selon la température.

Dans le cas d'une conductivité thermique dépendante de la température,  $k$  ou  $\lambda(T)$ , le terme Impliqué dans l'expression résiduelle de l'élément pour les cas stables est:

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q = 0 \quad \text{IV.1}$$

L'équation IV.1 devient:

$$k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q = 0 \quad \text{IV.2}$$

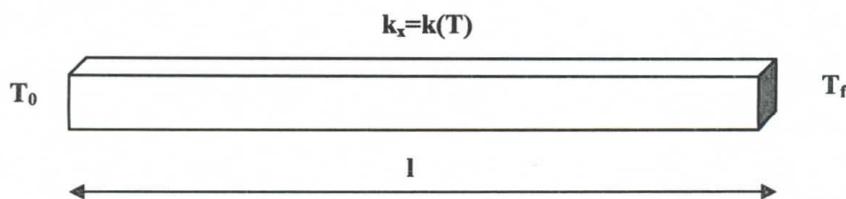


Fig.IV.1: Présentation de la géométrie de l'ailette

**- Formulation du problème par éléments finis**

$$[K]\{T\} = \{F\} \quad \text{Pour un problème linéaire } K \text{ est constant}$$

$$[K(T)]\{T\} = \{F\} \quad \text{Pour un problème Non linéaire } K \text{ est fonction de } T :$$

Nous avons l'interpolation de champ thermique s'écrit sous la forme :

$$T(x) = N_1 T_1 + N_2 T_2 \quad \text{IV.3}$$

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \frac{x}{l_e} \\ N_2 = \frac{x}{l_e} \end{cases}$$

$$T(x) = \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.4}$$

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} T_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} T_2 = \langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.5}$$

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.6}$$

$$[B] = \langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \rangle \quad \text{IV.7}$$

D'après la forme faible de l'équation de la chaleur, nous avons :

$$[K_T] = \int_l \frac{\partial T(x)}{\partial x} k_x(T) \frac{\partial T(x)}{\partial x} dx \quad \text{IV.8}$$

$$[K_T] = \int_l k_x(T) [B]^T [B] dx \quad \text{IV.9}$$

Notre étude est basée sur une variation linéaire de la conductivité en fonction de la température, sachant que :

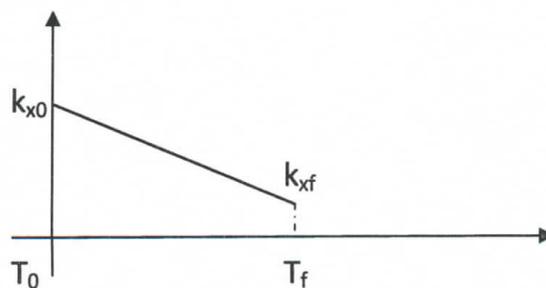


Fig.IV.2: Variation de la conductivité thermique en fonction de la température

$$k_x(T) = \alpha T + b = a \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} + b \quad \text{IV.10}$$

Remplaçant maintenant  $k_x(T)$  par sa valeur dans  $K$  tangente :

$$[K_T] = \int_l \left( a \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} + b \right) [B]^T [B] dx \quad \text{IV.11}$$

$$[K_T] = \int_l \left( a \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \right) [B]^T [B] dx + \int_l b [B]^T [B] dx \quad \text{IV.12}$$

$$[K_T] = \int_l a \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} [B]^T [B] dx + \int_l b [B]^T [B] dx \quad \text{IV.13}$$

Enfin nous écrivons  $[K_T]$  sous la forme:

$$\begin{cases} [K_T] = [K_{NL}] + [K_0] \\ [K_{NL}] = \int_l a \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} [B]^T [B] dx \\ [K_0] = \int_l b [B]^T [B] dx \end{cases} \quad \text{IV.14}$$

### III.3.b) Non linéarité due aux conditions aux limites:

Pour des raisons de simplification, au premier lieu nous considérons une ailette droite d'une longueur  $L$  avec l'aire de la section droite est  $A(x)$ , nous supposons que l'une des extrémités de l'ailette située à  $x=0$  est soumise à une température imposée égale à  $T_0$ , l'autre extrémité à  $x=L$  est influencée par un transfert thermique par radiation présenté avec une température ambiante  $T_\infty$ , les autres surfaces latérales de l'ailette sont traitées par une isolation thermique. Nous supposons aussi que la conductivité thermique à la section  $(x)$  de l'ailette est constante à travers l'épaisseur.

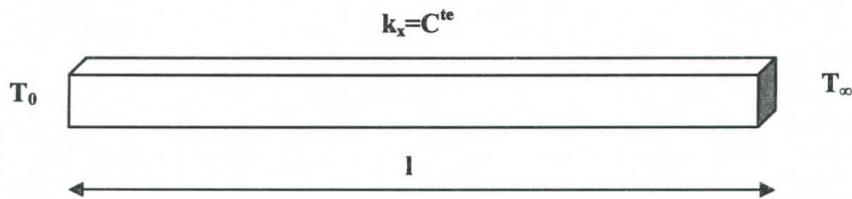


Fig.IV.3: Présentation de la géométrie de l'ailette

Le modèle mathématique associé à la distribution de température à travers cette ailette est défini par les deux valeurs aux limites :

$$\begin{cases} k_x A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Q & 0 \leq x \leq L \\ T(0) = T_0 \\ -k_x \frac{dT}{dx}(L) = \sigma \varepsilon (T^4(L) - T_\infty^4) \end{cases} \quad \text{IV.15}$$

La formulation en éléments finis développée dans cette étude est basée sur un élément fini à deux nœuds où l'interpolation du champ thermique est linéaire basant sur le polynôme de Lagrange, nous employons cette formulation pour discrétiser le problème non linéaire précédent :



Fig.IV.4 Élément fini linéaire à deux nœuds

Nous avons la forme faible de l'équation de la chaleur :

$$\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} k_x A \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \frac{\partial T_i}{\partial x} dx = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} N_i(x) q dx + k_x A N_i(x) \left. \frac{dT_i}{dx} \right|_{x_1^{(e)}} \quad \text{IV.16}$$

D'après l'interpolation linéaire , nous avons :

$$T^{(e)}(x) - T_1^{(e)} = \frac{T_2^{(e)} - T_1^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}} (x - x_1^{(e)}) \quad \text{IV.17}$$

L'élément fini de cette étude est un élément basé sur l'interpolation linéaire de Lagrange



Fig. IV.5 Calcul élémentaire

L'interpolation est donnée sous la forme suivante :

$$T^{(e)}(x) = \langle N_1^e(x) \quad N_2^e(x) \rangle \begin{Bmatrix} T_1^{(e)} \\ T_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \langle N_i^e(x) \rangle \{T^{(e)}\} \quad \text{IV.18}$$

Après dérivation de l'équation IV.18 on obtient:

$$\frac{\partial T^{(e)}(x)}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N_1^e(x)}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2^e(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} T_1^{(e)} \\ T_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \langle N_i^e(x) \rangle \{T^{(e)}\} \quad \text{IV.19}$$

En suite on remplace dans l'équation IV.16:

$$\underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} k_x A \frac{\partial}{\partial x} (N_i^e(x)) \{N_i^e(x)\} \{T^e\}}_{K(r)} = \underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} Q (N_i^e(x)) dx}_F + \underbrace{k_x A (N_i^e(x)) \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1^e}}_{cL} + R^e \quad \text{IV.20}$$

Le développement de chaque composant de l'équation IV.20 donne:

$$\underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} k_x A \frac{\partial}{\partial x} (N_i^e(x)) \{N_i^e(x)\}}_A = \int_{x_1^e}^{x_2^e} k_x A \begin{Bmatrix} 1/l^e \\ -1/l^e \end{Bmatrix} \{1/l^e \quad -1/l^e\} dx = \frac{k_x A}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{IV.21}$$

$$\underbrace{\int_{x_1^e}^{x_2^e} Q (N_i^e(x)) dx}_B = \int_{x_1^e}^{x_2^e} Q \begin{Bmatrix} N_1^e(x) \\ N_2^e(x) \end{Bmatrix} dx = \frac{Ql^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.22}$$

$$\underbrace{k_x A (N_i^e(x)) \frac{dT}{dx} \Big|_{x_1^e}}_c + R^e = \begin{Bmatrix} -k_x A \frac{dT}{dx} (x_1^e) + R_1^e \\ k_x A \frac{dT}{dx} (x_1^e) + R_1^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.23}$$

$$\frac{k_x A}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \frac{Ql^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.24}$$

$$K_r^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A\sigma\varepsilon(T_2^e)^4 \end{bmatrix} \text{ et } F_r^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ A\sigma\varepsilon(T_\infty)^4 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.25}$$

L'équation de la chaleur pour l'élément est:

$$\frac{k_x A}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A\sigma\varepsilon(T_2^e)^4 \end{bmatrix} = \frac{Ql^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ A\sigma\varepsilon(T_\infty)^4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \text{IV.26}$$

