

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE « SALHI AHMED » DE NAAMA



INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE TECHNOLOGIE

MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Energétique

Intitulé de Mémoire

**Méthode des volumes finis pour la résolution numérique
en MATLAB de la conduction 2D dans un demi-
annulaire**

Présenté par :

KHAFFAG SAMIHA

SALMI SIHAM

YOUB ZAHRA

Devant le jury composé de :

Mr. Badaoui Abdelhamid	MCB	Ctr Univ Naama	Président
Mr. Kaid Noureddine	MCB	Ctr Univ Naama	Encadreur
Mr. Benameur Benamar	MAA	Ctr Univ Naama	Examineur

Année universitaire 2017-2018

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ma très chère mère FATIHA : Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Amon Père MOHAMMED: Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.

A mes chère frères : Rachid, Sofiane, Hocine, Marwane

Mes chères sœurs : Somia, Fayza, Nawal, Bochra

La femme de mon frère : Fathia

Mes grandes mères : Sajia, Zohra

Poussins de famille : Nariman, Sondos, Roeya, Taky elDin

A toute la famille : YOUB, TAIBI

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour,

Et les personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, Mes aimables amis, Collègues d'étude, et frères de cœur.

Z. Youb

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A ma très chère mère KHNATHA : Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Amon Père BENAÏSSA: Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.

A mes chère frères : NASREDDINE, MOHAMMED, ZAKARIA, ABDELHADI, SAYFDINE

Mes chères sœurs : AFAI, IKRAM

A toute la famille : SALMI, GHEZAL

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour,

Et les personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé,

Qui étaient toujours à mes côtés,

Mes aimables amis,

Collègues d'étude, et frères de cœur.

S. Salmi

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ma très chère mère A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi. ; Maman : OMELKHAIR que j'adore. Que dieu vous préserve dans son vaste paradis.

A mon Père BOUZADA : Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.

A mes chère frères : Abdelkader, Ammar, Oussama

Ma chère sœur : Fadhila et son fils Abderrahmane

MA grande mère

Mon oncle : Mohammed

Mes oncles maternels

A toute la famille : KHAFAG, ADOU, DAOUDI

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour,

Et les personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, mes aimables amis, collègues d'étude, et frères de cœur.

S. Khaffag

Remerciements

Ce mémoire, depuis sa conception jusqu'à sa réalisation, n'aurait pas été possible sans la grâce de Dieu et la contribution de certaines personnes.

Nous voudrions exprimer notre gratitude en particulier à Dieu Tout-Puissant pour nous avoir donné du courage et de la patience pour réaliser ce travail.

Nous exprimons toute ma gratitude à Monsieur l'encadreur

Mr. KAID NOUREDDINE pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi.

Nous adressons également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui Il nous a donné les bases de la science.

Nous remercions très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examineur,

Finalement, Nous remercions vivement toute personne qui a participé de près ou de loin réalisé de ce mémoire,

Merci....

Tables des Matières

Tables des Matières	vi
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xi
NOMENCLATURE	xii
Introduction générale	17
I. Chapitre I : Recherche Bibliographique	19
1. Introduction :	19
2. Etat de l'Art	19
3. Objectif de ce Travail	29
4. Conclusion :	29
II. Chapitre II : Différents mode de transfert	30
1. Introduction :	30
2. Modes de transfert de la chaleur :	30
2.1) Transfert de chaleur par conduction :	30
a). Loi de Fourier :	31
b). Equation fondamentale de transfert chaleur par conduction	32
2.2) Transfer de chaleur par convection :	34
a). La convection naturelle ou libre:	34
b). La convection forcée :	35
2.3) Transfer de chaleur par rayonnement :	38
a). Rayonnement électromagnétique : est constitué de radiations monochromatiques caractérisées par une longueur d'onde λ ou fréquence ν tel que :	38
b). Rayonnement thermique :	38
c). Rayonnement solaire :	39
d). Grandeurs énergétiques liées au rayonnement :	39
a). 1ère loi de WIEN :	41
b). 2è me loi de WIEN :	42
3. Conclusion :	42
III. Chapitre III : les méthodes de discrétisation	43
1. Introduction :	43
2. les méthodes de discrétisation :	43
2.1) Méthode des différences finies (MDF) :	43
a). Définition :	43

Tables des Matières

b).	Principe	43
c).	Approximation des dérivés par différences finies par le développement en séries de Taylor :	44
d).	La résolution de l'équation de différence finies :	46
2.2)	Méthode de volume fini :	47
a).	La forme différentielle est intégrale de l'équation de transport :	48
b).	Diffusion a une seule dimension régime stationnaire :	48
c).	Problème diffusion convection sans terme source VF (permanant) :	50
d).	Diffusion 2D sans terme source avec condition aux limites de NEUMANN :	52
2.3)	La méthode de l'élément fini :	55
a).	Définition :	55
b).	Le principe d'élément fini :	55
c).	La méthode des éléments finis en 1D :	56
d).	La méthode des éléments finis en 2D :	56
e).	Définition de l'approximation nodale	56
2.4)	Conclusion :	58
IV.	Chapitre IV : formulation mathématique	59
1.	Introduction :	59
2.	La modélisation et la simulation numérique :	59
3.	Hypothèse	59
4.	Equation polaire :	59
4.1)	Le premier cas :	59
a).	Conditions aux limites de type Dirichlet:	59
4.2)	Le deuxième cas :	64
a).	Conditions aux limites de type « flux nul » Neumann, « température imposée Dirichlet :	64
4.3)	le troisième cas :	68
a).	Conditions aux limites de type « flux nul » Neumann, « température imposée » Dirichlet et Robin « flux convection » :	68
5.	La résolution du système d'équations	71
6.	Organigramme du code MATLAB : pour la résolution de notre problème, nous avons utilise le code de calcule MATLAB.	73
7.	Conclusion :	74
V.	Chapitre V : Résultats et Interprétations	75
1.	Introduction :	75
2.	Test de maillage :	75

Tables des Matières

3. Discussions :	76
4. Validation de nos résultats :	76
4.1) Par TDMA	76
a). Tableau de comparaison des itérations entre les quatre méthodes	87
VI. Conclusion générale	88
Références bibliographiques	89
Annexe :	92
Annexe A	92
Annexe B	92
Annexe C	93
Annexe D	94
Annexe E	95

Liste des figures

Figure 1.Schéma de transfert de chaleur par conduction	31
Figure 2.schéma de loi de FOURIER.....	32
Figure 3.Schéma de Bilan énergétique.....	32
Figure 4.Schéma de transfert de chaleur par convection	34
Figure 5.Schéma de transfert de chaleur par rayonnement	38
Figure 6.Schéma de transfert de chaleur par les trois modes	42
Figure 7.Passage du domaine continu ou de domaine discret.....	44
Figure 8.Schéma explicite.....	46
Figure 9.Schéma implicite.....	46
Figure 10.Schéma de Crank Nicholson.....	47
Figure 11.Disposition de c.v 1D.....	48
Figure12.Disposition des CV et des noeuds pour 1D, problème de transport	49
Figure 13.Schéma convection diffusion unidimensionnel	50
Figure 14.Disposition des CV et des nœuds pour 2D, problème de transport	55
Figure 15.volume de contrôle CL Dirichlet	60
Figure 16. Volume de contrôle CL Neumann Dirichlet.....	65
Figure 17. Volume de contrôle CL Neumann Dirichlet Robin	69
Figure 18.organigramme du programme.....	73
Figure 19.les courbe de test de maillage	76
Figure 20.Le maillage et les isothermes avec une condition au limite Dirichlet (15x20) méthode TDMA	Erreur ! Signet non défini.
Figure 21.La distribution et les isothermes de la température avec une condition au limite Dirichlet (15x60) méthode TDMA	78
Figure 22.La distribution et les isothermes de la température avec une condition au limite Dirichlet (25x100) méthode TDMA	79
Figure 23.Le maillage et les isothermes avec condition aux limites Dirichlet et Neumann(5x30).....	80

Liste des Figures

Figure 24. La distribution et les isothermes de la température avec condition aux limite Dirichlet et Neumann (15x90).....	81
Figure 25. La distribution et les isothermes de la température avec condition aux limites Dirichlet et Neumann (25x150).....	82
Figure 26. Le maillage et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet, Neumann et Robin (5x10) méthode TDMA	83
Figure 27. la distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet ,Neumann et Robin (15x30).....	84
Figure 28. la distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet, Neumann et Robin (25x50).....	85
Figure 29. Les isothermes de la température avec condition aux limites Dirichlet par les trois méthodes.....	86

Liste des tableaux

Tableau 1:tableau de condition aux limite premier cas	60
Tableau 2:tableau de condition aux limites deuxièmes cas.....	64
Tableau 3:tableau de condition aux limites troisième cas	68
Tableau 4:tableau de teste de maillage.....	75
Tableau 5.Tableau de comparaison des itérations entres les quatre méthodes	87

NOMENCLATURE**Liste de symbole latine.**

T	Température dimensionnel	[K]
A	Surface de l'objet	[m ²]
C _p	Chaleur spécifique a pression constante	[J.kg ⁻¹ .K ⁻¹]
Q	La quantité de chaleur	[W]
T	Le temps	[s]
K	La conductivité thermique	[W.m ⁻¹ .K ⁻¹]
H	Coefficient de convection	[W.m ⁻² .K ⁻¹]
G	Accélération de la pesanteur	[m/s ²]
U	Tension électrique	[V]
I	Intensité électrique	[A]
R	Résistance électrique	[Ω]
R _t	Résistance thermique	[K.W ⁻¹]
D	Dimension caractéristique de la surface d'échange	[m]
U _n	Vitesse moyenne du fluide	[m.s ⁻¹]
X, Y	Cordonner cartésienne du système	[m]
H	Hauteur de la plaque	[m]

Nomenclature

L	Langur de la plaque	$[m]$
E	Épaisseur de l'objet	$[m]$
C	Vitesse de la lumière dans le vide	$[m.s^{-1}]$
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée Partielle	$[-]$
$\frac{dT}{dx}$	Dérivée totale	$[-]$
\vec{n}	Vecteur unitaire	$[-]$
dS	Surface élémentaire	$[m]$
L	Luminance énergétique globale	$[w . m^{-2}.sr^{-1}]$
L_{λ}	Luminance énergétique monochromatique	$[w .m^{-2}.sr^{-1}.m^{-1}]$
M	Émittance énergétique monochromatique	$[w .m^{-2}.m^{-1}]$
M_{λ}	Émittance énergétique globale	$[w .m^{-2}]$
r_e	Rayon extérieur	$[m]$
r_i	Rayon intérieur	$[m]$
$gradT$	Gradient de température	$[K .m^{-1}]$
div	Divergence	
[A]	Matrice	
{U}	Vecteur inconnu	
{L}	Vecteur	

Liste de symbole grec :

ΔT	Différence de température	[K]
Δx	Dimension d'un volume de control dans la direction horizontale	[m]
Δy	Dimension d'un volume de control dans la direction verticale	[m]
θ	Température adimensionnel	[K]
λ	Langueur d'onde	[m]
T_i	Température intérieure	[K]
T_e	Température extérieure	[K]
ϕ	Flux de chaleur	[W]
φ	densité de Flux de chaleur	[W / m ²]
ρ	Masse volumique	[kg .m ⁻³]
Σ	Contour	[-]
μ	Viscosité dynamique	[kg .m ⁻¹ .s ⁻¹]
ε	Facteur de forma entre la surface i et j	[-]
σ	Constante de STEFAN-BOLTZMAN	[W / m ² K ⁴]
Ω	Angle solide	[sr]

Nombres

adimensionnelles :

Gr	Nombre de GRASHOF
----	-------------------

Nomenclature

R_e Nombre de REYNOLD

Nu Nombre de NUSSELT

Pr Nombre de PRANDTL

Les indices inférieure :

i, j i éme et j éme comparantes

P Point au centre des volumes finis

E Point du voisin à l'est des points p

W Point du voisin à l'ouest des points p

N Point du voisin au nord des points p

S Point du voisin au sud des points p

e Face Est de volume de control considère

w Face Ouest de volume de control considère

n Face Nord de volume de control considère

s Face sud de volume de control considère

Les indices supérieurs

n L'espace temps actuel

$n+1$ L'espace temps suivant

$n-1$ L'espace temps précédent

Abréviations :

EDP Equation aux dérivées partielles

MDF Méthode des différences finis

MVF Méthode des volumes finis

Nomenclature

MEF Méthode des éléments finis

MS Méthode spectral

Introduction générale

L'énergie correspond à un transfert ou échange par interaction d'un système avec son environnement. Ce système subit alors une transformation. On distingue habituellement 2 types d'énergie : i) le travail noté W qui peut prendre diverses formes selon l'origine physique du transfert en jeu (électrique, magnétique, mécanique.....), et ii) la chaleur notée Q .

La thermodynamique classique ne s'intéresse généralement qu'aux états d'équilibre et aux variations entre ces états, grâce à l'utilisation de fonctions d'état, qui sur un plan mathématique sont des différentielles totales exactes. On pourrait d'ailleurs plus logiquement appeler cette discipline la thermostatique.