Finalement, nous obtenons la forme finale d'équilibre de bilan thermique en présence de rayonnement :

$$[K]\{T\} = \{F\} + \{Q\} \quad \text{IV.27}$$

La matrice de Conductivité K s'écrit sous la forme suivante :

$$[K] = \frac{k_x A}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{IV.28}$$

Le vecteur de la source de chaleur extérieure et l'effet de rayonnement :

$$\{F\} = \frac{Ql^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ et } \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1' \\ Q_2' + Q_1'' \\ \vdots \\ Q_2^{N-1} + Q_1^N \\ A\sigma\varepsilon(T_{N+1}^4 - T_f^4) \end{Bmatrix} \quad \text{IV.29}$$

Pour notre cas d'étude, le vecteur Q s'exprime sous la forme suivante :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A\sigma\varepsilon(T_{N+1}^4 - T_f^4) \end{Bmatrix} \quad \text{IV.30}$$

Pour cela nous avons :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T(0) \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \\ T(l) \end{Bmatrix} = \frac{Ql^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A\sigma\varepsilon(T_{N+1}^4 - T_\infty^4) \end{Bmatrix} \quad \text{IV.31}$$

Pour le cas inverse, nous avons :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T(0) \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \\ T(l) \end{Bmatrix} = \frac{Ql^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A\sigma\varepsilon(T_1^4 - T_\infty^4) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q_2^N \end{Bmatrix} \quad \text{IV.32}$$

### Les étapes de formulation d'un problème non linéaire :

Pour formuler le problème, nous utilisons le développement de Taylor :

$$R [T^{k+1}] = R [T^k + \Delta T] \quad \text{IV.33}$$

Selon le développement de Taylor

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^{(n)}(x) \quad \text{IV.34}$$

$$R [T^{k+1}] = R [T_i^k] + \Delta T \frac{\partial R [T_i^k]}{\partial T_i^k} \quad \text{IV.35}$$

$$R [T^{k+1}] = [K] + \Delta T [K]_T \quad \text{IV.36}$$

Avec  $[K]_T$  la matrice tangente

Nous rappelons que:

$$[R] = \{F\} - [K_T]\{dT\} \quad \text{IV.37}$$

$$\begin{cases} \text{pour } [R] = 0 \\ \text{on a } \{dT\} = [K_T]^{-1}\{F\} \\ \text{et } T^{k+1} = T^k + dT \end{cases} \quad \text{IV.38}$$

#### IV.4) Méthodes de résolution :

Les méthodes de résolution que nous présentons maintenant sont basées sur des processus incrémentaux d'une manière générale. Elles consistent à appliquer le niveau de charge totale par incréments successifs, et à trouver à chaque incrément la réponse de la structure. Cette réponse est obtenue après linéarisation sur chaque incrément des équations d'équilibres. Ces méthodes incrémentales sont de deux sortes

1. Méthodes incrémentales pures
2. Méthodes incrémentales itératives

##### IV.4.a) Méthode incrémentale pure :

Dans cette méthode (Fig. IV.6), un incrément de charge est imposé, l'accroissement de déplacement correspondant est obtenu à l'aide d'une matrice de rigidité tangente. L'équilibre n'est pas corrigé dans ce cas, ce qui rend cette méthode très peu utilisée. En effet, a moins de l'utilisation d'incrémentes très petits la solution calculée peut facilement, au fur et à mesure de l'incrément, s'éloigner de la solution recherchée.

##### IV.4.b) Méthode incrémentale itérative :

Cette méthode utilise le même processus incrémental que la méthode précédente d'une part et d'autre part, une correction de l'équilibre est introduite sur chaque incrément en utilisant un processus itératif. Cette correction de l'équilibre peut se faire de plusieurs manières, définissant ainsi plusieurs méthodes incrémentales itératives. Ces méthodes se distinguent principalement les unes des autres, par le type de matrice de rigidité utilisée pour la

correction. La plus connue, et certainement la plus utilisée de ces méthodes est celle de Newton-Raphson. Nous en distinguons deux cas

### 1) Méthode de correction de Newton-Raphson :

Cette méthode utilise pour la correction de l'équilibre, une matrice de rigidité tangente recalculée à chaque itération (Fig. IV.7-a). Son aspect très rigoureux en fait une méthode très sûre conduisant généralement à une convergence très rapide. Cependant, le calcul systématique de la matrice de rigidité tangente à chaque itération nécessitant un temps de calcul souvent élevé constitue son inconvénient principal. [12]

### 2) Méthode de correction de Newton-Raphson modifiée :

Elle est identique à la méthode précédente, mais utilise pour corriger l'équilibre la matrice de rigidité calculée au début de chaque incrément et gardée constante pour toutes les itérations (Fig. IV.7-b). La convergence y est moins rapide que dans la méthode précédente, cependant, elle présente l'avantage de dispenser, à chaque itération du calcul de la matrice de rigidité tangente, ce qui conduit à un gain sensible sur le temps de calcul. [12]

- La méthode de Newton-Raphson que nous venons de présenter associées à un processus incrémental, constitue actuellement le moyen le plus utilisé et le plus fiable pour la résolution de systèmes non linéaires. Cependant, la nécessité de réduire de plus en plus le temps de calcul a conduit au développement de méthodes alternatives à celle de Newton-Raphson et moins coûteuse en temps de calcul. De manière générale, il s'agit pour ces méthodes, soit d'éviter le calcul systématique de la matrice de rigidité tangente, soit de le remplacer par une approximation, simple ne nécessitant pas un temps de calcul important. Dans la première solution on peut éviter le calcul de la matrice de rigidité tangente en la remplaçant par celle initiale ou sécante. Le calcul de la matrice de rigidité ne se fait qu'une seule fois dans ces cas, et conduit à une diminution importante du temps de calcul. Cette méthode reste néanmoins très limitée dans son utilisation car elle n'est significative que dans des cas à une faible non linéarité où quand on est en présence de non linéarité matérielle.

Une autre manière d'agir consiste à actualiser la matrice de rigidité tangente pour quelques incréments. C'est le cas de la méthode de Newton-Raphson modifiée qui constitue déjà une approche un peu plus rigoureuse que la précédente. Le problème de la lenteur de convergence commun aux deux approches, peut être résolu en les couplant avec des méthodes d'accélération de convergence du type "Line-search" par exemple. Dans la seconde solution,

il s'agit de remplacer le calcul coûteux de l'actualisation de la matrice de rigidité par une approximation simple et économique. Plusieurs méthodes ont été développées dans ce cas, et parmi les plus importantes nous citons la méthode de gradient conjugué qui est souvent combiné avec celle de Newton-Raphson modifiée et la méthode dite "quasi-Newton". Cette dernière est la plus utilisée et sert de base à d'autres méthodes dont la plus connue et celle dite de B.F.G.S. (Broyden-Fletcher-Goldfarb.Shanno). [12]

Il est à noter enfin que toutes ces méthodes ne sont pas développées dans ce travail. En effet notre ambition n'est pas axée spécialement sur la recherche d'une méthode de résolution, mais de disposer d'une méthode fiable afin de tester les performances de deux éléments développés. Dans ce cas la méthode de Newton-Raphson standard, en alliant fiabilité et efficacité, répond largement à cette demande. Ainsi, nous développons dans ce qui suit un algorithme de résolution en nous basant sur cette dernière méthode que nous appellerons par la suite simplement : Méthode de Newton-Raphson.

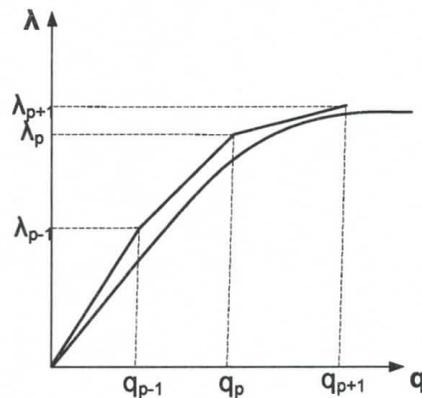


Fig. IV.6: Représentation unidimensionnelle de la méthode incrémentale pure

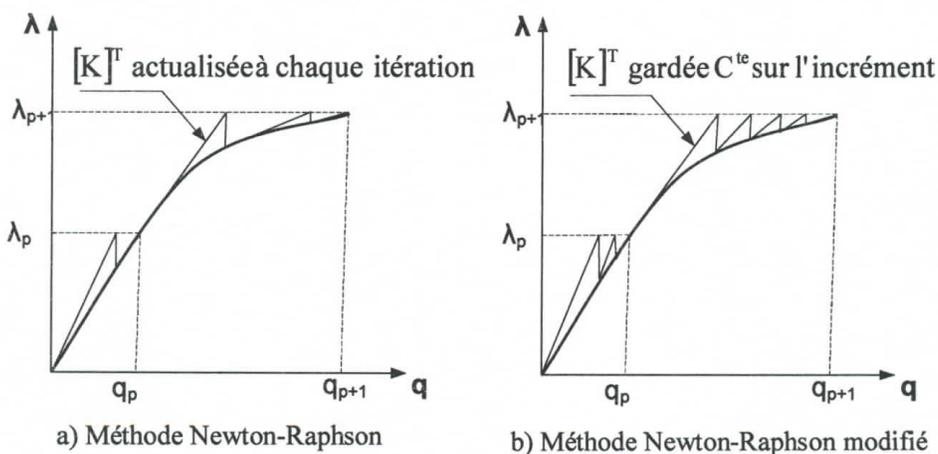


Fig. IV.7 : Représentation unidimensionnelle de la méthode Incrémentales-itératives Newton-Raphson