Le formalisme généralement utilisé nécessite ainsi seulement la connaissance des états initiaux et finaux sans pour autant examiner le processus de transfert d'énergie, ni les modes d'interaction. L'étude complète et générale des mécanismes de transfert d'énergie nécessite d'aborder le formalisme de la thermodynamique hors équilibre.

Le second principe de la thermodynamique spécifie que le transfert de chaleur se fait du corps chaud vers le corps froid, ou de façon équivalente d'une température élevée vers une température plus basse. Le système ne sera donc pas en équilibre thermique durant le transfert. L'approche qu'on va poursuivre est essentiellement phénoménologique, c'est à dire d'origine expérimentale, et macroscopique.

Le phénomène de transfert de chaleur est très important dans les domaines des sciences technologiques, des conceptions techniques et de l'industrie, il existe dans chaque aspect de la vie et a un grand champ d'application. C'est un processus complexe, qui est réalisé sur la base des différents modes fondamentaux à savoir : la conduction, la convection et le rayonnement.

Le mécanisme le plus important de transfert d'énergie est représenté par le mode de convection, qui s'effectue par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu.

C'est un phénomène fréquent dans l'atmosphère terrestre. Il peut être déclenché par un réchauffement du sol par le soleil, par le mouvement d'une masse d'air froid au-dessus d'un plan d'eau relativement chaud, ou par d'autres phénomènes, qui provoquent le réchauffement relatif du bas d'une couche atmosphérique par rapport à son sommet.

Cette étude présente une simulation numérique par la méthode des volumes finis de la conduction thermique dans une demi-couronne, et pour résoudre les problèmes de transfert

thermique, on doit recourir à des méthodes numériques dans le cas où on ne peut pas les résoudre analytiquement. Parmi les méthodes les plus utilisées, on peut citer les différences finies, les éléments finis, les volumes finis...etc.

- L'objectif de cette étude est de montrer l'influence de ces paramètres sur la stabilité du transfert de chaleur.

Nous avons organisé notre mémoire comme suit :

Chapitre I : Recherche bibliographie

Chapitre II : Différents modes de transfert

Chapitre III : les méthodes de discrétisation

Le troisième chapitre s'intéresse à la description de la méthode des volumes finis, ainsi que la discrétisation numérique de l'équation générale de transport, et une présentation du code de calcul –MATLAB.

Chapitre IV : formulation mathématique

Le quatrième chapitre présentera la configuration géométrique étudiée (model physique) ainsi que le modèle mathématique traduisant les équations régissant le phénomène de la conduction.

Chapitre V : Résultats et discussion.

C'est la partie la plus importante de ce mémoire, elle comporte la simulation et l'interprétation des résultats obtenus. Enfin, notre mémoire est clôturé par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

I. Chapitre I : Recherche Bibliographique

1. Introduction :

Après cette préface, nous exposons quelques travaux disponibles dans la littérature qui traitent La conduction dans le transfert de chaleur.

2. Etat de l'Art

Paisrn Naphon et Somchai Wongwises, 2004 [1], ont étudié dans leur travail les performances des échangeurs de chaleur, qui peuvent être améliorées pour effectuer une certaine fonction de transfert de chaleur par des techniques d'amélioration du transfert de chaleur. En général, ces techniques peuvent être divisées en deux groupes: techniques actives et passives. Les techniques actives nécessitent des forces externes, par exemple un champ électrique, une vibration acoustique ou de surface, etc.

Les techniques passives nécessitent des additifs fluides ou des géométries de surface spéciales. Les tubes recourbés ont été utilisés comme l'une des techniques d'amélioration du transfert de chaleur passif et sont les tubes les plus largement utilisés dans plusieurs applications de transfert de chaleur.

Cet article fournit une revue de la littérature sur le transfert de chaleur et les caractéristiques d'écoulement monophasé et diphasique dans les tubes incurvés.

Il ont présenté trois catégories principales de tubes incurvés: les tubes hélicoïdaux, les tubes spiralés et les autres tubes spiralés. Une revue des corrélations pertinentes publiées le coefficients de transfert de chaleur monophasés et le facteurs de frottement diphasés est présentée.

Ali Grine et al. 2007 [2], ont présenté dans cet article des modèles analytiques permettant d'identifier la distribution de température transitoire dans une plaque plane la plaque est exposée à un transfert de chaleur par convection sur une face et à un flux de chaleur sur l'autre. Le flux chauffé est de type Heaviside (type crénelé) et maintenu pendant un temps t_1 .

La phase de chauffage est suivi par une relaxation .la méthode théorique est originale car elle utilise des fonctions de « Green » pour déterminer les solutions analytiques de l'équation de propagation de la chaleur dans la plaque pendant les phases de chauffage et de relaxation ces solutions analytiques permettent d'identifier la distribution de température ainsi que le flux de chaleur de la paroi en fonction du temps.

Les résultats de leurs travaux peuvent être utiles à différents niveaux: lors de l'identification des paramètres (tels que la conductivité thermique ou la diffusivité thermique d'une plaque), lors de l'identification de la condition limite (comme le flux de chauffage ou le coefficient de convection) dans les processus industriels utilisant ce type de systèmes, ou même avec des intentions éducatives pour l'enseignement de la conduction transitoire.

Halil z Alibaba et Mesut b Bzdeniz .2016 [3] ont étudié dans leur article la performance énergétique et le confort thermique d'un immeuble de bureaux à façade simple et double enveloppe, dans un climat chaud, ils ont été étudiés à l'aide du logiciel TAS.

Une façade à double enveloppe est une construction d'enveloppe constituée de deux surfaces transparentes séparées par une cavité a enveloppe supplémentaire peut réduire la demande de refroidissement en été et la demande de chauffage en hiver. On en conclut que dans un bureau à climat chaud, une façade à double enveloppe peut mieux fonctionner qu'une façade à une seule enveloppe.

Dans un climat chaud, une façade à double enveloppe assure le chauffage et le confort thermique en hiver. Dans un climat chaud, cependant, ses avantages estivaux sont limités. Des études supplémentaires sont nécessaires pour augmenter les performances des façades à double enveloppe en été.

XEU Qiong1 et all. 2012 [4] ont présenté dans cet article la diffusion seulement, la conduction de chaleur bidimensionnelle a été décrite sur l'équation différentielle partielle basé sur la méthode des volumes finis, l'équation algébrique discrétisée de l'équation différentiel partielle ont été déduites, différents coefficients et termes sources ont été discutés dans différentes conditions aux limites, qui comprennent le flux de chaleur prescrit, la température prescrite, la convection et l'isolation. L'analyse de la conduction thermique transitoire de plaque infinie avec une épaisseur uniforme et une région rectangle bidimensionnelle ont été réalisées par programmation en utilisant MATLAB. Il est utile pour rendre l'équation de conduction thermique plus compréhensible par sa solution avec l'expression graphique, la faisabilité et la stabilité de la méthode numérique ont été démontrées par les résultats obtenus.

P.R.M.lyra. 2005[5] ont étudié dans ce travail, une formulation volume finit développée pour des modèles bidimensionnels est étendue pour traiter des modèles axisymétriques d'applications de conduction thermique. Cette formulation utilise une méthode de volume fini centrée sur les sommets et a été implémentée en utilisant une structure de données basée sur

les bords. La discrétisation en temps et en domaine utilisant des maillages triangulaires est décrite en détails, y compris le traitement des conditions aux limites, des termes sources et des domaines avec plusieurs matériaux. La formulation proposée est validée et s'avère efficace et flexible grâce à la résolution de problèmes de modèle simples.

Danny R Brubaker DR-IV et Douglas V Nance .2010 [6] ont présenté dans leur article de nombreux programmes informatiques modernes de dynamique des fluides sont développés en utilisant la méthode de discrétisation en volume fini. Il a une excellente capacité numérique pour capturer les changements en quantités conservées telles que masse, quantité de mouvement et énergie.

Dans de nombreux cas, l'énergie thermique est transférée des fluides à une masse solide adjacente. L'accumulation de chaleur dans cette matière solide est un problème d'ingénierie important pour capturer ce transfert d'énergie, il est important d'avoir algorithmes de conduction thermique qui fonctionnent bien avec les codes de dynamique des fluides. Le présent travail aborde ce problème en présentant un algorithme pour résoudre l'équation de la chaleur en nombre fini forme de volume. Bien que cette dérivation soit moulée en deux dimensions, elle peut être facilement généralisée à trois dimensions.

Des exemples de problèmes sont résolus impliquant la conduction thermique dans une section d'une bague annulaire Le long des frontières, nous appliquons Dirichlet et Neumann conditions aux limites. Pour la validation de code, nos solutions numériques, basées sur le schéma d'intégration de temps ADI Douglas-Rachford, sont comparées à des solutions mathématiques exactes.

Mohammed Hasnat, et al. 2015[7] dans cet article ils étudié, une technique numérique de volume fini a été utilisée pour résoudre des équations différentielles partielles transitoires pour transfert de chaleur en deux dimensions avec la condition limite de Dirichlet mixte (constante, non constante) dans un champ rectangulaire. Nous avons expliqué les procédures étape par étape, pour la solution numérique, nous avons utilisé notre code Fortran et un résolveur TDMA ligne par ligne pour les équations algébriques. Enfin, les résultats numériques sont comparés avec solution exacte.

Mr. Robert Edwards et Michael Lobaugh, 2014 [8] ont étudié dans cet article les problèmes de transfert de chaleur multidimensionnel peuvent être abordés de plusieurs façons.

Parfois, une approche analytique utilisant l'équation de Laplace pour décrire le problème peut être utilisé. Cela implique de trouver la solution d'équations différentielles, qui peuvent être

raisonnable pour les étudiants en technologie de génie mécanique (MET). Cependant, ces les étudiants ne sont pas toujours particulièrement compétents dans l'utilisation de cette approche. En outre, l'analyse peut devenir assez complexe en fonction des conditions aux limites, impliquant souvent avancé mathématiques utilisant des fonctions de Bessel, des séries de Fourier et d'autres fonctions spéciales. Graphique méthodes peuvent être utilisées, mais leur utilité s'étend principalement aux discussions sur les relations entre les isothermes et les chemins d'écoulement de la chaleur. Facteurs de forme et autres les approximations peuvent également être utiles dans certains cas. Aucun de ceux-ci ne semble fournir particulièrement bonne approche pour les étudiants MET.

Une approche plus pratique pour ces étudiants est l'utilisation de méthodes numériques. Le fini méthode de différence semble fournir une bonne approche pour les étudiants MET. En utilisant ce méthode un étudiant peut modéliser des problèmes bidimensionnels assez complexes avec une variété de conditions aux limites en utilisant une feuille de calcul simple.

Cet article présenté des informations sur la façon dont cette méthode est utilisée à Penn State Erie, le Behrend collège dans un premier cours en transfert de chaleur pour les étudiants MET. La méthode est utilisée pour aider à présenter la théorie, ainsi que pour un exercice de laboratoire. Les équations de base pour une variété de types de nœuds sont inclus, ainsi que des modifications d'équations qui sont utilisées pour compte de plusieurs charges thermiques et conditions aux limites.

Les conférences sont renforcées avec des problèmes de devoirs avant l'exercice de laboratoire plus impliqué. Enfin, le laboratoire l'exercice est inclus. L'exercice est conçu pour donner aux élèves la pratique en utilisant le méthode.

Rico Morasata Kür'ad Melih Güleren. 2016 [9] ont présenté dans ce projet vise à résoudre un problème deux dimension en régime permanent bidimensionnel par des moyens d'une méthode de fabrication à volume fini (FVM) faite maison. Ce projet résout les deux dimensions équation de conduction de la chaleur en régime permanent sur une plaque dont le fond comprend des ailettes de taille différente afin d'investir la distribution de température dans un domaine rectangulaire non uniforme. La plaque est soumise à des températures constantes sur ses bords. Un code a été développé pour mettre en œuvre FVM et obtenir la distribution de température sur le domaine.

Le code est structuré selon Pour l'analyste CFD principal, il y a les étapes: le prétraitement, la résolution des équations et le traitement des données.

Un ensemble d'équations a été utilisé en utilisant le gradient itératif de gradient conjugué (CGM). De plus, le problème a été analysé dans ANSYS FLUENT et les sorties des deux méthodes sont comparées.

Daniel McGuire. 2011[10] ont étudié dans cet article un outil numérique pour la simulation de la dynamique thermique des réseaux de canalisations avec transfert chaleur a été développé avec la nouvelle capacité de modélisation des fluides supercritiques. L'outil a été développé pour soutenir la conception et le déploiement de deux systèmes thermo hydrauliques des boucles à l'Université Carleton aux fins d'études de transfert de chaleur dans des fluides quasi-critiques. Premièrement, le système a été caractérisé en fonction de ses caractéristiques déterminantes; la longueur caractéristique du trajet d'écoulement est supérieure d'un ordre de grandeur à l'autre les longueurs caractéristiques qui définissent la géométrie du système; le comportement du travail fluide dans l'état thermodynamique supercritique une analyse de la thermique transitoire comportement des domaines du modèle est ensuite effectuée pour déterminer la précision et plage de validité de l'approche de modélisation pour simuler le thermique transitoire comportement d'une boucle thermo-hydraulique.

Dessins préliminaires de trois géométries de section d'essai, à des fins de transfert de chaleur études, sont présentées à l'appui de la conception globale du réacteur supercritique de Carleton boucles thermo-hydrauliques.

Des géométries tubulaires, annulaires et à 7 faisceaux sont développées avec le soutien du nouvel outil numérique. Matériaux capables de répondre aux les besoins expérimentaux en fonctionnement dans l'eau supercritique sont déterminés. Le les géométries nécessaires pour satisfaire les objectifs expérimentaux sont ensuite développés en fonction de la caractéristiques du matériau et comportement de transfert de chaleur prévu à partir de la simulation précédente résultats Une analyse de sûreté initiale est effectuée sur les conceptions des sections d'essai, où sont évalués par rapport au code de la chaudière, du réservoir sous pression et du tuyau sous pression ASME standard, requis pour un fonctionnement et une certification sécurisés.

Akbar A. Javadi et Mohammed S. Hussain.2016 [11] Cette étude décrit la performance générale de deux modèles de simulation-optimisation (S / O) développés pour examiner les capacités du nouveau scénario de gestion proposé pour contrôler l'intrusion d'eau de mer aquifères côtiers.

Dans le premier modèle (S / O), un modèle de simulation par éléments finis (FE) est directement lié à un modèle génétique multi-objectif. Dans le second modèle, un modèle de substitution qualifié est lié à la même optimisation maquette. L'extraction simultanée d'eau salée près de la côte et la recharge artificielle des eaux usées traitées dans l'aquifère sont les principaux principes utilisés dans le scénario de gestion proposé la recharge est implémentée en utilisant un étang de surface et donc la théorie du flux insaturé est utilisé dans la simulation.

Les fonctions objectives inclure la minimisation du coût économique total du scénario de gestion ainsi que la minimisation de quantité totale de sel dans l'aquifère.

Les résultats montrent que la mise en œuvre du modèle de substitution dans le(S / O)Le cadre résulte en une réduction significative du temps CPU.

Ricardo Vasquez Padilla.2011 [12] dans ce projet ont étudié la performance des centrales solaires à auge parabolique au cours des 25 dernières années a prouvé que cette technologie est une excellente alternative pour l'industrie de l'énergie commerciale.

Par rapport aux centrales électriques conventionnelles, les centrales solaires à auge parabolique produisent des niveaux significativement plus bas de dioxyde de carbone, bien que des recherches supplémentaires soient nécessaires pour apporter le coût des centrales solaires à concentrateur à un niveau compétitif.

La réduction des coûts est axée sur trois domaines: amélioration de l'efficacité thermodynamique par la recherche et le développement, mise à l'échelle de la taille de l'unité, et la production de masse de l'équipement.

La conception optimale, la simulation de performance et l'analyse des coûts des centrales solaires à auge parabolique sont essentielles pour mise en œuvre réussie de cette technologie.

Une simulation détaillée de centrale solaire et l'analyse de ses composants est nécessaire pour la conception de systèmes solaires à auge parabolique qui est le sujet de cette recherche. L'analyse préliminaire a été réalisée par des modèles complexes des composants du champ solaire.

Ces composants ont en suite été intégrés dans le système dont les performances sont simulées émuler les conditions d'exploitation réelles. L'analyse de sensibilité a été menée pour obtenir le maximum conditions et coût minimum actualisé de l'électricité (LCOE).

Une méthodologie simplifiée a ensuite été développée sur la base des corrélations obtenues à partir des simulations détaillées des composants.

Une simulation numérique complète d'une centrale solaire à auge parabolique a été développée, en se concentrant principalement sur l'obtention d'une conception optimale préliminaire à travers la méthodologie simplifiée développée dans cette recherche.

La méthodologie proposée est utilisée pour obtenir des paramètres et des conditions optimales tels que: la taille du champ solaire, les conditions de fonctionnement, pertes parasites, investissement initial et LCOE .La méthodologie est également utilisée pour évaluer différents scénarios et conditions d'exploitation. La nouvelle méthodologie a été mise en place pour une énergie solaire parabolique de 50 MWe usine pour deux villes: Tampa et Daggett Les résultats obtenus pour la méthodologie proposée ont été comparés à un autre modèle physique (System Advisor Model, SAM) et à un bon modèle. L'accord a été atteint, montrant ainsi que cette méthodologie est adaptée à n'importe quel endroit.

Alain Fourmigue.2014 [13] L'utilisation de ces noms exonérés pertinents et les problèmes de dissipation de chaleur par simulation thermique montrent un degré élevé de puissance de circuit intégré et la conductivité conduit à des performances de circuit excessives et à la réduction de leurs pertes. La technologie tridimensionnelle a été proposée pour calculer la thermodynamique sur la base de cette thèse, qui a proposé deux méthodes de simulation thermique des circuits intégrés.la deuxième Méthode Le comportement thermique est vérifié en comparant les résultats obtenus.

Abdelkader LABBI et Ammar MOKHNACHE.2015[14] ont présenté dans ce projet les champs solaires et climatiques qui sont directement affectés par les aérosols dans l'atmosphère: selon des études antérieures, les aérosols ont un effet sur la perméabilité atmosphérique dans le champ infrarouge, notamment dans l'air du désert, la deuxième génération de Météosat (MSG-1) a obtenu des résultats préliminaires sur les aérosols dans la région désertique en utilisant la méthode des différences de température.

Thomas Blomberg .1996 [15]ont étudié dans ce travail des programmes informatiques pour la conduction thermique, transitoire et en régime permanent. Dans deux et trois diamètres ont été développés Les programmes font partie d'une bibliothèque, développée par Lund Groupe de physique numérique du bâtiment, traitant de la physique du bâtiment et du sol chaleur Les programmes PC HEAT2 et HEAT3 peuvent être utilisés pour des analyses de les effets des ponts thermiques, le transfert de chaleur à travers les coins d'une fenêtre, la perte de chaleur

d'une maison par le plancher, pour ne citer que quelques applications ces programmes sont maintenant utilisés par les chercheurs et des ingénieurs-conseils dans plus de vingt pays HEAT2R (Blomberg, 1994c) est un programme nouvellement développé pour la conduction de chaleur transitoire et en régime permanent dans cylindrique coordonne r et z. La méthode robuste définit différences explicite est utilisée. Cette méthode suit de près les équations physiques Les équations mathématiques pour la chaleur en deux et trois dimensions la conduction et la formulation numérique sont présentés L'erreur numérique pour les mailles de différent est étudiée et comparée avec des solutions analytiques .L'efficacité de méthode de relaxation excessive successive est démontrée, tandis que le gain la subdivision "est modeste Les résultats de calculs avec deux ou trois maillages différents peuvent être utilisé pour estimer des résultats plus précis. Le gain en utilisant cette technique peut être assez substantiel. Avec notre technique numérique et nos programmes informatiques, il est assez facile de résoudre gamme de problèmes de conduction thermique Un problème d'utilisation de 15 000 nœuds de calcul peut nécessite quelques minutes de temps CPU sur un PC moderne. Le cas concret des poutres en acier l'isolation thermique, utilisant un million de cellules de calcul, a été résolue en environ ¼ heures sur un Pentium (90 MHz) Les programmes ont été utilisés pour résoudre de nombreux problèmes thermiques. Un certain nombre d'exemples sont signalés afin de fournir à l'utilisateur de l'aide et des lignes directrices concernant le choix maille numérique, précision, etc. un exemple concerne certains panneaux à faible conductivité placé en mousse. Ce problème avec sa géométrie complexe est résolu sans difficulté avec le programme tridimensionnel HEAT3 Un autre exemple concerne le pont thermique d'un mur avec des poutres d'acier en laine minérale. La conductivité thermique de l'acier est à propos de 1700 fois plus élevé que celui de la laine minérale, ce qui peut poser des problèmes de précision numérique L'utilisation d'un million de cellules de calcul a permis d'établir un erreur numérique inférieure à 0,1%.

Le problème du rayonnement thermique dans une cavité couplée à la conduction thermique et à la ventilation est analysé en détail. Les équations présentées conviennent bien à une itération procédure de solution informatique, qui s'avère robuste et très rapide .

Clarissa Belloni Balliol College.2013[16] cette étude présente une étude numérique des turbines marémotrices canalisées, employant des simulations de Navier-Stokes en trois dimensions de Reynolds. Bidirectionnel canalisé les turbines sont modélisées avec et sans ouverture, appelées respectivement turbines à canal et à centre ouvert. Le travail consiste en deux enquêtes. Dans un premier temps, les rotors des turbines sont représentés par des disques

d'actionnement, une simplification qui capte les changements de moment cinétique et donc l'interaction primaire de la turbine avec le flux à travers et autour du conduit, tout en réduisant considérablement la complexité de calcul. Dans la deuxième enquête, les rotors de turbine sont représentés par un mouvement d'élément de pale intégré au CFD modèle, employant des données de rotor réalistes, capturant le tourbillon et la traînée de lame en plus de l'extraction de l'élan linéaire. Les deux techniques de modélisation ont été utilisées pour étudier les performances de nu, conduits, et les turbines à centre ouvert, les reliant à la Les champs ont été exposés.

Pour axial flux, baisse importante de la puissance générée par les turbines à canal ouvert et à centre ouvert ont été trouvés, par rapport à une turbine nue de diamètre total du dispositif égal turbines, une augmentation de la taille d'ouverture conduit à une réduction supplémentaire de la puissance générée. Il a été démontré que le blocage accru a une incidence positive sur les performances de tous les appareils deux autres mesures de performance ont été utilisées: la densité de puissance, la normalisation de puissance par la zone du rotor, et l'efficacité du bassin, reliant la puissance générée à la puissance globale retirée de la flux des augmentations modérées de la densité de puissance peuvent être réalisés pour les dispositifs canalisés et à centre ouvert, alors que leurs écarts de bassin sont de valeur similaire à celle de la turbine nue. Pour lacet dans Maintenant, la performance de la turbine nue diminue, alors que celle de la turbines canalisées et à centre ouvert augmente. Cela est dû à une augmentation vitesse

Suivant flux accélération autour de la lèvre d'entrée du conduit et aussi une augmentation de blocage écart car les conduits présentent une plus grande surface frontale projetée lorsqu'ils sont approchés non axialement.

BOULAADJOUL YOUNES.2011 [17], a étudié la mise en œuvre de techniques inverses pour estimer certaines propriétés physiques telles que la masse volumétrique et thermique. Il a été utilisé dans le désastre de Levenberg pour estimer les paramètres avec des caractéristiques connues et permet grâce à cette simulation de calculer la température, un programme a été créé à travers qui permet de calculer la fonction de flux thermique imposée d'un côté de la plaque.

Les résultats ont été obtenus grâce à des expériences sur des échantillons tels que le fer-cuivre Aramco.

BERGOUG NASSIMA. 2013[18] à étudié dans cette mémoire les volumes finis 2D dans le format des équations cylindriques en utilisant les équations suivantes : Equations de la chaleur

et de la Navier Stokes et de Maxwells et les résultats ont été obtenus, ils ont été placés sous les calculs de MATLAB et ANSYS-Fluent, ils ont pu étudier l'optimisation optimale de la pompe à induction en utilisant la méthode randomisée

Mr HAMDANI Maamar .2011 [19]Il a étudié de ce projet l'effet de l'isolation thermique interne et l'orientation de l'espace urbain sur la température et a adapté une modélisation numérique par MATLAB qui a comparé ses résultats avec les résultats expérimentaux Pour les maisons

YVON LAVOIE .1993 [20]L'objectif de l'étude réalisée par l'impact des quatre paramètres sur l'échange de chaleur dans l'homogénéité du four et ont été réalisées à travers le modèle numérique d'alliage en trois dimensions aluminium. et le modèle détermine la quantité d'interventions thermiques provoquées par la grosseur forcée de rayonnement et fait une étude sans limiter l'influence des paramètres pour l'échange de chaleur entre les alliages et le taux global de gaz confirment les résultats de l'étude que le rayonnement est responsable d'environ 24 interventions de la chaleur totale et a réussi à obtenir au détriment d'une bonne évaluation du facteur de proportionnalité. entre les résultats numériques et des prédictions empiriques intéressantes, car ils permettent une simulation longue. Le modèle numérique développé au cours de cette recherche est capable de simuler l'échange de thermiques dans le four d'homogénéisation

Mr MENNI YOUNES.2012 [21]Il a réalisé une étude digitale bidimensionnelle de l'air allongé à l'intérieur d'un tube rectangulaire contenant des panneaux tampons et des ailes transversales où les surfaces inférieure et supérieure sont soumises à une température, comparant deux formes différentes d'ailes transversales, un trapèze et un triangle. À l'aide de l'intégralité et d'une approche algorithmique des algorithmes à échelle finie, des équations basées sur des modèles ont été résolues pour décrire la turbulence. Les courbes des champs de vitesse et de vitesse axiale ont été représentées dans toute la géométrie du tube Les coefficients de frottement ont été déterminés en changeant les résultats dans différentes sections telles que les secteurs amont et amont,

TRABELSI AMEL .2011[22] Pour étudier le phénomène de la grosseur ou du transport naturel dans un espace rectangulaire, il fait une étude arithmétique: les parois supérieure et inférieure du mur sont isolées thermiquement et la partie active du côté gauche se trouve à une température plus élevée que le côté droit. Cette étude a été influencée par les facteurs de

propagation de la chaleur entre les côtés de l'écart présentés dans cette étude, la dynamique et les champs thermiques

HAMADA KARIMA.20 [23]Une liste finie des ailerons avec l'imposition du fluide newtonien dans un écoulement laminaire et stable Le phénomène d'échange thermique a été étudié en utilisant la méthode des volumes finis Les équations du transfert thermique ont été résolues. En changeant l'épaisseur de l'ailette, le nombre de Reynolds et la diffusion thermique, la matière a été résolue et a conclu que l'échange de chaleur est bon, plus la valeur des Reynolds et de l'épaisseur de l'ailette est grande.