#### IV.5) Stratégie de Résolution (Techniques de Pilotage)

Le but recherché consiste à trouver la réponse complète d'une structure sollicitée, et de décrire ainsi tout le chemin d'équilibre (toute la courbe charge-déplacement). La résolution utilisée étant incrémentale, il s'agit donc d'imposer un paramètre incrémental (incrément de charge, incrément de déplacement, ...), et de calculer l'autre par une résolution linéaire en utilisant une raideur tangente. Ce calcul est répété autant de fois qu'il est nécessaire (processus itératif) jusqu'à atteindre la solution la plus proche possible de celle recherchée. Cependant décrire toute la courbe charge-déplacement n'est pas toujours possible avec les méthodes classiques de résolution. En effet, le comportement de certaines structures géométriques non linéaires est souvent le siège d'équilibres instables donnant naissance à des points limites en charge ou en déplacement (**Fig. IV.8**). Il s'agit donc d'utiliser des stratégies de résolution, qui, associées aux méthodes incrémentales-itératives citées, permettent de suivre tout le chemin d'équilibre et de passer d'éventuels points limites. Les différentes stratégies utilisées actuellement se différencient les unes des autres par la manière avec laquelle est imposé le paramètre incrémental choisi. Ces stratégies sont généralement appelées techniques de pilotage, et nous dirons par exemple pour le cas où le paramètre incrémental est la charge : pilotage ou contrôle en charge imposée. [13]

Avant de développer cette technique, une présentation de la notation utilisée ainsi qu'une définition détaillée de la position du problème est nécessaire.

##### Notation :

Afin d'éviter toute confusion entre les grandeurs relatives à un incrément et celles relatives à une itération, nous adoptons la notation suivante :

##### Procédure incrémentale :

C'est le passage d'un état connu noté (p) à un autre état à chercher noté (p+1). Nous notons une grandeur G passant de l'incrément (p) à l'incrément (p+1) par :

Incrément (p)	Incrément (p+1)
$G_p$	$G_{p+1}$

##### Procédure itérative :

La grandeur G est notée à l'itération (i) et à l'itération (i+1) par :

Itération (i)

 $G^{(i)}$ 

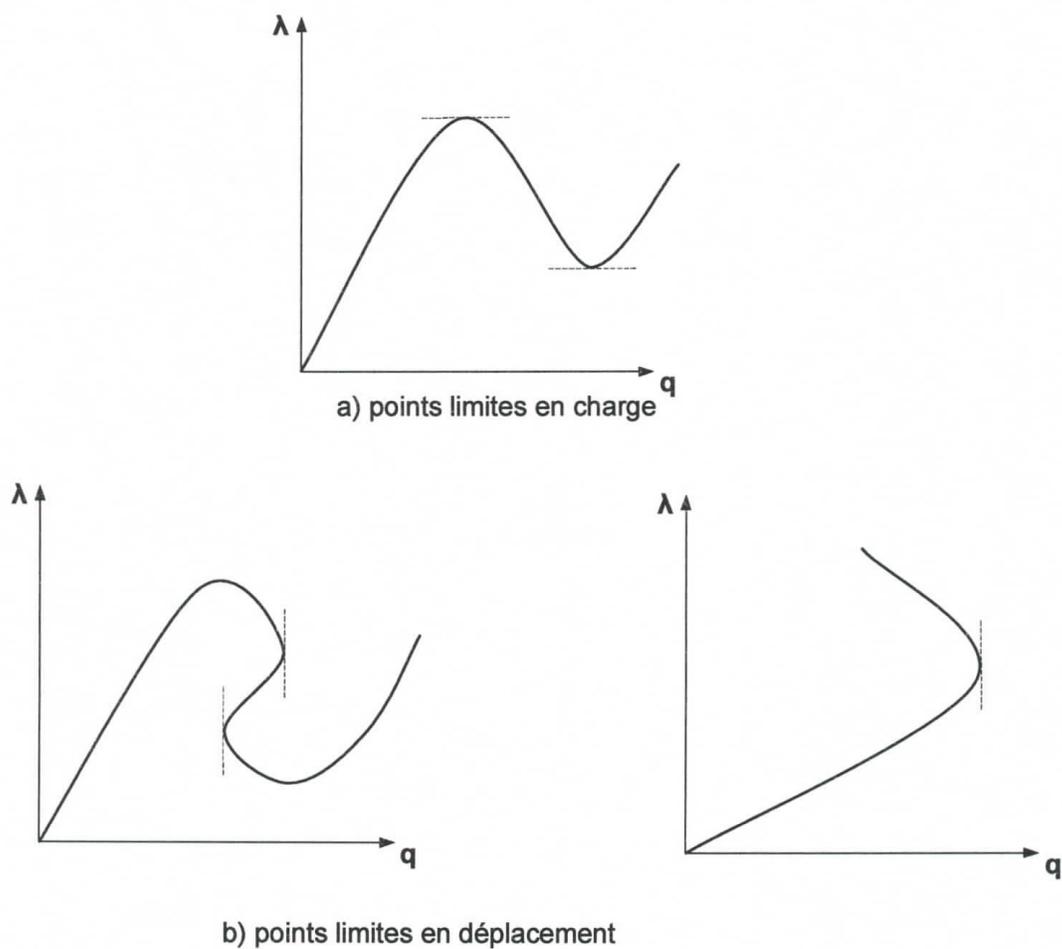
Itération (i+1)

 $G^{(i+1)}$ 

Par exemple, nous notons la grandeur  $G$  relative à l'incrément ( $p$ ) et à l'itération ( $i$ ) par :  $G_p^{(i)}$

Une grandeur relative à une solution convergée est notée simplement par rapport à l'incrément correspondant :  $G_p$

Si la grandeur  $G$  est un vecteur  $\{G\}$ , sa  $k^{\text{ème}}$  composante est notée  $(G)_k$



**Fig. IV.8** Représentation unidimensionnelle des types de points limites

**IV.5.a) Équation d'équilibre et position du problème :**

L'équation gouvernant l'équilibre d'une structure à comportement non-linéaire et discrétisée par élément fini s'écrit :

$$\{P_{\text{ext}}(\{T\}, \lambda)\} - \{Q(\{T\})\} = \{0\} \quad \text{IV.39}$$

$$P_{\text{ext}}(\{T\}, \lambda) :$$

$\{T\}$  : Vecteur de température

$\lambda$ : paramètre de charge, en considérant un seul paramètre de charge et un chargement indépendant de l'état de déplacement nous écrivons :

$$\{P_{\text{ext}}(\{T\}, \lambda)\} = \lambda \{P_{\text{ext}}\} \quad \text{IV.40}$$

$Q(\{T\})$  : Vecteur des forces internes.

- **Position du problème :**

L'équation (IV.39) représente un système à (n) équations non-linéaires en  $\{T\}$ . La résolution consiste en la détermination de (n+1) inconnues qui sont les (n) composantes du vecteur déplacement  $\{q\}$ , et le paramètre scalaire  $\lambda$ . Ces inconnues sont déterminées en satisfaisant à l'équation (IV.39) et à une équation supplémentaire liant le vecteur  $\{T\}$  et le paramètre  $\lambda$  tel que :

$$F(\{T\}, \lambda) = 0 \quad \text{IV.41}$$

Cette équation supplémentaire définit en fait, le paramètre incrémental à imposer. Nous l'explicitons lors de présentation de chaque technique de pilotage. Nous développons au préalable, la procédure générale de résolution de Newton-Raphson dans laquelle va être inclus ces techniques de pilotage.

- **Procédure générale de résolution de Newton-Raphson :**

Soit une solution non convergée à l'incrément (p) et à l'itération (i) définie par le couple charge-déplacement suivant :

$$\left( \{T_p^{(i)}\}, \lambda_p^{(i)} \right) \quad \text{IV.42}$$

Cette solution non convergée provoque un déséquilibre entre les forces extérieures et celles intérieures. On écrit dans ce cas, l'équation (IV.39) dans cette position non équilibrée sous la forme suivante :

$$\lambda_p^{(i)} \cdot \{P_{ext}\} - (Q_p^{(i)}(\{T_p^{(i)}\})) = \{R_p^{(i)}\} \quad \text{IV.43}$$

Où  $\{R_p^{(i)}\}$  : représente le vecteur des forces résiduelles de déséquilibre (ou résidu).

Le déséquilibre du système défini par la relation (IV.43) peut être éliminé si la solution (IV.42) est corrigée. Le processus de Newton-Raphson nous permet de corriger la solution (IV.42) par une solution à l'itération (i+1) et à l'incrément (p) telle que :

$$\begin{cases} \{T_p^{(i+1)}\} = \{T_p^{(i)}\} + \{\Delta T_p^{(i)}\} \\ \lambda_p^{(i+1)} = \lambda_p^{(i)} + \Delta \lambda_p^{(i)} \end{cases} \quad \text{IV.44}$$

Le couple solution correctif  $\{q_p^{(i+1)}\}$  et  $\lambda_p^{(i+1)}$  est obtenue après résolution du système :

$$[K_p^{T(i)}] \{\Delta T_p^{(i)}\} = \Delta \lambda_p^{(i)} \{P_{ext}\} + \{R_p^{(i)}\} \quad \text{IV.45}$$

$$F(\{T_{p+1}\}, \lambda_{p+1}) = 0 \quad \text{IV.46}$$

La relation (IV.45) représente l'écriture linéarisée de l'équilibre en éléments finis à l'incrément (p) avec

$[K_p^{T(i)}]$  : la matrice de conductivité tangente définie à l'incrément (p) et à l'itération (i)

La relation (IV.46) définit le paramètre incrémental à imposer.

Ainsi, si la solution (IV.44) corrigée par la résolution du système (IV.45) et (IV.46), provoque toujours un déséquilibre, le processus de correction sera répété autant de fois qu'il est nécessaire jusqu'à obtention d'une solution convergée. Cette procédure est générale pour les trois techniques de résolution que nous nous proposons de développer. La différence entre l'une et l'autre de ces techniques réside dans la définition de la fonction  $F$ .

# C

## HAPITRE V: Validation & évaluation

### V.1) Avant-propos :

Le programme développé ici sous MatLab<sup>(1)</sup> est pour la résolution d'un problème thermique (distribution de la température et le champ de flux) linéaire et non linéaire dans un élément unidimensionnel.

L'Organigramme suivant présente la structure générale de notre programme développé dans cette étude :

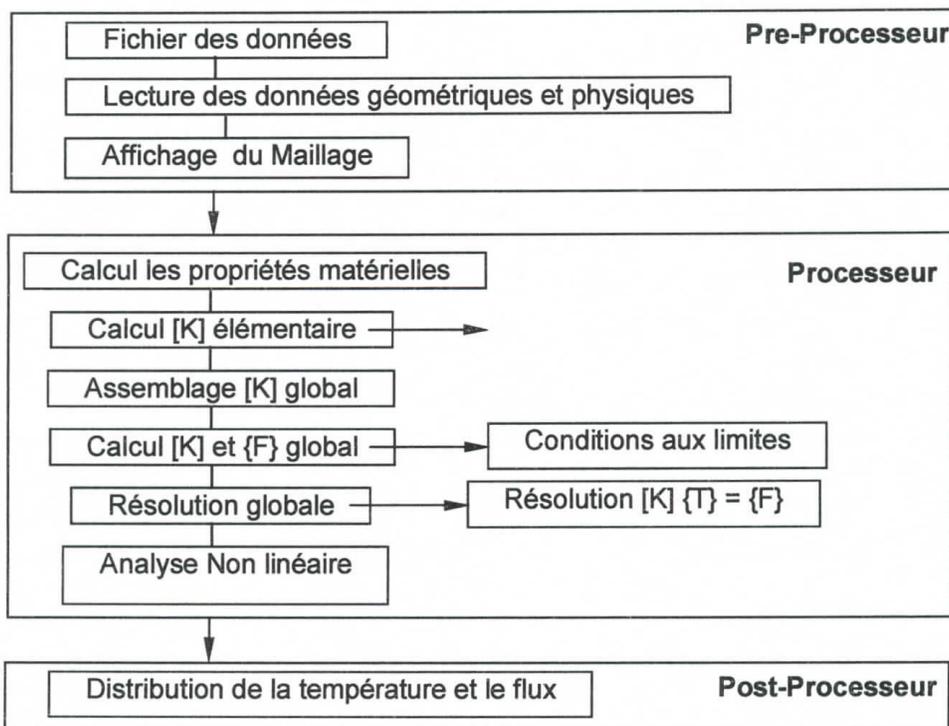


Fig.V.1: Organigramme du programme développé sous MATLAB

<sup>1</sup>MATLAB est un logiciel interactif basé sur le calcul matriciel (MATrix LABoratory). Il est utilisé dans les calculs scientifiques et les problèmes d'ingénierie par ce qu'il permet de résoudre des problèmes numériques complexes en moins de temps requis par les langages de programmation et cette grâce à une multitude de fonctions intégrées et à plusieurs programmes outils testés et regroupés selon usage (boîtes à outils ou Toolbox).

## V.2) Introduction :

Dans cette section, nous présenterons les résultats obtenus avec quelques tests choisis dans la littérature pour examiner les performances (précision et convergence) de l'élément unidimensionnel présenté précédemment discrétisé par la méthode des éléments finis. Ces tests sont utilisés, entre autres, pour valider et évaluer l'élément numérique, vérifier la formulation et la mise en évidence de la convergence (précision) en fonction du nombre d'éléments et de comparer les performances obtenues en discrétisant avec un ensemble d'éléments unidimensionnels.

Les exemples tests concernent :

### Validation des éléments unidimensionnels en analyse Linéaire :

- Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée par éléments fins.
- L'étude de l'influence de la discrétisation sur le résultat par éléments finis;
- L'étude de l'influence des conditions aux limites;

### Validation des éléments unidimensionnels en analyse Non Linéaire:

- L'influence des conditions aux limites conduction - Rayonnement;
- L'influence de la variation de la conductivité  $k(T)$ .

## V.3) Validation en analyse linéaire

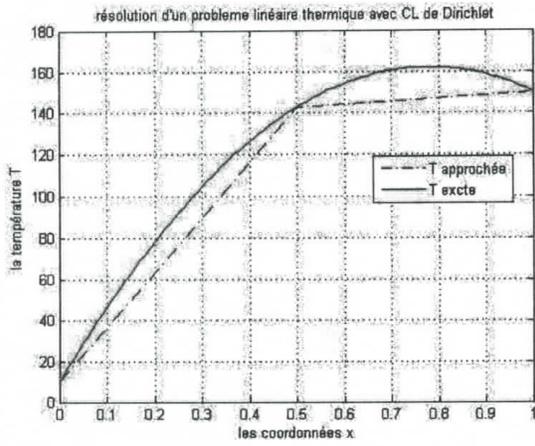
### V.3.a) Étude de l'influence de la discrétisation sur le résultat par éléments finis:

En premier temps, nous allons étudier l'influence de la discrétisation (nombre d'éléments élémentaires), dans le cas d'un problème thermique linéaire, sur les calculs ou bien la différence entre les calculs exacts et les calculs numériques (approchés) par éléments finis.

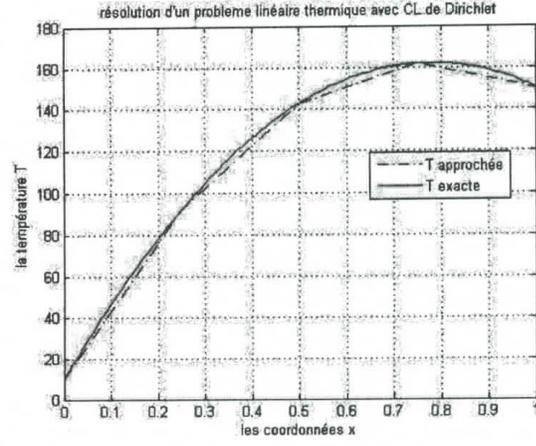
#### Données :

- La conductivité thermique  $k_x=1 \text{ W/m C}$
- Longueur  $L=1 \text{ m}$
- Températures aux limites  $T_0 = 10 \text{ °C}$  et  $T_f=150 \text{ °C}$
- Nombre d'éléments  $n_x= 2, 4, 6, 8, 10, 20, 50$  et  $100$
- Source de chaleur externe  $Q=500 \text{ W/m}^2$