3. Objectif de ce Travail

L'objectif principal pour suivi dans ce travail de mémoire est :

L'objectif principal de notre mémoire est l'étude et la discrétisation de l'équation de la chaleur en 2D dans un demi-annulaire, en utilisant la méthode des volumes finis pour la résolution avec un maillage structuré avec différents conditions aux limites, en utilisant le langage MATLAB comme outil de programmation.

4. Conclusion :

la recherche bibliographique exposée dans cette première partie montre l'intérêt scientifique qu'a suscité la pratique de l'utilisation des problèmes inverses de la conduction de la chaleur dans l'estimation des flux de chaleur, les propriétés thermo-physiques, les conditions frontières et les formes géométriques dans les problèmes de la conduction de la chaleur soit sous forme de paramètres ou bien sous forme de fonctions temporelles ou spatiales.

II. Chapitre II : Différents mode de transfert

1. Introduction :

Le phénomène de transfert de chaleur est très important dans les domaines des sciences technologiques, des conceptions techniques et de l'industrie, il existe dans chaque aspect de la vie et a un grand champ d'application.

On va s'intéresser ici au différentes phénomènes qui conduisent à des transferts des chaleurs , et leur traduction en densité de flux de chaleur ϕ . C'est un processus complexe, qui est réalisé sur la base des différents modes fondamentaux à savoir : la conduction, la convection et le rayonnement.

2. Modes de transfert de la chaleur :

2.1) Transfert de chaleur par conduction :

Ce mode de transfert de chaleur se retrouve dans tous les composants "solides" d'une transmission, c'est le plus simple et s'applique à un milieu immobile. Il correspond au transfert de chaleur dans un solide d'un point chaud vers un point froid.[24] la conduction ne peut exister que s'il existe des écarts de températures c'est à dire si le gradient de température n'est pas nul. Dans le cas contraire le milieu est en équilibre thermique et aucun transfert de chaleur ne peut se produire. Pour que ce gradient de température existe, il faut une action externe au système pour pouvoir maintenir des conditions de températures données aux limites du système. [25]

La conduction thermique s'est largement produite dans toutes sortes de moulage et de traitement de matériaux.

Lingot coulage de silicium multi-cristallin pourrait être vu comme conduction de chaleur transitoire de la plaque infinie avec épaisseur uniforme, et la solidification directionnelle de la partie métallique avec la géométrie symétrique pourrait être simulé par un modèle numérique 2D de conduction thermique. Afin de maîtriser les techniques optimales paramètres pendant le transport de chaleur dépendant du temps, la clé est d'obtenir une solution correcte de la chaleur équation de conduction. La méthode numérique typique comprend la méthode des éléments finis (FEM), méthode de la différence finie (FDM) et Méthode du volume fini (MVF) en raison des difficultés de résolution de la chaleur équation de conduction par méthode analytique traditionnelle [26]

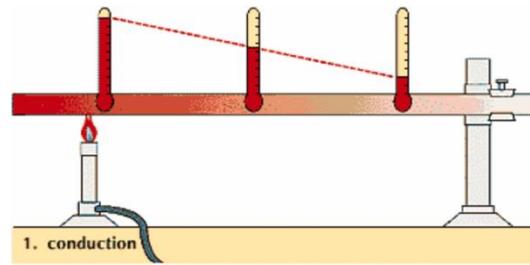


Figure 1. Schéma de transfert de chaleur par conduction

a). Loi de Fourier :

La relation de Fourier est phénoménologique, c'est-à-dire issue de résultats expérimentaux. En effet, le lien entre les phénomènes microscopiques et macroscopiques, que nous avons vu précédemment, n'a pu être modélisé que grâce aux outils de la mécanique statistique et quantique. Or, si ces outils n'existaient pas encore à l'époque de Fourier, il est bien évident que le phénomène de diffusion à l'échelle macroscopique était observable et que comme il était alors possible de mesurer une température, rien n'empêchait de proposer une relation issue de ces mesures. Pour bien comprendre la signification de cette relation, reportons-nous à la figure 2. Sur cette figure est représenté un matériau homogène et isotrope sous la forme d'un tube supposé parfaitement isolé à sa périphérie. On note S la section du tube et L sa longueur. Les températures aux deux extrémités du tube, notées T_1 et T_2

, sont imposées et constantes au cours du temps. Un flux de chaleur apparaît dans la direction des hautes températures vers les basses températures. Les lignes de flux sont définies comme les lignes perpendiculaires aux isothermes dans le tube. On note \vec{x} le vecteur tangent aux lignes de flux. Comme le tube est parfaitement isolé sur sa périphérie, aucune ligne de flux ne sort du tube et donc le flux est constant tout le long du tube [27]. J. Fourier obtient expérimentalement que lorsque les températures sont stabilisées dans le temps (régime Stationnaire), il existe une relation linéaire entre le flux et l'écart de température entre l'entrée et la sortie sous la forme :

$$\vec{\phi} = \lambda_s \frac{T_1 - T_2}{L} \cdot \vec{x} \quad (\text{II.1})$$

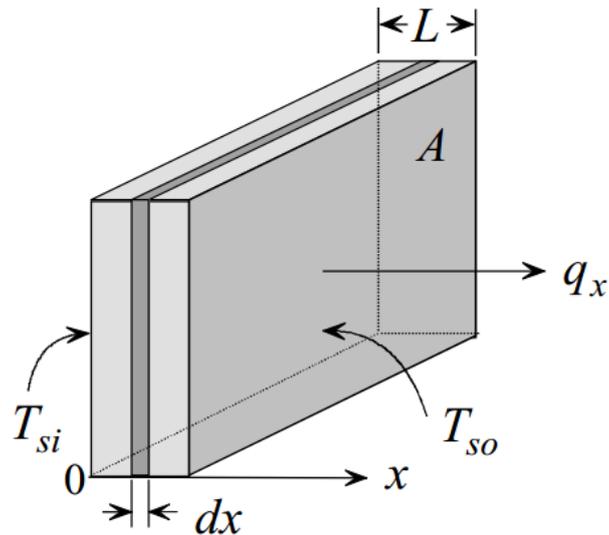


Figure 2. schéma de loi de FOURIER

b). Equation fondamentale de transfert chaleur par conduction

(i). *Bilan énergétique :*

On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume fini v contenu dans V et limité par une surface s .

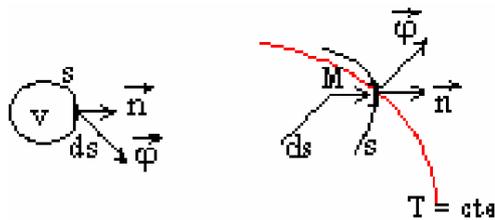


Figure 3. Schéma de Bilan énergétique

L'énergie chaleur qui traverse l'élément de surface ds pendant l'intervalle de temps dt est donnée par la loi de Fourier :

$$\partial\phi = -\lambda \cdot \text{grad}(T) \cdot ds \cdot dt \quad (\text{II.2})$$

Ou

$$\partial\phi = \vec{\phi} \cdot \vec{n} \cdot ds \cdot dt \quad (\text{II.3})$$

(ii). *Cas particulier : milieu homogène et isotrope*

- On appelle milieu homogène un milieu constitué par un seul matériau

- On appelle milieu isotrope un milieu dont les caractéristiques physiques (ρ , c , λ) ne dépendent pas des variables d'espace.

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (\text{II.4})$$

$$\rightarrow \text{div} \vec{\varphi} = \text{div} \left[-\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right] \quad (\text{II.5})$$

$$\rightarrow \text{div} \left[-\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right] + \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - P = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$\rightarrow \Delta T + \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

Avec : $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \rightarrow$ diffusivité thermique

Cas particuliers :

- Milieu avec source interne et en régime permanent 'équation de poisson' :

$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = 0 \quad (\text{II.8})$$

- Milieu sans source interne et en régime permanent 'équation de Laplace' :

$$\Delta T = 0 \quad (\text{II.9})$$

- Milieu sans source interne et en régime variable 'équation de fourrier' :

$$\Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.10})$$

(iii). *Equation de Fourier* :

En Système de coordonnées :

Cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.11})$$

Cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

Sphériques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.13})$$

2.2) Transfer de chaleur par convection :

Lorsque le transfert de chaleur s'accompagne d'un transfert de masse, il est appelé transfert par convection.

C'est un transfert qui résulte d'un mouvement d'ensemble du matériau le supportant. La convection a donc lieu dans les fluides (gaz ou liquides). Elle est souvent caractéristique de l'échange à la frontière entre un solide et un fluide et est donc très liée à l'écoulement fluide mais aussi aux géométries d'échange et aux états de surface si un solide intervient. Il convient de distinguer la convection forcée dans laquelle le fluide est mis en mouvement par un apport d'énergie mécanique extérieur (pompe, Ventilateur, ...) de la convection naturelle dans laquelle le fluide prend, en son sein, l'énergie nécessaire au mouvement (variation de masse volumique associée à une variation de température par exemple). De façon macroscopique elle est décrite par la loi de Newton (1701). [28].

L'étude du transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi.

Selon le mécanisme qui génère le mouvement du fluide, on distingue : la convection naturelle et la convection forcée.

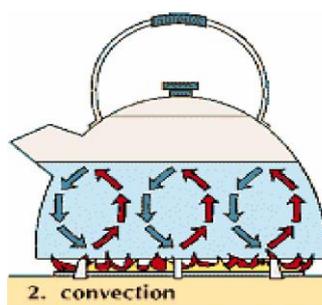


Figure 4. Schéma de transfert de chaleur par convection

a). La convection naturelle ou libre:

L'équilibre mécanique impose que les parties les plus denses soient situées en dessous des moins denses. Les mouvements dans le fluide seront alors favorisés : c'est le phénomène de convection naturelle.

(i). *Les applications de la convection naturelle sont nombreuses :*

- Chauffage d'une maison (cas d'un radiateur)
- Formation de courants océaniques,
- Formation des vents dans l'atmosphère

b). La convection forcée :

Le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (pompe, ventilateur...). Compte tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire de considérer la nature du régime d'écoulement.

On distingue :

- Ecoulement en régime turbulent
- Ecoulement en régime laminaire.

Quelque soit le type de convection (libre ou forcée) et quelque soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent), le flux de chaleur transmis est donné par la relation dite loi de Newton :

$$\frac{\delta Q}{dt} = h.(T_p - T_\infty).ds \quad (\text{II.14})$$

Avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer **h** (Coefficient d'échange) qui dépend de nombreux paramètres :

- caractéristiques du fluide,
- nature de l'écoulement,
- la température,
- la forme de la surface d'échange

Pour déterminer l'expression du coefficient de convection **hc** on a utilisé La méthode de l'analyse dimensionnelle et la résolution des équations aux dimensions fait apparaître des nombres sans dimension très utiles dans l'étude de la mécanique des fluides et en particulier dans les phénomènes convectifs.

Ces nombres sont en particulier :

(i). **Le nombre de Reynolds**

Le régime d'écoulement d'un fluide peut être laminaire ou turbulent. Le passage d'un régime à un autre est caractérisé par le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{v.d}{\nu} \quad (\text{II.15})$$

L'expérience montre que pour R_e inférieur à une valeur critique R_{ec} , l'écoulement dans une conduite est toujours laminaire. On peut admettre la valeur 2200 pour R_{ec} .

(ii). **Le nombre de Nusselt :**

Il caractérise l'importance de la convection par rapport à la conduction :

C'est le rapport de la quantité de chaleur échangée par convection $h.s.\Delta T$ à une quantité de chaleur échangée par conduction $\lambda s \frac{\Delta T}{d}$:

$$N_u = \frac{h.s.\Delta T}{\lambda.s.\frac{\Delta T}{d}} \Rightarrow N_u = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{II.16})$$

(iii). **Le nombre d'Eckert:**

Caractérise la dissipation d'énergie par frottement au sein du fluide (dégradation de l'énergie mécanique en chaleur). $\frac{v^2}{C_p \Delta T}$

(iv). **Le nombre de Grashof :**

Caractérise la force de viscosité du fluide.

$$Gr = \frac{g \beta p \Delta T d^3}{\nu^2} \quad (\text{II.17})$$

(v). **Le nombre de Prandtl:**

Caractérise la distribution des vitesses par rapport à la distribution de la température.

$$P_r = \frac{u c_p}{\lambda} \quad (\text{II.18})$$

Exemple de calcul :

De l'air à $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ circule sur une surface plane de 75 cm de long et 30 cm de large à la température $71\text{ }^{\circ}\text{C}$, avec une vitesse moyenne de $26,8\text{ m/s}$.

Calculer la puissance - chaleur échangée entre l'air et la surface.



Données :

Température de l'air : $T_{air} = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$

Masse volumique de l'air : $\rho = 1.136\text{ kg / m}^3$

Chaleur spécifique isobare de l'air : $C_p = 1\text{ j.g}^{-1}.k^{-1}$

Viscosité dynamique de l'air : $\mu = 1.91.10^{-5}\text{ kg.m}^{-1}.s^{-1}$

Conductivité de l'air : $\lambda = 0.027\text{ w.m}^{-1}.k^{-1}$

Calcul du nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{v.L}{\nu} = \frac{v.L.\rho}{\mu} = \frac{26,8.0,75.1,136}{1,91.10^{-5}} = 1,2.10^6$$

$R_e > 3.10^5 \rightarrow$ le régime d'écoulement est turbulent

$v = 26,8\text{ m / s} = 96,5\text{ km / h} \rightarrow$ La convection est forcée \rightarrow Nombre de Nusselt

$$N_u = 0,0036 p_r^{\frac{1}{3}} R_e^{\frac{4}{5}}$$

Nombre de Prandtl:

$$P_r = \frac{\mu.C_p}{\lambda} = \frac{1,91.10^{-5}.10^3}{0,027} = 0,711$$

$$\rightarrow N_u = 0,036.(0,711)^{\frac{1}{3}}.(1,2.10^6)^{\frac{4}{5}} = 2346$$

$$\rightarrow h_c = \frac{\lambda \cdot N_u}{L} = \frac{0,027 \cdot 2346}{0,75} = 84,5 \text{ w.m}^{-2}\text{k}^{-1}$$

$$\phi = h_c \cdot (T_s - T_{air}) \cdot S = 255 \text{ w}$$

2.3) Transfer de chaleur par rayonnement :

Le rayonnement est un phénomène se caractérisant par un échange d'énergie électromagnétique, Cette émission d'énergie s'effectue au détriment de l'énergie interne du corps émetteur. il est un processus physique de transmission de la chaleur sans support matériel. Ainsi, entre deux corps, l'un chaud, l'autre froid, mis en vis-à-vis (même séparés par du vide). [29]

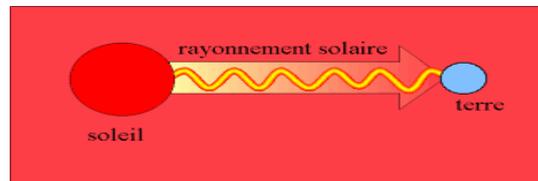


Figure 5.Schéma de transfert de chaleur par rayonnement

On a plusieurs natures du rayonnement :

- a). **Rayonnement électromagnétique** : est constitué de radiations monochromatiques caractérisées par une longueur d'onde λ ou fréquence ν tel que :

$$C = \lambda \cdot \nu \quad (\text{II.19})$$

b). Rayonnement thermique :

Correspond à l'émission due à une augmentation de température d'un corps composé de radiations de longueurs d'ondes $0,1 \mu\text{ m} \leq \lambda \leq 100 \mu\text{ m}$

Le spectre solaire, en dehors de la couche atmosphérique, se répartit sur une bande allant de $0,2$ à $25 \mu\text{ m}$, avec des radiations supplémentaires :

- l'UV extrême de longueur d'onde $\lambda = 0,1216 \mu\text{ m}$
- les rayons X de longueur d'onde $0,005 \text{ nm} \leq \lambda \leq 1 \text{ nm}$
- les rayons radioélectriques de longueur d'onde $10 \leq \lambda \leq 100 \text{ cm}$

c). Rayonnement solaire :

Le rayonnement solaire recouvre une gamme assez large de longueurs d'onde, depuis les ondes radio (grande longueur d'onde) jusqu'aux rayons X (petite longueur d'onde). Il présente un maximum vers 410 nm.

L'œil humain n'est cependant sensible qu'à une petite partie du spectre solaire : le rayonnement visible est compris entre 400 et 800 nm (du violet au rouge).

d). Grandeurs énergétiques liées au rayonnement :**(i). Flux énergétique Φ :**

Le flux énergétique de rayonnement, c'est la puissance émise par une source, transportée par un faisceau ou reçue par une surface sous forme de rayonnement, et on l'exprime en Watts :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{II.20})$$

(ii). Intensité énergétique : I

L'intensité I d'un faisceau ou d'une source dans une direction donnée est le quotient d'une portion $d\phi$ du flux émis par la source dans une direction considérée, dans un cône infiniment petit, axé sur cette direction, par l'angle solide élémentaire $d\Omega$ déterminé par ce cône (w.sr^{-1})

$$I = \frac{d\phi}{d\Omega} \quad (\text{II.21})$$

(iii). Émittance énergétique : M

L'émittance énergétique M d'une source, en un point d'une surface émissive, est le quotient du flux $d\phi$ à partir d'un élément infiniment petit entourant le point, par l'aire dS de cet élément (w.m^{-2}) :

$$\mu M = \frac{d\phi}{ds} \quad (\text{II.22})$$

(iv). Luminance énergétique : L

La luminance du point O situé dans un élément dS d'une source, dans une direction faisant un angle θ avec la normale à dS est égale au quotient de l'intensité dI en ce point par l'aire de la projection de dS perpendiculairement à cette direction ($\text{w.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$) :

$$L = \frac{dI}{ds \cdot \cos(\theta)} = \frac{\theta \cdot d^2}{ds \cdot d\Omega \cdot \cos(\theta)} \quad (\text{II.23})$$

(v). **Eclairement énergétique : E (ou Irradiance)**

L'éclairement énergétique E en un point d'une surface réceptrice est le quotient du flux reçu par un élément infiniment petit entourant le point, par l'aire de cet élément

$$E = \frac{d\phi}{ds} \quad (\text{II.24})$$

(vi). **Corps noir :**

C'est un corps qui absorbe tout le rayonnement incident :

$$\alpha_\lambda = 1 \quad (\text{II.25})$$

Sans en réfléchir ni transmettre aucune fraction :

$$\rho_\lambda = 0 \quad ; \quad \eta_\lambda = 0 \quad (\text{II.26})$$

Quelque soient les longueurs d'onde et les directions de propagation

A une température donnée, un corps noir rayonne le maximum d'énergie pour chaque longueur d'onde.

(vii). **Loi de PLANCK**

Cette loi relie l'émittance monochromatique M_λ^0 du corps noir à la longueur d'onde λ , et à sa température absolue T.

Elle s'exprime sous la forme ($w.m^{-3}$) :

$$M_\lambda^0 = \frac{2\pi h C^2 \lambda^{-5}}{hC \cdot (e^{hc/\lambda T} - 1)} \quad (\text{II.27})$$

(viii). **Loi de Planck appliquée au rayonnement dans le vide ou dans l'air**

Lorsque le rayonnement se propage dans le vide (indice de réfraction $n = 1$)

$$M_\lambda^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad (\text{II.28})$$

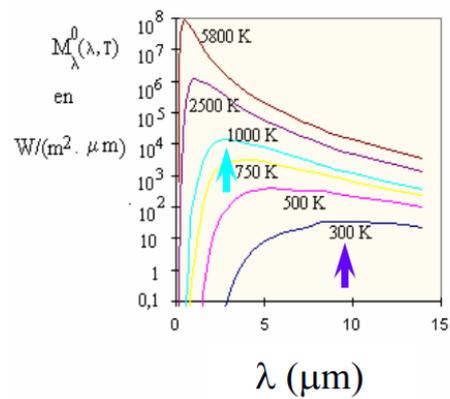
(ix). *Lois de WIEN :*

Deux lois fournissent respectivement l'abscisse λ_m et l'ordonnée du maximum d'émittance monochromatique du corps noir à chaque température

a). **1ère loi de WIEN :**

La « loi du déplacement » de WIEN :

$$\lambda_m \cdot T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad (\text{II.29})$$

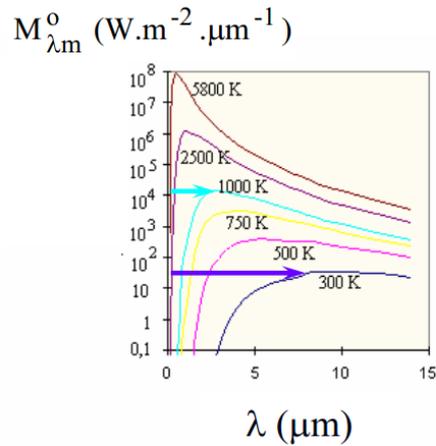


b). 2^{ème} loi de WIEN :

La 2^{ème} loi de WIEN fournit la valeur du maximum $M_{\lambda_m}^0$ en fonction de la température T :

$$M_{\lambda_m}^0 = B.T^5 \quad (\text{II.30})$$

$$B = 1,287.10^{-11} \text{ (w / m}^2 \cdot \mu\text{m} \cdot \text{K}^5)$$



(x). Loi de STEFAN – BOLTZMANN :

Émittance totale du rayonnement du corps noir en fonction de sa température absolue :

$$M^0 = \sigma . T^4 \quad (\text{II.31})$$

3. Conclusion :

L'étude des transferts thermiques, de distinguer trois grandes parties se rattachant chacune à un mode de transfert particulier de la chaleur. La conduction, la convection et le rayonnement. Chacun de ces modes étant lui même lié à un processus physique bien déterminé.

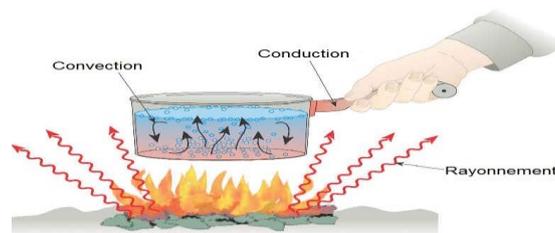


Figure 6. Schéma de transfert de chaleur par les trois modes

III. Chapitre III : les méthodes de discrétisation

1. Introduction :

En général, les méthodes numériques donnent une solution approximative avec une précision suffisante pour les problèmes rencontrés en pratique dans les domaines de transferts thermiques, de mécanique des fluides, d'électromagnétisme, . . etc . Parmi ces méthodes, on distingue d'une manière générale:

- Méthode des différences finies (MDF).
- Méthode des éléments finis(MEF).
- Méthode des volumes finis (MVF).
- Méthode de spectrales (MS).

Il existe d'autres méthodes spécifiques à chaque domaine (méthode des lignes, méthode de Monté Carlo, . . etc.).

2. les méthodes de discrétisation :

2.1) Méthode des différences finies (MDF) :

a). Définition :

Les méthodes des différences finies sont parmi les méthodes numériques les plus utilisées dans la résolution des équation différentielles aux dérivées partielles de transfert de chaleur et de matière , avec les méthodes des élément finis et les méthodes des volumes finis .Les méthodes des différences finies sont simples et faciles a formuler et peuvent être aisément généralisées aux problèmes a deux et trois dimensions .

b). Principe

L'objectif de la méthode des différences finies (MDF) est de transformer une équation continue valable sur un domaine continu en un système a N équations a N inconnues associées a un domaine discret appelé maillage .(fig7)

L'approximation des dérivées d'une fonction $f(x)$ par différences finies est basée sur le développement en séries de Taylor.[30]

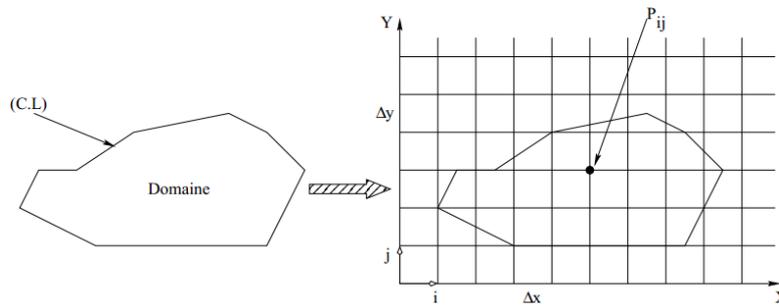


Figure 7. Passage du domaine continu au domaine discret

c). Approximation des dérivés par différences finies par le développement en séries de Taylor :

On considère le développement en séries de Taylor de la fonction $f(x+h)$ et $f(x-h)$ au point x .

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) \quad (\text{III.1})$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) \quad (\text{III.2})$$

Où les primes dénotent les dérivées par rapport x . La dérivée première et la dérivée seconde peuvent être représentées de manière différente, sous la forme de différences finies, en utilisant le développement en séries de Taylor donné par les équations.