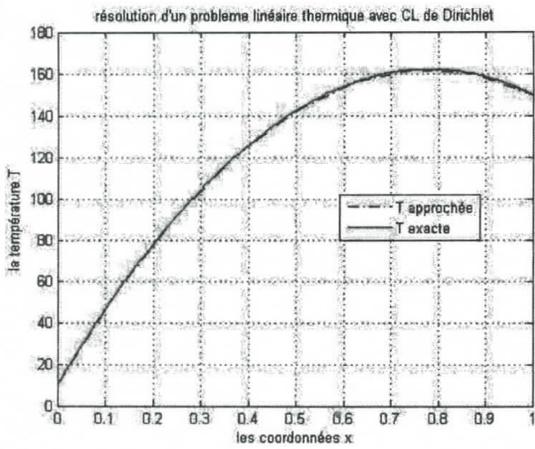
Les résultats obtenus sont:



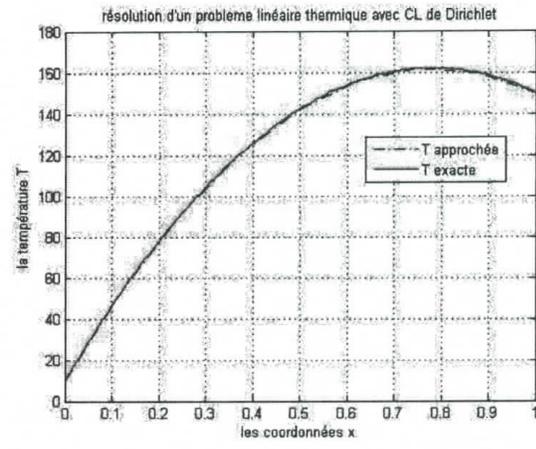
(a)  $nx=2$



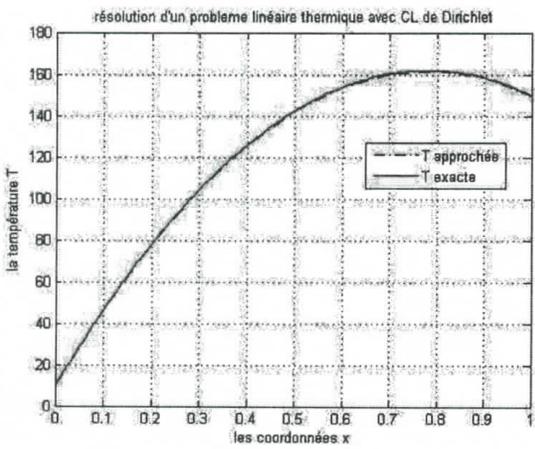
(b)  $nx=4$



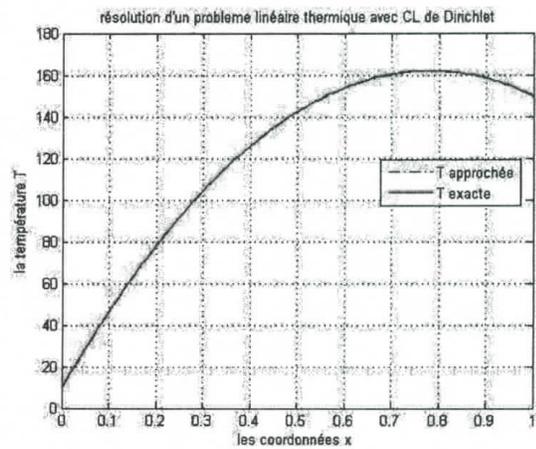
(c)  $nx=6$



(d)  $nx=8$



(e)  $nx=10$



(f)  $nx=20$

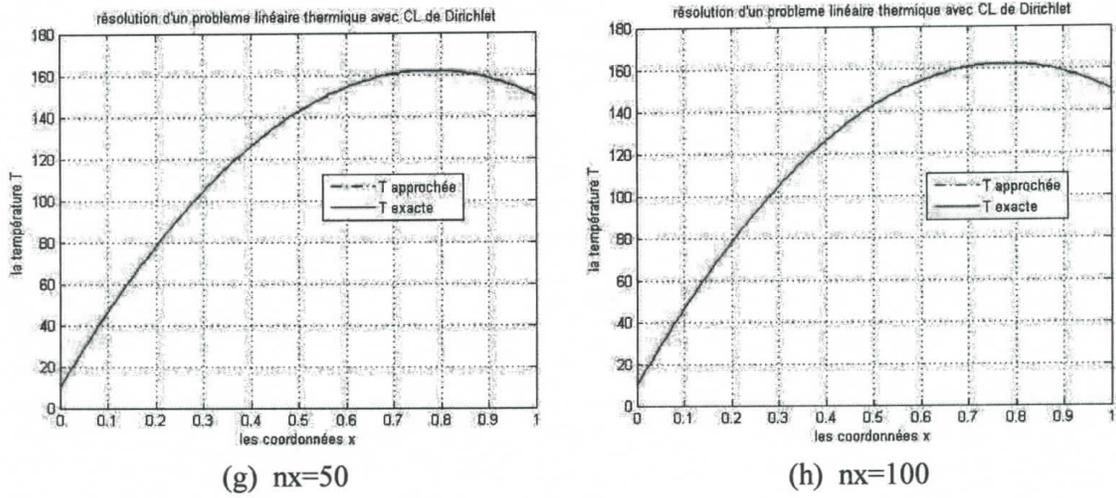


Fig V.2 : Influence de la discrétisation (représentation de  $T_{\text{exact}}$  et  $T_{\text{apr}}$ )

Les résultats indiqués sur les figures IV.2. a, b, c, d, e, f, g, et h suscitent ce qui suit :

- Un bon raffinement de maillage (l'augmentation de nombre nœuds) est nécessaire pour réduire l'erreur et obtenir de bons résultats à tout point donné;
- L'élément développé dans cette étude est fiable et valide;
- La bonne présentation des conditions aux limites.

Pour le test suivant, on garde les mêmes conditions mais avec un changement du facteur de la conductivité thermique  $k_x=50.2\text{W/m C}$ , qui correspondre à celle de l'acier normal, on obtient les résultats suivante:

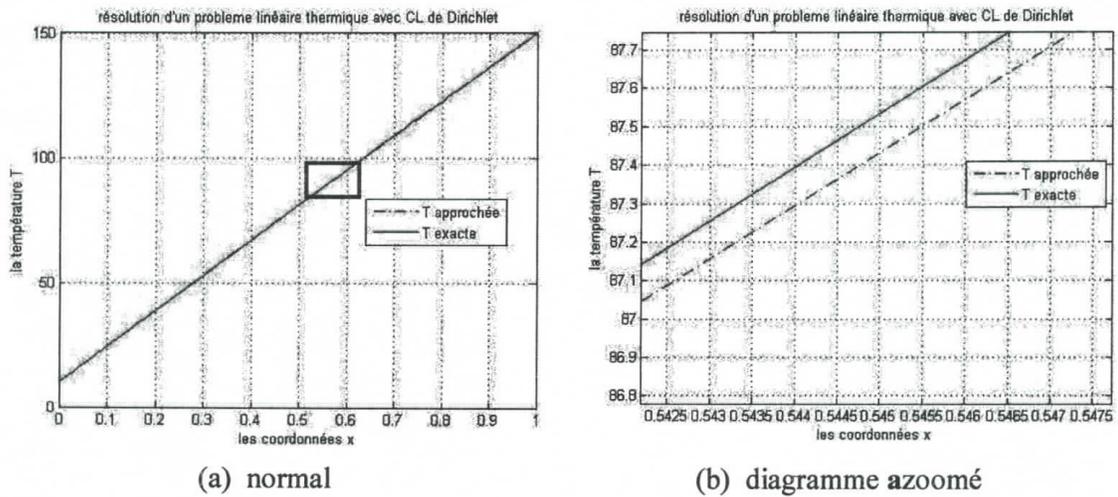


Fig V.3 : Influence de la discrétisation (représentation de  $T_{\text{exact}}$  et  $T_{\text{apr}}$ )  $n_x=2$

Les résultats indiqués sur les figures IV.3.a et b

- L'effet de la conductivité thermique de l'acier ( $k_x=50.2 \text{ W/m C}$ ) est important que l'effet de la source externe de chaleur et qui a fait que la distribution de la température soit linéaire;
- La solution obtenue par la méthode des éléments finis (T approchée) est très proches de la solution exacte (la figure V.3.b représente un zoom du diagramme V.3.a) et l'erreur est négligeable;
- Ce résultat confirme que l'élément développé dans cette étude est fiable et valide.

### V.3.b) Étude de l'influence des conditions aux limites (pour le cas d'un acier)

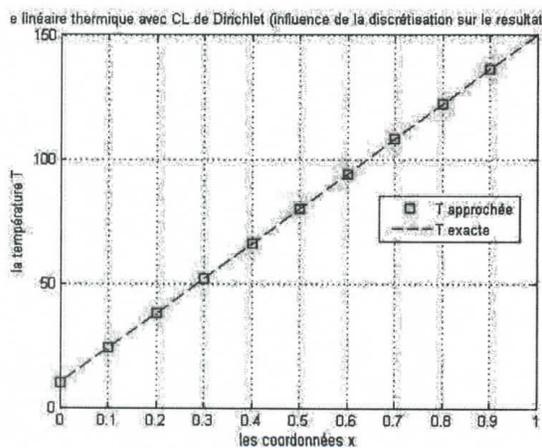
En deuxième lieu, nous allons fixer le nombre d'éléments  $n_x=10$  et étudier l'effet des conditions aux limites qui sont de type:

- **Dirichlet**: où la température T imposée;
- **Neumann**: où le flux est imposé;
- **Cauchy (mixte)**: l'ensemble des deux cas précédentes (température et flux imposés).