(i). Approximation de la dérivée première :

Les dérivées premières progressives (en avant), régressives (en arrière) et centrale de la fonction $f(x)$ sont obtenues à travers les équations (III.1) et (III.2) respectivement :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) \quad (\text{III.3})$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x) \quad (\text{III.4})$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) \quad (\text{III.5})$$

(ii). *Approximation de la dérivée seconde :*

Pour représenter la dérivée seconde $f''(x)$ au point x de la $f(x)$ par différence finies, on considère le développement en séries de Taylor de $f(x-2h)$ et $f(x+2h)$ suivant :

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{3}{4}h^3 f'''(x) + \dots \quad (\text{III.6})$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) - 2h^3 f'''(x) + \dots \quad (\text{III.7})$$

L'élimination de la dérivée $f'(x)$ entre l'équation (III.1) et (III.6) nous donne :

$$f''(x) = \frac{f(x-2h) + f(x) - 2f(x+h)}{h^2} - hf'''(x) \dots \quad (\text{III.8})$$

Par l'élimination de $f'(x)$ entre l'équation (III.2) et (III.7) on trouve :

$$f''(x) = \frac{f(x-2h) + f(x) - 2f(x-h)}{h^2} - hf'''(x) \dots \quad (\text{III.9})$$

Par l'élimination de $f'(x)$ entre l'équation (III.1) et (III.7) on trouve :

$$f''(x) = \frac{f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 f''''(x) \dots \quad (\text{III.10})$$

Les résultats obtenus :

En avant :

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i+1} - f_{i+2}}{h^2} + O(h) \quad (\text{III.11})$$

En arrière :

$$f''_i = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h) \quad (\text{III.12})$$

Centrée :

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + O(h) \quad (\text{III.13})$$

d). La résolution de l'équation de différence finies :

(i). Méthode explicite :

On utilise le schéma MDF pour discrétiser les dérivés partielles, par le temps ou l'espace

L'inconvénient principal de cette méthode est qu'elle nécessite de choisir un pas de temps Δt suffisamment petit, sinon de l'équation discrétisée devient instable.

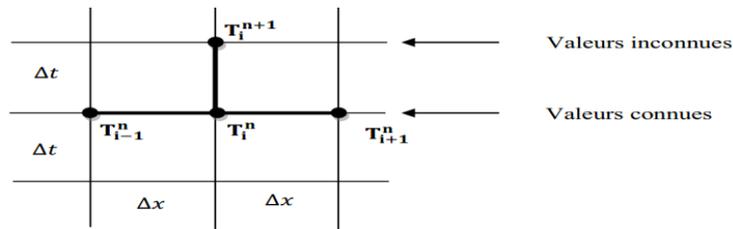


Figure 8. Schéma explicite

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad a \quad 0 \leq x \leq L, t > 0 \tag{III.14}$$

$$\rightarrow \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{III.15}$$

$$\rightarrow T_i^{n+1} = rT_{i-1}^n - (1 - 2r)T_i^n + rT_{i+1}^n \tag{III.16}$$

Avec :

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{III.17}$$

(ii). La méthode implicite :

On obtient une équation implicite en écrivant le seconde membre à l' instant $(n + 1)$ ou la solution n 'est pas connue.

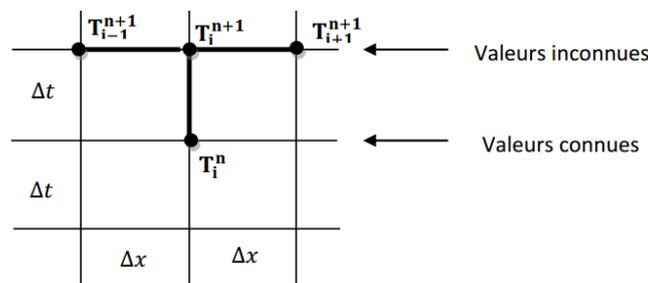


Figure 9. Schéma implicite

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad a \quad 0 \leq x \leq L, t > 0 \quad (\text{III.18})$$

$$\rightarrow \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.19})$$

$$T_i^n = -rT_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} \quad (\text{III.20})$$

(iii). **Méthode de Crank- Nicholson :**

Elle consiste à écrire le second membre de l'équation discrétisée comme la demi-somme des seconds membres des méthodes implicite et explicite.

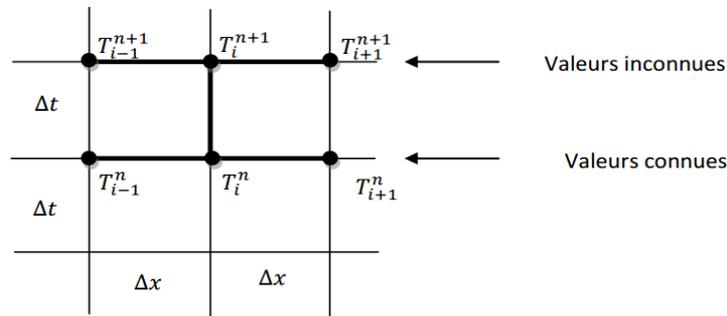


Figure 10.Schéma de Crank Nicholson

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{III.21})$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (\text{III.22})$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right] + \frac{\alpha}{2} \left[\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] \quad (\text{III.23})$$

Avec :

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x^2} \quad (\text{III.24})$$

$$T_i^{n+1} - T_i^n = r \left[T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n + T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1} \right] \quad (\text{III.25})$$

2.2) Méthode de volume fini :

FVM est une méthode pour représenter et évaluer des équations différentielles partielles sous la forme d'équations algébriques . Similaire à la méthode des différences finies ou à la méthode des éléments finis, les valeurs sont calculées à des endroits discrétisés sur une

géométrie maillée. Les méthodes à volume fini (FVM) - parfois aussi appelées méthodes de boîte - sont principalement employées pour la résolution numérique de problèmes en mécanique des fluides, où elles ont été introduites dans les années 1970 par McDonald, MacCormack et Paullay.[31]

a). La forme différentielle est intégrale de l'équation de transport :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi u) = \text{div}(k\text{grad}\phi) + s\phi \quad (\text{III.26})$$

$$\int_{dv} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dv + \int_{dv} \text{div}(\rho\phi u) dv = \int_{dv} \text{div}(k\text{grad}\phi) dv + \int_{dv} s\phi dv \quad (\text{III.27})$$

b). Diffusion a une seule dimension régime stationnaire :

La méthode des volumes finis ou encore méthode des volumes de contrôle divise le domaine d'étude en un nombre fini de cellules (v.c) a travers lesquels la conservation de ϕ est respectée.

Examinons le processus de discrétisation à travers l'équation de diffusion 1D avec terme source , considérons un maillage unidimensionnel avec des mailles comme indiqué sur la figure .les valeurs discrètes de ϕ sont stockées aux centres des mailles et représentées par W ,E et P. les faces de la maille sont notées w et e.

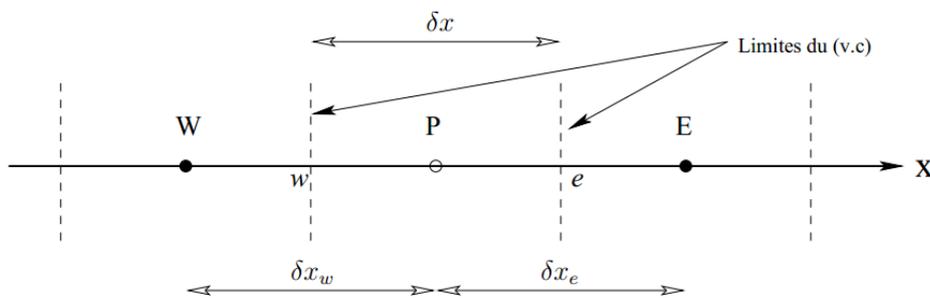


Figure 11.Disposition de c.v 1D

$$\int_{dv} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dv + \int_{dv} \text{div}(\rho\phi u) dv = \int_{dv} \text{div}(k\text{grad}\phi) dv + \int_{dv} s\phi dv \quad (\text{III.28})$$

$$\int_{dv} \text{div}(\text{grad}k\phi) dv + \int_{dv} s dv = 0 \quad (\text{III.29})$$

$$\int_W^E \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) dA + \int_{dv} s dv = \left(k \frac{d\phi}{dx} A \right)_e - \left(k \frac{d\phi}{dx} A \right)_w + \bar{s} \Delta v \quad (\text{III.30})$$

Avec k : cts de diffusive est défini au center des volumes du control

On suppose que la section est cts et le coeff de diffusivité cts

$$\frac{kA}{\Delta x} (\phi_E - \phi_p) - \frac{kA}{\Delta x} (\phi_p - \phi_w) + s \Delta v = 0 \quad (\text{III.31})$$

Avec :

$$s \Delta v = s_u + s_p \phi_p \quad (\text{III.32})$$

$$\frac{k_E A_E}{\Delta x} (\phi_E - \phi_p) + \frac{k_W A_W}{\Delta x} (\phi_p - \phi_w) + s_u + s_p \phi_p = 0 \quad (\text{III.33})$$

Réarrange cette équation sous la forme :

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e \quad (\text{III.34})$$

$$\frac{k_E A_E}{\Delta x} \phi_E + \frac{k_W A_W}{\Delta x} \phi_W + s_u = \phi_p \left(\frac{k_E A_E}{\Delta x} - \frac{k_W A_W}{\Delta x} - s_p \right) \quad (\text{III.35})$$

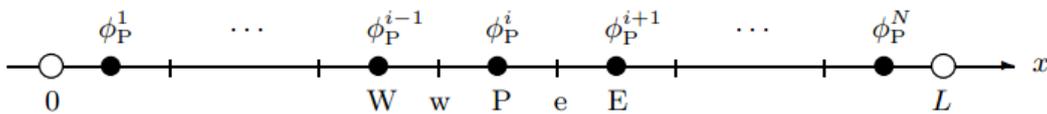


Figure12. Disposition des CV et des nœuds pour 1D, problème de transport

Exemple :

La diffusion de la chaleur dans une barre AB horizontale de longueur L avec un coefficient

De conductivité et une section A avec des conditions au limite T_A et T_B , sans terme source.

Résolution :

$$\int \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

$$\int_{cv} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dx \cdot dA = 0$$

$$\int_w^e \frac{AkdT}{dx} = 0$$

$$\left(A_e k_e \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(A_w k_w \frac{dT}{dx} \right)_w = 0$$

$$A_e k_e \left(\frac{T_E - T_p}{\Delta x} \right) - A_w k_w \left(\frac{T_p - T_w}{\Delta x} \right) = 0 \quad (1)$$

L'équation (1) s'applique au volume (2,3,4) les nœuds (2,3,4)

Discrétisation de nœud (1) :

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dv = 0$$

$$\int_w^e \left(k \frac{dT}{dx} \right) A = \left(k_e A_e \frac{dT}{dx} \right) - \left(k_w A_w \frac{dT}{dx} \right) = 0$$

$$A_e k_e \left(\frac{T_E - T_p}{\Delta x} \right) - 2A_w k_w \left(\frac{T_p - T_A}{\Delta x} \right) = 0$$

$$T_p \left(\frac{A_e k_e}{\Delta x} + \frac{2A_w k_w}{\Delta x} \right) = T_E \left(\frac{A_e k_e}{\Delta x} \right) + T_w(0) + T_A \left(\frac{2A_w k_w}{\Delta x} \right)$$

Discrétisation de nœud (5) :

$$\frac{2A_e k_e}{\Delta x} (T_B - T_p) - \frac{A_w k_w}{\Delta x} (T_p - T_w) = 0$$

$$T_p \left(\frac{A_w k_w}{\Delta x} + \frac{2A_e k_e}{\Delta x} \right) = T_w \left(\frac{A_w k_w}{\Delta x} \right) + T_E(0) + T_B \left(\frac{2A_e k_e}{\Delta x} \right)$$

c). Problème diffusion convection sans terme source VF (permanent) :

Considérons le problème convection –diffusion unidimensionnel (fig11) dont l'équation peut être déduite de l'équation générale de transport(III.36)

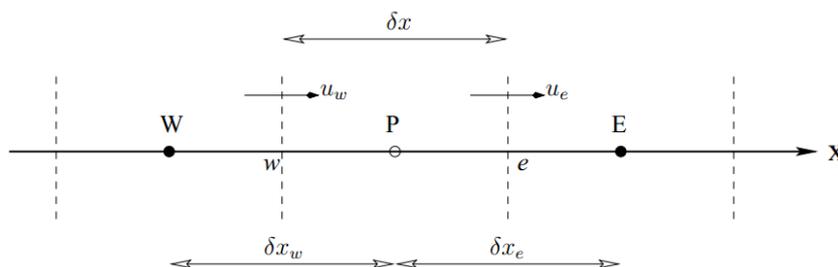


Figure 13.Schéma convection diffusion unidimensionnel

$$\frac{d\rho\phi}{dt} + \text{div}(\rho u\phi) = \text{div}(k\text{grad}\phi) + s_0 \quad (\text{III.36})$$

Sous la forme intégrale l'équation devient

$$\int_{cv} \text{div}(\rho u\phi) dv = \int_{cv} \text{div}(k\text{grad}\phi) dv \quad (\text{III.37})$$

En appliquant la théorème GREEN GAUSS

$$\int_A (\rho u\phi) dA = \int_A (k\text{grad}\phi) dA \quad (\text{III.38})$$

$$(\rho u\phi)_e A_e - (\rho u\phi)_w A_w = \left(k \frac{d\phi}{dx} \right)_e A_e - \left(k \frac{d\phi}{dx} \right)_w A_w \quad (\text{III.39})$$

$$(\rho u A)_e \phi_e - (\rho u A)_w \phi_w = \left(\frac{kA}{\Delta x} \right)_e (\phi_E - \phi_p) - \left(\frac{kA}{\Delta x} \right)_w (\phi_p - \phi_w) \quad (\text{III.40})$$

$$\frac{(\rho u A)_e}{2} (\phi_E + \phi_p) - \frac{(\rho u A)_w}{2} (\phi_w + \phi_p) = \left(\frac{kA}{\Delta x} \right)_e (\phi_E - \phi_p) - \left(\frac{kA}{\Delta x} \right)_w (\phi_p - \phi_w) \quad (\text{III.41})$$

On suppose que $A_e = A_w = A$

On suppose que $F = \rho u$ et $D = \frac{k}{\Delta x}$

$$\frac{F_e}{2} (\phi_E + \phi_p) - \frac{F_w}{2} (\phi_w + \phi_p) = D_e (\phi_E - \phi_p) - D_w (\phi_p - \phi_w) \quad (\text{III.42})$$

$$\phi_p \left(\frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + D_e + D_w \right) = \phi_w \left(\frac{F_w}{2} + D_w \right) + \phi_E \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \quad (\text{III.43})$$

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_E \phi_E + s_u \quad (\text{III.44})$$

L'écoulement satisfait l'équation de continuité

$$\frac{d\rho u}{dx} = 0 \equiv \text{div}(\rho u)' = 0 \quad (\text{III.45})$$

$$\int_w^e \text{div}(\rho u) dv = 0 \quad (\text{III.46})$$

$$\int_w^e \rho u dA = 0 \quad (\text{III.47})$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (\text{III.48})$$

$$F_e - F_w = 0 \quad (\text{III.49})$$

$$\frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + D_e + D_w = \frac{F_w}{2} - \frac{F_e}{2} + D_w + D_e \quad (\text{III.50})$$

$$\frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + D_e + D_w = \frac{F_w}{2} - \frac{F_e}{2} + D_e + D_w + F_e - F_w \quad (\text{III.51})$$

d). Diffusion 2D sans terme source avec condition aux limites de NEUMANN :

$$\int_{cv} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) dv + \int_{cv} \frac{d}{dy} \left(k \frac{dT}{dy} \right) dv = 0 \quad (\text{III.52})$$

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e A + \left(k \frac{dT}{dy} \right)_w A = 0 \quad (\text{III.53})$$

$$k_e A_e \frac{dT}{\Delta x} - k_w A_w \frac{dT}{\Delta x} + k_N A_N \frac{dT}{\Delta y} - k_s A_s \frac{dT}{\Delta y} = 0 \quad (\text{III.54})$$

$$T_p \left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_N A_N}{\Delta y} + \frac{k_s A_s}{\Delta y} \right) = T_w \left(\frac{k_w A_w}{\Delta x} \right) + T_E \left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} \right) + T_s \left(\frac{k_s A_s}{\Delta y} \right) + T_N \left(\frac{k_N A_N}{\Delta y} \right) \quad (\text{III.55})$$

$$a_p T_p = a_E T_E + a_w T_w + a_s T_s + a_N T_N \quad (\text{III.56})$$

$$a_p = a_E + a_w + a_s + a_N \quad (\text{III.57})$$

L'éq (III.55) pour les nœuds (5,8)

Nœud 1 :

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} [T_E - T_P] - \frac{2k_w A_w}{\Delta x} [T_P - T_A] + \frac{k_N A_N}{\Delta y} [T_N - T_P] - \frac{2k_s A_s}{\Delta y} [T_P - T_D] = 0 \quad (\text{III.58})$$

$$T_p \left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + 0_w + \frac{k_N A_N}{\Delta y} + \frac{2k_s A_s}{\Delta y} + 0_s + \frac{2k_w A_w}{\Delta x} \right) = T_E \left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} \right) + T_w (0) + T_N \left(\frac{k_N A_N}{\Delta y} \right) + T_s (0) + \frac{2k_w A_w}{\Delta x} T_A + \frac{2k_s A_s}{\Delta y} T_D \quad (\text{III.59})$$

$$a_p = a_E + a_w + a_s + a_N - s_p \quad (\text{III.60})$$

$$s_p = - \left(\frac{2k_s A_s}{\Delta y} + \frac{2k_w A_w}{\Delta x} \right) \quad (\text{III.61})$$

$$s_u = \frac{2k_w A_w}{\Delta x} T_A + \frac{2k_s A_s}{\Delta y} T_D \quad (\text{III.62})$$

Nœud 2 :

$$\frac{k_e A_e}{\Delta x} (T_E - T_p) - \frac{k_w A_w}{\Delta x} (T_p - T_w) + \frac{k_N A_N}{\Delta y} (T_N - T_p) - \frac{2k_s A_s}{\Delta y} (T_p - T_D) = 0 \quad (\text{III.63})$$

$$T_p \left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} + \frac{k_w A_w}{\Delta x} + \frac{k_N A_N}{\Delta y} + \frac{2k_s A_s}{\Delta y} \right) = T_E \left(\frac{k_e A_e}{\Delta x} \right) + T_w \left(\frac{k_w A_w}{\Delta x} \right) + T_s (0) + T_N \left(\frac{k_N A_N}{\Delta y} \right) + T_D \left(\frac{2k_s A_s}{\Delta y} \right) \quad (\text{III.64})$$

$$S_p = - \frac{2k_s A_s}{\Delta y} \quad (\text{III.65})$$

$$S_u = T_D \left(\frac{2k_s A_s}{\Delta y} \right) \quad (\text{III.66})$$

Nœud 3 :

$$a_p = \cancel{a_E} + a_w + \cancel{a_S} + a_N - s_p \quad (\text{III.67})$$

$$S_p = - \left[\frac{2k_e A_e}{\Delta x} + \frac{2k_s A_s}{\Delta y} \right] \quad (\text{III.68})$$

$$S_u = \left(\frac{2k_e A_e}{\Delta x} \right) T_C + \left(\frac{2k_s A_s}{\Delta y} \right) T_D \quad (\text{III.69})$$

Nœud 4,7 :

$$a_p = \cancel{a_W} + a_E + a_s + a_N - s_p \quad (\text{III.70})$$

$$S_p = -\frac{2k_w A_w}{\Delta x} \quad (\text{III.71})$$

$$S_u = \left(\frac{2k_w A_w}{\Delta x} \right) T_A \quad (\text{III.72})$$

Nœud 10 :

$$a_p = a_E + \cancel{a_W} + a_S + \cancel{a_N} - s_p \quad (\text{III.73})$$

$$S_p = -\left[\frac{2k_w A_w}{\Delta x} + \frac{2k_n A_n}{\Delta y} \right] \quad (\text{III.74})$$

$$S_u = \left(\frac{2k_w A_w}{\Delta x} \right) T_A + \left(\frac{2k_n A_n}{\Delta y} \right) T_B \quad (\text{III.75})$$

Nœud 11 :

$$a_p = a_W + a_E + a_S + \cancel{a_N} - s_p \quad (\text{III.76})$$

$$S_p = -\frac{2k_n A_n}{\Delta y} \quad (\text{III.77})$$

$$S_u = \left(\frac{2k_n A_n}{\Delta y} \right) T_B \quad (\text{III.78})$$

Nœud 12 :

$$a_p = \cancel{a_E} + a_W + \cancel{a_N} + a_S - s_p \quad (\text{III.79})$$

$$S_p = -\left[\frac{2k_n A_n}{\Delta y} + \frac{2k_e A_e}{\Delta x} \right] \quad (\text{III.80})$$

$$S_u = \left(\frac{2k_e A_e}{\Delta x} \right) T_C + \left(\frac{2k_n A_n}{\Delta y} \right) T_B \quad (\text{III.81})$$

Nœud 6,9 :

$$a_p = \cancel{a_E} + a_W + a_N + a_S - s_p \quad (\text{III.82})$$

$$S_p = -\frac{2k_e A_e}{\Delta x} \quad (\text{III.83})$$

$$S_u = \left(\frac{2k_e A_e}{\Delta x} \right) T_C \quad (\text{III.84})$$

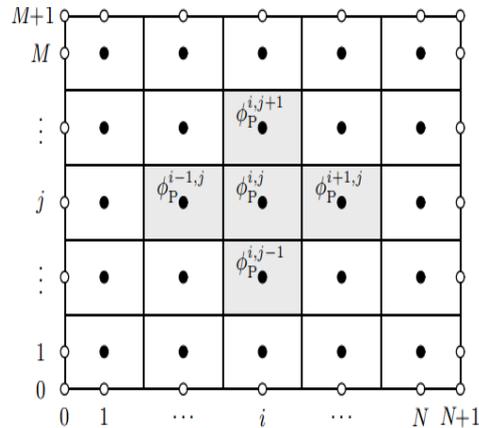


Figure 14. Disposition des CV et des nœuds pour 2D, problème de transport

2.3) La méthode de l'élément fini :

a). Définition :

la méthode de l'élément fini est une manière numérique de résoudre certains des problèmes de physique. C'est une méthode qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial, c'est-à-dire qui permet de calculer un champ (de scalaires, de vecteurs, de tenseurs) qui correspond à certaines équations et à certaines conditions imposées. La méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments, également appelés mailles, et à rechercher une formulation simplifiée du problème sur chaque élément, c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires. Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice. Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite rassemblés, ce qui forme une grande matrice ; la résolution de ce système global donne la solution approchée au problème.

b). Le principe d'élément fini :

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes :

- discrétisation du milieu continu en sous domaines ;
- construction de l'approximation nodale par sous domaine ;
- calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème ;
- assemblage des matrices élémentaires ;
- prise en compte des conditions aux limites ;

➤ résolution du système d'équations.

c). La méthode des éléments finis en 1D :

L'espace que nous cherchons à approcher est

$$v = \{u \text{ continue et } C^1 \text{ par morceaux sur } [0,1], u(0) = u(1) = 0\} \quad (\text{III.58}) \triangleright$$

Et on veut construire des espaces d'approximation $V_h \subset V$ de dimension finie. On commence par construire un maillage de l'intervalle $[0,1]$:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1 \quad (\text{III.59})$$

C'est-à-dire qu'on divise l'intervalle $[0,1]$ en petits sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0 \dots N$ les intervalles sont appelés les mailles. on notera $h_i = x_{i+1} - x_i$ la taille de la maille i et on définit

$$h = \max_{0 < i < N} x_{i+1} - x_i \quad (\text{III.60})$$

d). La méthode des éléments finis en 2D :

En deux dimensions, nous illustrons toujours la méthode des éléments finis Sur le cas du problème de Poisson

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{III.61})$$

Où cette fois-ci Ω est un ouvert borné de R^2 . On suppose que La formulation variationnelle de ce problème admet une solution u dans l'espace

$$V = \{u \text{ continue et } C^1 \text{ par morceaux sur } \overline{\Omega}, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (\text{III.62})$$

Et on cherche à l'approcher par une fonction u_h Solution du même problème variationnel mais où l'espace V est remplacé par un espace d'approximation V_h .

On commence par définir ce qu'est un maillage du domaine Ω en dimension deux.

e). Définition de l'approximation nodale

L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous domaines ne faisant intervenir que les variables nodales du domaine élémentaire D_e :

$$\forall M \subset D_e, u^*(M) = N(M)u \quad (\text{III.63})$$

où $u^*(M)$ représente la valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément et N , la matrice ligne des fonctions d'interpolation de l'élément u_n variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément

(i). **Approximation nodale**

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation u^* du champ des variables u par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.

Dans le cas général le champ à approcher est un champ vectoriel. Nous utilisons alors la notation matricielle suivante [31] Eric blayo.

$$u^*(M) = N(M)u_n \quad (\text{III.64}) .$$

Les nœuds M_i sont des points de l'élément pour lesquels on choisit d'identifier l'approximation u^* à la valeur du champ de variables u . Nous en déduisons que :

$$\forall M_i, u^*(M_i) = u_i \quad (\text{III.65})$$

soit pour l'approximation nodale :

$$\forall M_i, N_j(M_i) = \delta_{ij} \quad (\text{III.66})$$

(ii). **Approximation interne (Galerkin) :**

Principe général :

Soit Ω un domaine ouvert de IR^n ($n = 1;2$ ou 3 en pratique), de frontière $\partial\Omega$, et sur lequel on cherche à résoudre une équation aux dérivées partielles, munie de conditions aux limites.

En écrivant la formulation variationnelle, on obtient un problème de la forme

$$u \in V \text{ tel que } a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V \quad (\text{III.67})$$

2.4) Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons étudié les trois méthodes des résolutions, des exemples sur chaque méthode. Dans notre étude on a utilisé la méthode des volumes finis pour résoudre l'équation de la chaleur. Cette équation est discrétisé dans le chapitre suivant.

IV. Chapitre IV : formulation mathématique

1. Introduction :

Ce chapitre est un passage sur la modélisation de la conduction de chaleur dans une demi-couronne. On va présenter l'équation générale de chaleur et la méthode de résolution de cette équation par la méthode de volume fini.

2. La modélisation et la simulation numérique :

Le principe d'un modèle est de remplacer un système complexe en un objet ou opérateur simple reproduisant les aspects ou comportements principaux de l'original (ex : modèle réduit, maquette, modèle mathématique ou numérique, modèle de pensée ou raisonnement).