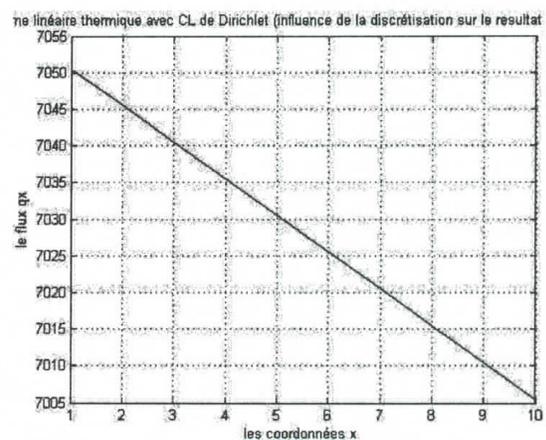
#### 1. Type Dirichlet :

##### Données :

- Problème thermique linéaire
- Élément en acier normal:
- La conductivité thermique à  $T=293 \text{ °K}$  ( $20 \text{ °C}$ ) est  $k_x=50.2 \text{ W/m C}$
- Longueur  $L=1 \text{ m}$
- Températures aux limites  $T_0 = 10 \text{ °C}$  et  $T_f=150 \text{ °C}$
- nombre d'éléments  $n_x=10$



(a) la température



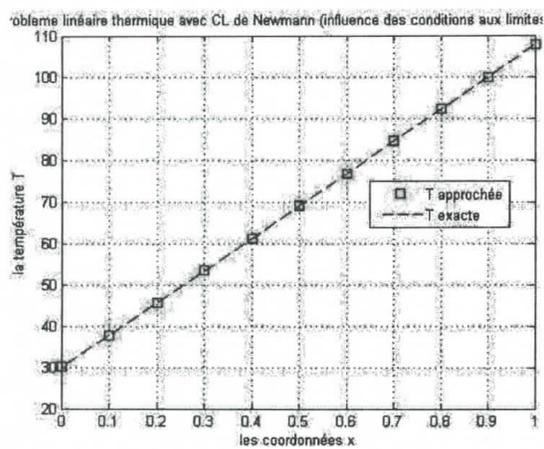
(b) le flux

**Fig V.4 : Influence des conditions aux limites (Dirichlet)**

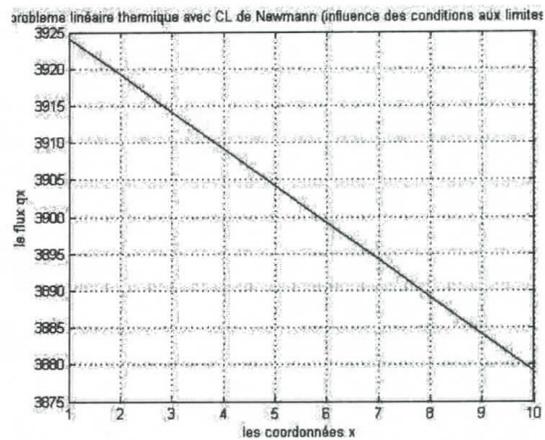
## 2. Type Neumann:

### Données :

- Matériau: acier normal;
- La conductivité thermique à  $T=293 \text{ °K}$  ( $20 \text{ °C}$ ) est  $kx=50.2 \text{ W/m K}$ ;
- Le coefficient d'échange thermique par convection  $h= 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ;
- Longueur  $L=1 \text{ m}$ ;
- Températures aux limites  $T_0 = 10 \text{ °C}$ ;
- Température extérieure  $T_{\text{ext}}=100 \text{ °C}$ ;
- Source de chaleur externe  $Q_0=30 \text{ W/m}^2$ ;
- Source de chaleur externe  $Q_1=50 \text{ W/m}^2$ ;
- Nombre d'éléments  $n_x= 10$ .



(a) la température



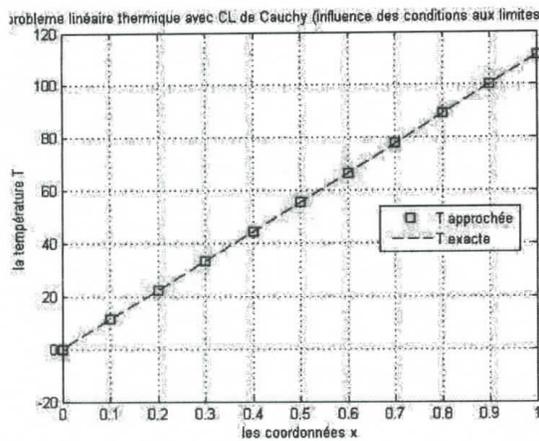
(b) le flux

Fig V.5 : Influence des conditions aux limites (Neumann)

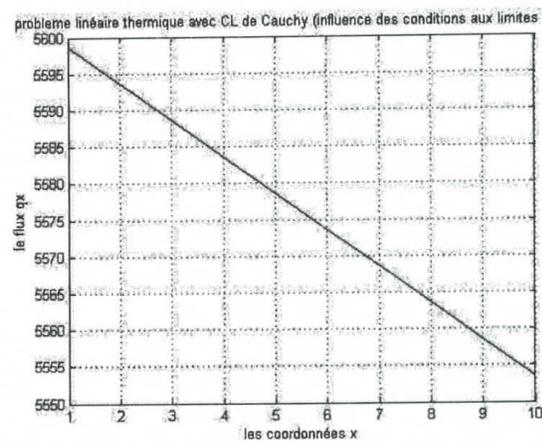
## 3. Type Cauchy (mixte):

### Données :

- Matériau: acier normal;
- La conductivité thermique à  $T=293 \text{ °K}$  ( $20 \text{ °C}$ ) est  $kx=50.2 \text{ W/m K}$ ;
- Le coefficient d'échange thermique par convection  $h= 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ;
- Longueur  $L=1 \text{ m}$ ;
- Températures aux limites  $T_0 = 10 \text{ °C}$ ;
- Température extérieure  $T_{\text{ext}}=100 \text{ °C}$ ;
- Source de chaleur externe  $Q=50 \text{ W/m}^2$ ;
- Nombre d'éléments  $n_x= 10$ .



(a) la température



(b) le flux

**Fig V.6 : Influence des conditions aux limites (Cauchy)**

De ce qui précède on remarque que,

- L'élément de calcul respecte les conditions aux limites quel que soit leurs types
- La solution obtenue par la méthode des éléments finis (T approchée) superpose la solution exacte et l'erreur est négligeable;
- Ce résultat confirme une nouvelle fois que l'élément développé dans cette étude est fiable et valide.

#### V.4) Validation en analyse Non linéaire

##### V.4.a) L'influence des conditions aux limites sur le résultat par éléments finis:

Dans cette partie, nous allons étudier l'influence des conditions aux limites sur la fiabilité des calculs numériques (approchés) par éléments finis. Autrement dit, nous allons procéder à un test sur un élément unidimensionnel sous l'effet de deux sources (transfert de chaleur par conduction et par rayonnement) avec une conductivité thermique du matériau constante.

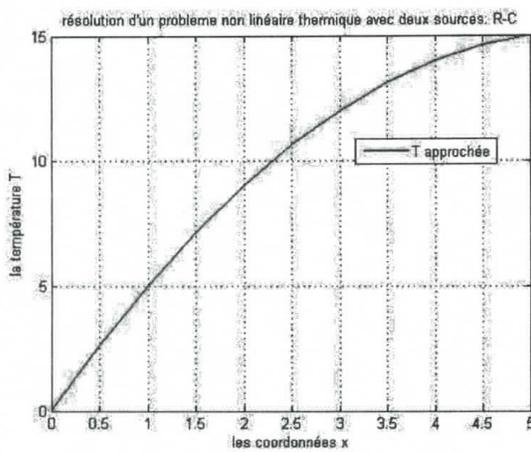
Pour résoudre ce problème nous utiliserons la méthode incrémentale itérative de Newton-Raphson.

##### Type Cauchy (mixte):

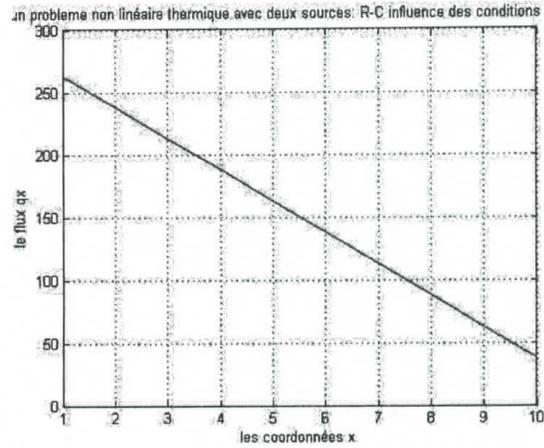
##### Données :

- Matériau: acier normal;
- La conductivité thermique  $k_x=50.2\text{W/m K}$ ;
- Longueur  $L=5\text{ m}$ ;
- Températures aux limites  $T_1=90\text{ °C}$ ,  $T_f=15\text{ °C}$ ;
- Température extérieure  $T_\infty=100\text{ °C}$ ;

- Source de chaleur externe  $Q=50 \text{ W/m}^2$ ;
- Emissivité à une longueur d'onde de 8 à 14  $\mu\text{m}$   $\epsilon = 0.5$ ;
- Constante de Boltzmann  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ ;
- Erreur  $R= 0.001$ ;
- Nombre d'éléments  $n_x= 10$ .



(a) la température



(b) le flux

Fig V.7 : Influence des conditions aux limites Pb Non Linéaire

Les résultats obtenus sont:

Itération	Température calculée en °C	Erreur
1	0.0837	89.9163
2	0.0282	0.0555
3	0.0282	$2.3120 \times 10^{-14}$

- On remarque que le code de calcul n'a pas pris beaucoup de temps pour résoudre le problème (3<sup>ème</sup> itération seulement avec une erreur de  $2.3120 \times 10^{-14}$ )
- Les conditions aux limites sont respectées
- L'élément développé dans cette étude est fiable et valide en analyse Non linéaire

**V.4.b) L'influence de la variation de la conductivité k(T):**

Maintenant, nous allons étudier l'influence de la conductivité thermique qui est en fonction de la température (variation linéaire de la forme  $k_x(T) = aT + b$ ).

**Données :**

- La conductivité thermique  $k_x=0.15 \text{ W/m K}$ : valeur initiale pour le calcul
- $k_x(T) = 10T+15$
- Longueur  $L=5 \text{ m}$ ;
- Températures aux limites  $T_1= 10 \text{ °C}$ ,  $T_f=15 \text{ °C}$ ;
- Erreur  $\epsilon= 0.001$ ;

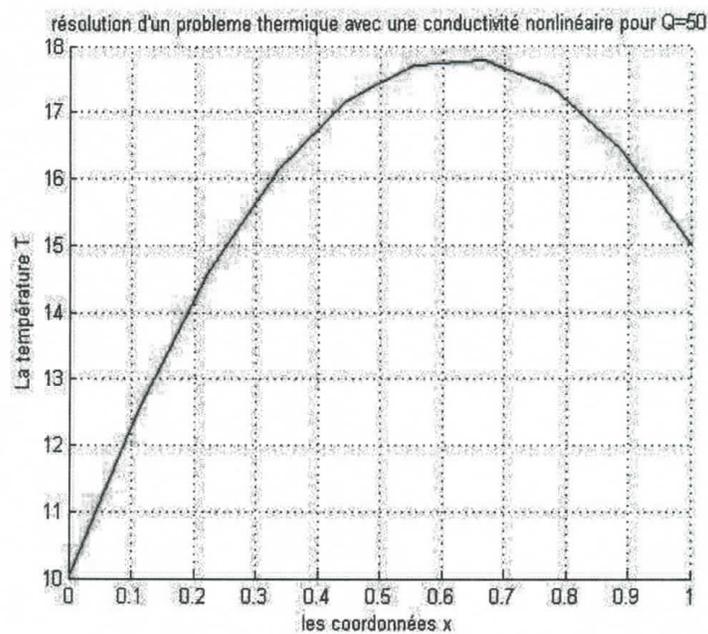
- Nombre d'éléments  $n_x=10$ .

Ce type d'analyse nonlinéaire concerne la variation de la conductivité thermique en fonction de la température, c'est difficile de programmer ce type de nonlinéarité à cause de l'actualisation de température pour chaque pas de résolution, l'algorithme adopté pour cette analyse est l'algorithme de Newton-Raphson qu'il est bien détaillé dans l'annexe, les démarches suivies sont définies dans le précédent chapitre.

La comparaison des résultats obtenus avec des résultats analytiques de Yiwu[15] a permis de confirmer la validité du modèle proposé dans cette étude. La tolérance utilisée de la convergence de la solution est adopté  $\epsilon=0.001$ .

**Tableau V.1** : comparaison des résultats obtenus avec les résultats analytiques pour  $Q=50W/m^2$

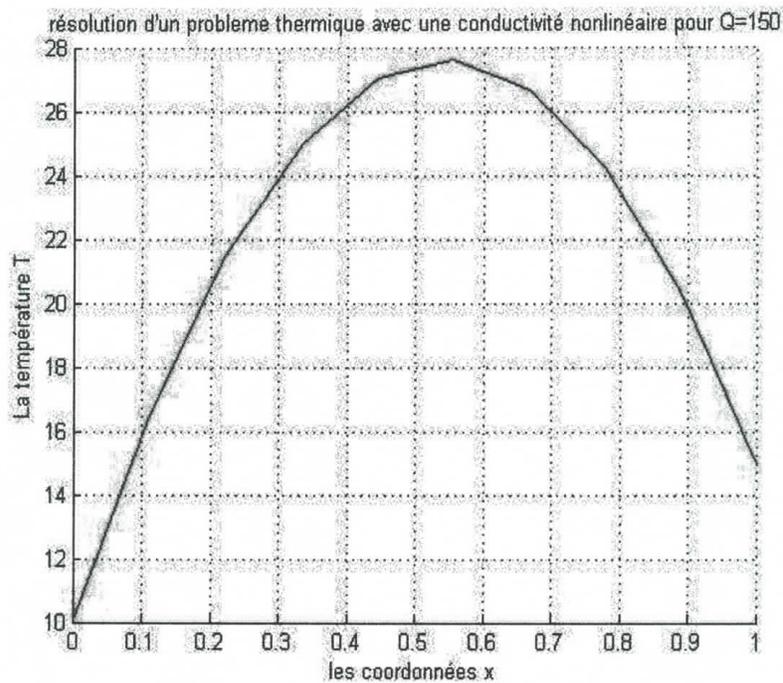
x	T <sub>nonlMEF</sub>	T <sub>Analytique [15]</sub>	Erreur (%)
0.2	14.5679	15,0923444	3.47
0.4	16.5556	17,4611913	5.16
0.6	17.7778	18,9831348	6.32
0.8	17.1111	18,2575437	6.24



**Fig V.8** : Analyse nonlinéaire de la conductivité thermique pour source de chaleur  $Q=50W/m^2$ .

**Tableau V.2 :** comparaison des résultats obtenus avec les résultats analytiques pour  $Q=150\text{W/m}^2$

x	$T_{\text{nonMEF}}$	$T_{\text{Analytique [15]}}$	Erreur (%)
0.2	21.4815	22,7424641	5.54
0.4	26.0370	27,3771244	4.89
0.6	26.6667	28,562169	6.61
0.8	23.5926	25,1733042	6.27

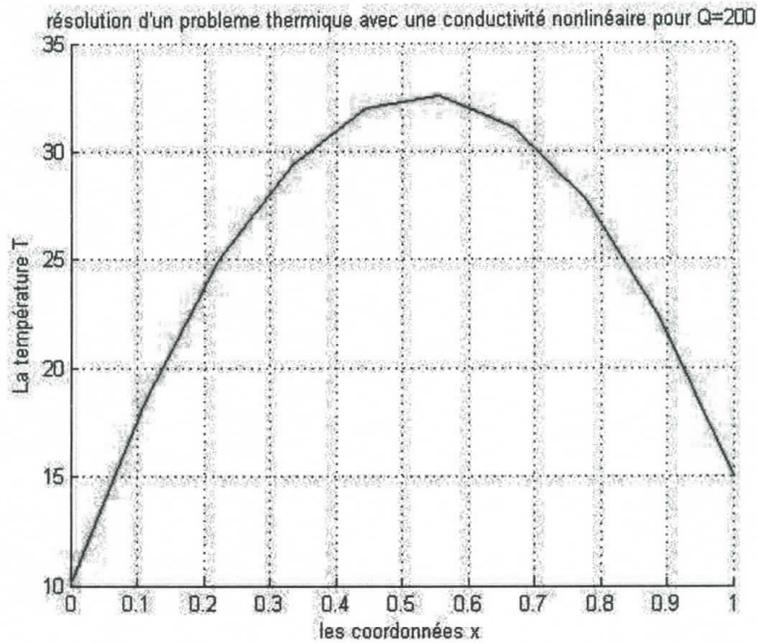


**Fig V.9 :** Analyse nonlinéaire de la conductivité thermique pour source de chaleur  $Q=150\text{W/m}^2$ .

Les résultats obtenus sont illustrés dans les tableaux V.1, V.2 et V.3, et les figures Fig. V.8, V.9 et V.10. Le bon comportement de notre formulation présentée par l'élément unidimensionnel est clair sur les tableaux, il montre aussi qu'il ne souffre pas des problèmes d'instabilité numérique de la méthode de Newton-Raphson, et qu'il converge vers la solution analytique.

**Tableau V.3 :** comparaison des résultats obtenus avec les résultats analytiques pour  $Q=200\text{W/m}^2$

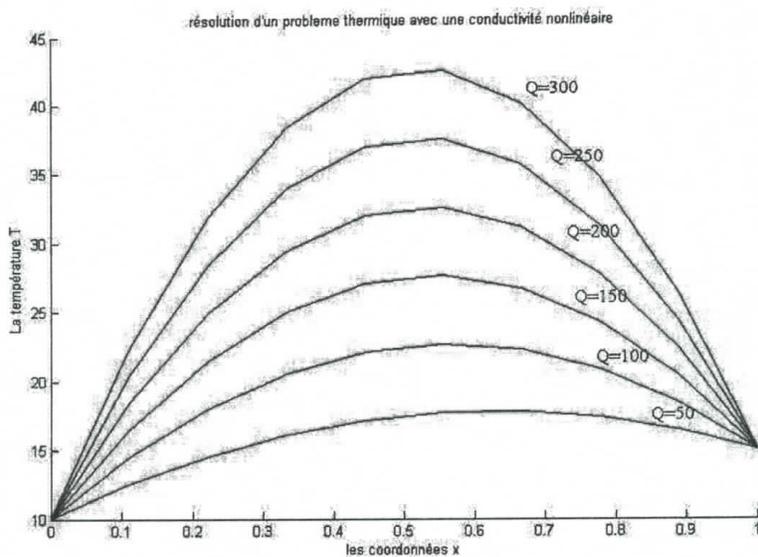
x	$T_{\text{nonMEF}}$	$T_{\text{Analytique [15]}}$	Erreur (%)
0.2	24.9383	26,3797337	5.45
0.4	31.9753	33,6850193	5.04
0.6	32.5309	34,97332	6.97
0.8	27.7160	29,4399352	5.84



**Fig V.10 :** Analyse non linéaire de la conductivité thermique pour source de chaleur  $Q=200\text{W/m}^2$ .

A travers cette validation, nous présentons par la suite la figure V.11 qui présente plusieurs configurations de la source de chaleur extérieure et leurs effets sur le comportement thermique non linéaire.

Le bon comportement est assuré et la présentation correcte des conditions aux limites est toujours respectée. Ces deux remarques sont tirées d'après la figure V.11.



**Fig V.11 :** Etude de l'effet de la source de chaleur extérieure sur le comportement thermique nonlinéaire dans un domaine unidimensionnel

En conclusion finale, nous avons également relevé les problèmes traités avec une exactitude et une précision conformes avec cette contribution exprimée par la formulation numérique par éléments finis, ce qui constitue un axe permet de l'extrapoler au d'autres problèmes sortant du cadre de cette étude de modéliser les problèmes thermiques par éléments finis.

---

---

## C onclusion Générale

---

---

La formulation et l'évaluation des modèles éléments finis pour l'analyse thermique constituent l'un des axes de recherches importants de la modélisation des problèmes de transfert de chaleur. C'est dans cet esprit que notre travail se situe et se veut une étude de nature théorique et numérique, relative à la présentation un modèle en éléments finis dédiée à l'analyse thermique linéaire et non linéaire dans les domaines unidimensionnels. Cet élément a été programmé et implanté dans un code numérique sur Matlab. Les problèmes thermiques, que nous avons traités, sont discrétisés à l'aide d'un élément unidimensionnel à deux nœuds. Ce modèle se caractérise par une interpolation linéaire du champ thermique basée sur les polynômes de Lagrange pour chaque nœud. La matrice de conductivité et le vecteur de la source thermique extérieure sont obtenus de façon explicite en intégrant des modules permettant l'introduction des données dans le cas de transfert thermique par conduction. L'évaluation de ce modèle est faite suivant un certain nombre de cas tests dont la plupart sont ceux proposés dans la littérature à l'aide des méthodes de résolutions analytiques. À travers les résultats obtenus, dans les deux cas de l'analyse linéaire et non linéaire, nous pensons que cet élément a un comportement correct par comparaison à d'autres résultats (analytiques).

### VIII.2) Remarques et conclusions

En nous basant sur les tests portés dans cette étude, nous pouvons présenter les conclusions suivantes

1. Le modèle linéaire proposé dans cette étude est valable pour modéliser le phénomène de transfert thermique à un haut degré d'exactitude.
2. Cet élément présente un bon comportement et une convergence convenable dans l'analyse non linéaire à cause de sa simplicité d'approximation et de ces avantages dans la formulation utilisant la technique de condensation des degrés de liberté.
3. Le modèle nonlinéaire proposé dans cette étude est permet de simuler séparément les deux phénomènes nonlinéaires : de changement de phase et de conditions aux limites, qui présente la réalité de ces deux phénomènes.

4. L'élément fini présenté dans cette étude possède une interpolation linéaire qui permet d'une convergence monotone vers la solution analytique, Cependant, dans la majorité des problèmes, le champ de température est interpolé par des éléments d'ordre supérieur afin de modéliser le champ de température correctement. Malheureusement ce genre d'éléments est couteux au niveau de calcul et donc pour une meilleure utilisation de l'élément que nous avons construit, il faut l'utiliser avec un maillage homogène et raffiné pour une présentation fiable du champ thermique.

5. La réduction du nombre d'itérations est liée à la façon de construction de la matrice tangente élémentaire qui conduit à un gain considérable sur le temps de calcul par ordinateur.

En conclusion ce travail a permis de mettre en évidence la bonne performance de l'élément fini formulé dans leur coordonnées naturelles en plan avec une interpolation linéaire du champ de température et la géométrie, l'ensemble des avantages que nous avons cité dans les conclusions du Chapitre IV, nous conduit à déduire que c'est un élément simple efficace et fiable, est constitué un grand intérêt pour l'analyse thermique linéaire et non linéaire.

#### **RECOMMANDATIONS**

Notre travail a permis de faire une contribution pour la mise au point d'un modèle élément finis pour l'analyse non linéaire en général des problèmes thermiques. Nous pensons que ce travail peut être étendu aux :

- Non linéarité combinée pour pouvoir simuler les problèmes industriels d'emboutissage;
- La nécessité de disposer un élément à interpolation élevée
- L'utilisation des processus d'accélération de convergence, ou bien l'utilisation d'autres méthodes de résolution des problèmes non linéaires. Pour réduire encore le temps de calcul.

# Références Bibliographiques

- [1] Bathe, K.J. “*Finite element procedures*” ,Prentice Hall . 1996.
- [2] Reddy,J.N.”*An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis* “,Oxford University press.2004.
- [3] Crisfield,M.A. “*Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Vol.1: Essentials* “.John Willy & Sons.2000.
- [4] Crisfield,M.A. “*Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Vol.2: Advanced Topics* “.John Willy & Sons.2000.
- [5] Zienkiewicz.O.C & Taylor R.L «*The Finite Element Method Its Basis and Fundamentals*” Sixth edition . Elsevier.2005
- [6] Zienkiewicz.O.C & Taylor R.L «*The Finite Element Method for fluid dynamics*” Sixth edition .Elsevier.2005.
- [7] Bonet.J, Wood R.D.” *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*”.Cambridge University press.1997.
- [8] R.W. Lewis, P. Nithiarasu and K.N. Seetharamu.”*Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow.*”Wiley, Chichester, 2004.
- [9]E. Onate. Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective–diffusive transport and fluid flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151:233–265, 1998.
- [10] E. Onate. Multiscale computational analysis in mechanics using finite calculus: an introduction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3043–3059, 2003.
- [11] E. Onate. Possibilities of finite calculus in computational mechanics.*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:255–281, 2004.
- [12] J.M. Bergheau, R. Fortunier .*Finite Element Simulation of Heat Transfer*,by ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc, 2004.
- [13] G.Dhatt ,G.Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis* ,Presses de l’université de Laval Québec 1981.
- [14] IMBERT, J.F. *Analyse des Structures par Eléments Finis*. Cépaduès Editions – 3<sup>ème</sup>édition ,1995.
- [15]Yuan Yiwu , *THE SIMILAR SOLUTIONS OF NONLINEAR HEAT CONDUCTION EQUATION* , *Applied Mathematics and Mechanics* Vol 16 N 9 sep 1995.

# Annexe

## Organigramme de résolution d'un problème non linéaire par la méthode Newton-Raphson