3. Hypothèse

- La conductivité thermique constante.
- La diffusion de long de l'axe Z
- Conduction thermique stationnaire.

4. Equation polaire :

L'équation de chaleur polaire pour un problème 2D est la suivante :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + S \quad (\text{IV.1})$$

Stationnaire

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + S = 0 \quad (\text{IV.2})$$

4.1) Le premier cas : demi annulaire

a). Conditions aux limites de type Dirichlet:

A	TA=80
B	TB=20
C	TC=40
D	TD=100

Tableau 1:tableau de condition aux limites premier cas

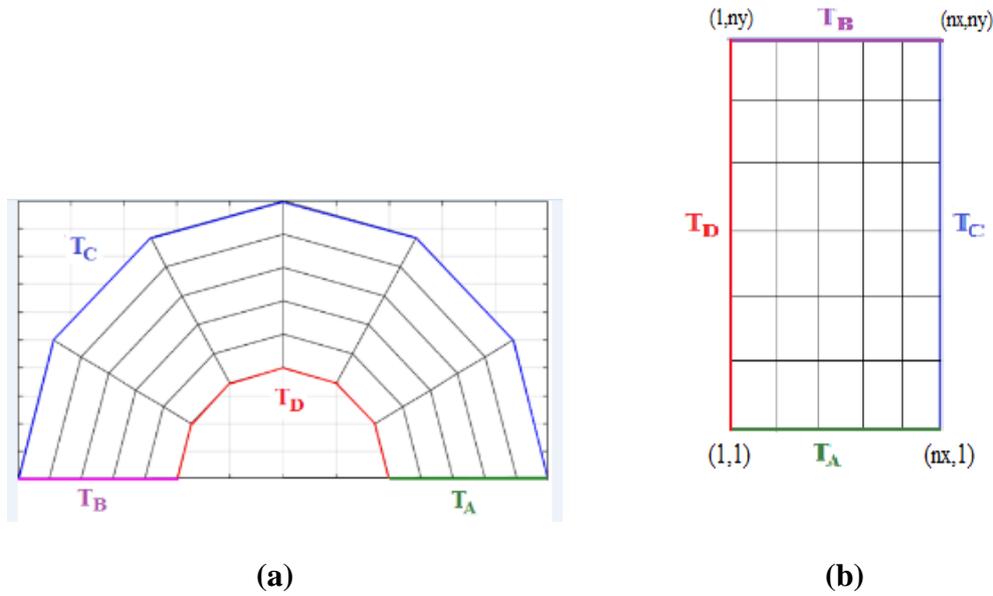


Figure 15.volume de contrôle CL Dirichlet

(i). **Résolution numérique de l'équation de chaleur 2D par la méthode des volumes finis**

On intégrée :

$$\int_S^N \int_W^E \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) dv + \int_S^N \int_W^E \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dv + \int_S^N \int_W^E S dv = 0 \quad (IV.3)$$

$$\int_S^N \int_W^E \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr d\theta + \int_S^N \int_W^E \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dr d\theta + S_u + S_p T_p = 0 \quad (IV.4)$$

$$\left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right)_S^N \Delta\theta + \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_W^E \Delta r + S_u + S_p T_p = 0 \quad (IV.5)$$

$$k_n r_n \Delta\theta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_N - k_s r_s \Delta\theta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_S + \frac{k_e}{r_e} \Delta r \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_E - \frac{k_w}{r_w} \Delta r \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_W + S_u + S_p T_p = 0 \quad (IV.6)$$

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) + S_u + S_p T_P = 0 \quad (\text{IV.7})$$

$$a_p T_P = a_w T_W + a_E T_E + a_N T_N + a_S T_S + S_u \quad (\text{IV.8})$$

$$a_p = a_E + a_w + a_N + a_S - s_p \quad (\text{IV.9})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} - S_p \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + S_u \quad (\text{IV.10})$$

$$a_N = \frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r}, a_S = \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r}, a_E = \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta}, a_W = \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta}$$

L'équation (III.10) pour les nœuds du centre

Le nœud du coin S,W :

$$k_n r_n \Delta \theta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_N - k_s r_s \Delta \theta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_S + \frac{k_e \Delta r}{r_e} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_E - \frac{k_w \Delta r}{r_w} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_W = 0 \quad (\text{IV.11})$$

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_A) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_D) = 0 \quad (\text{IV.12})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_S \left(\cancel{\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r}} \right) + T_W \left(\cancel{\frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta}} \right) + T_A \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_D \left(\frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.13})$$

$$S_{p(1,1)} = - \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.14})$$

$$S_{u(1,1)} = T_A \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_D \left(\frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.15})$$

Pour le nœud du coin E,S :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_A) + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_C - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.16})$$

$$\begin{aligned}
T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) &= T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \\
+ T_E \left(\cancel{q_E} \right) + T_S \left(\cancel{q_S} \right) + T_A \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_C \left(\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) & \quad (IV.17)
\end{aligned}$$

$$S_{p(nx,1)} = - \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \quad (IV.18)$$

$$S_{u(nx,1)} = T_A \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_C \left(\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \quad (IV.19)$$

Les nœuds S :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_A) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (IV.20)$$

$$\begin{aligned}
T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) &= T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \\
+ T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_S \left(\cancel{q_S} \right) + T_A \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) & \quad (IV.21)
\end{aligned}$$

$$S_{p(i,1)} = - \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) \quad (IV.22)$$

$$S_{u(i,1)} = T_A \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) \quad (IV.23)$$

Pour les nœuds W :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_D) \quad (IV.24)$$

$$\begin{aligned}
T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) &= T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) \\
+ T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_W \left(\cancel{q_W} \right) + T_D \left(\frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) & \quad (IV.25)
\end{aligned}$$

$$S_{p(1,j)} = - \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \quad (IV.26)$$

$$S_{u(1,j)} = T_D \left(\frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \quad (IV.27)$$

Pour les nœuds E :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) + \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_C - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.28})$$

$$\begin{aligned} T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) &= T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) \\ &+ T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + T_E (q_E) + T_C \left(\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

$$S_{p(nx,j)} = -\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \quad (\text{IV.30})$$

$$S_{u(nx,j)} = T_C \left(\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.31})$$

Pour les nœuds W,N :

$$\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_B - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_D) = 0 \quad (\text{IV.32})$$

$$\begin{aligned} T_P \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) &= T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \\ &+ T_N (q_N) + T_W (q_W) + T_D \left(\frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + T_B \left(\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

$$S_{p(1,ny)} = -\left[\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right] \quad (\text{IV.34})$$

$$S_{u(1,ny)} = T_B \left(\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_D \left(\frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.35})$$

Pour les nœuds E,N :

$$\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_B - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_C - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.36})$$

$$\begin{aligned} T_P \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) &= T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \\ &+ T_E (q_E) + T_N (q_N) + T_B \left(\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_C \left(\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

$$S_{p(nx,ny)} = - \left[\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right] \quad (\text{IV.38})$$

$$S_{u(nx,ny)} = T_B \left(\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_C \left(\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.39})$$

Pour les nœuds N :

$$\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_B - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.40})$$

$$T_P \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) = T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + T_N (q_N) + T_B \left(\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) \quad (\text{IV.41})$$

$$S_{p(i,ny)} = - \frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \quad (\text{IV.42})$$

$$S_{u(i,ny)} = T_B \left(\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) \quad (\text{IV.43})$$

4.2) Le deuxième cas : trois car d'annulaire

a). Conditions aux limites de type « flux nul » Neumann, « température imposée Dirichlet :

A	$T_A=100$
B	$T_B=20$
C	$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$
D	$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$

Tableau 2: tableau de condition aux limites deuxièmes cas

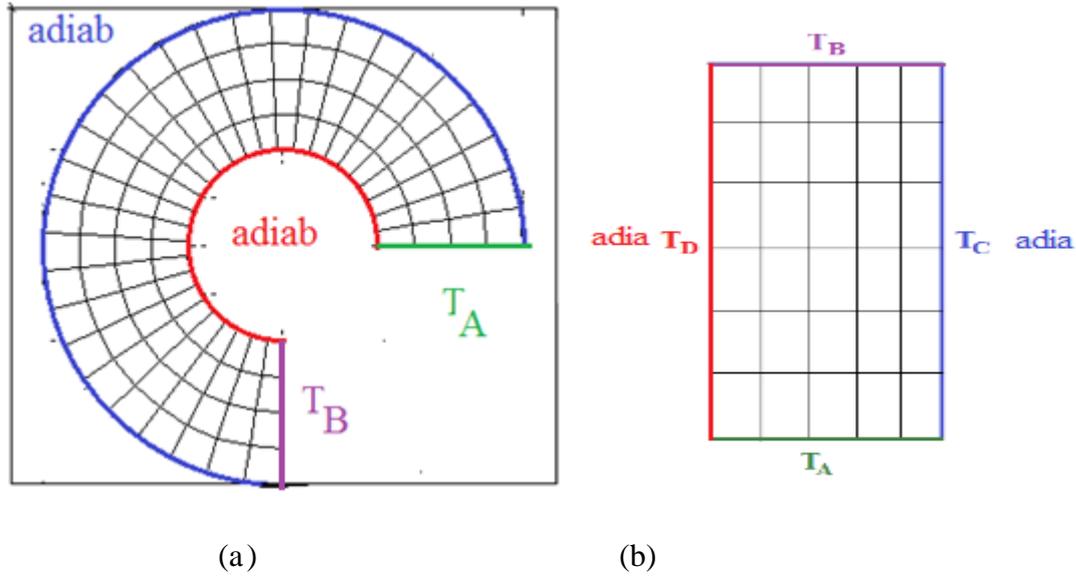


Figure 16. Volume de contrôle CL Neumann Dirichlet

(i). **Résolution numérique de l'équation de chaleur en 2D par la méthode des volumes finis :**

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$\int_S^N \int_W^E \frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) dr d\theta + \int_S^N \int_W^E \frac{d}{d\theta} \left(\frac{k}{r} \frac{dT}{d\theta} \right) dr d\theta + S_u + S_p T_p = 0 \quad (\text{IV.44})$$

$$\left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right)_S \Delta\theta + \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_W \Delta r + S_u + S_p T_p = 0 \quad (\text{IV.45})$$

$$k_n r_n \Delta\theta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_N - k_s r_s \Delta\theta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_S + \frac{k_e}{r_e} \Delta r \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_E - \frac{k_w}{r_w} \Delta r \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_W + S_u + S_p T_p = 0 \quad (\text{IV.46})$$

$$T_p \left(\frac{k_n r_n \Delta\theta}{\Delta r} + \frac{k_s r_s \Delta\theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta\theta} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta\theta} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta\theta}{\Delta r} \right) + T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta\theta}{\Delta r} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta\theta} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta\theta} \right) \quad (\text{IV.47})$$

Les équations pour les centres

Le nœud de coin 'SW' :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_A) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_D) = 0 \quad (\text{IV.48})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_A \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) \quad (\text{IV.49})$$

$$S_{P(1,1)} = -\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \quad (\text{IV.50})$$

$$S_{u(1,1)} = \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} T_A \quad (\text{IV.51})$$

Le nœud de coin 'SE' :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_A - T_P) + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_C - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.52})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + T_A \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) \quad (\text{IV.53})$$

$$S_{P(nx,1)} = -\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \quad (\text{IV.54})$$

$$S_{u(nx,1)} = T_A \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \quad (\text{IV.55})$$

les nœud du sud 'S' :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_A) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.56})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + T_A \left(\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) \quad (\text{IV.57})$$

$$S_{P(i,1)} = -\frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \quad (\text{IV.58})$$

$$S_{u(i,1)} = T_A \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \quad (\text{IV.59})$$

Les nœuds du West 'W' :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_D) = 0 \quad (\text{IV.60})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.61})$$

$$S_{p(1,j)} = 0 \quad (\text{IV.62})$$

$$S_{u(1,j)} = 0 \quad (\text{IV.63})$$

les nœud du East 'E' :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) \quad (\text{IV.64})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.65})$$

$$S_{p(nx,j)} = 0 \quad (\text{IV.66})$$

$$S_{u(nx,j)} = 0 \quad (\text{IV.67})$$

Le nœud du 'NW' :

$$\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_B - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{2k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_D) = 0 \quad (\text{IV.68})$$

$$T_P \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) = T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_B \left(\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) \quad (\text{IV.69})$$

$$S_{p(1,ny)} = -\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \quad (\text{IV.70})$$

$$S_{u(1,ny)} = T_B \frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \quad (\text{IV.71})$$

le nœud de 'NE' :

$$\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_B - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.72})$$

$$T_P \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) = T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + T_B \left(\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) \quad (\text{IV.73})$$

$$S_{p(nx,ny)} = -\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \quad (\text{IV.74})$$

$$S_{u(nx,ny)} = T_B \frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \quad (\text{IV.75})$$

Les nœuds du Nord 'N' :

$$\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_B - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (IV.76)$$

$$T_P \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) = T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + T_B \left(\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) \quad (IV.77)$$

$$S_{p(i,ny)} = -\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \quad (IV.78)$$

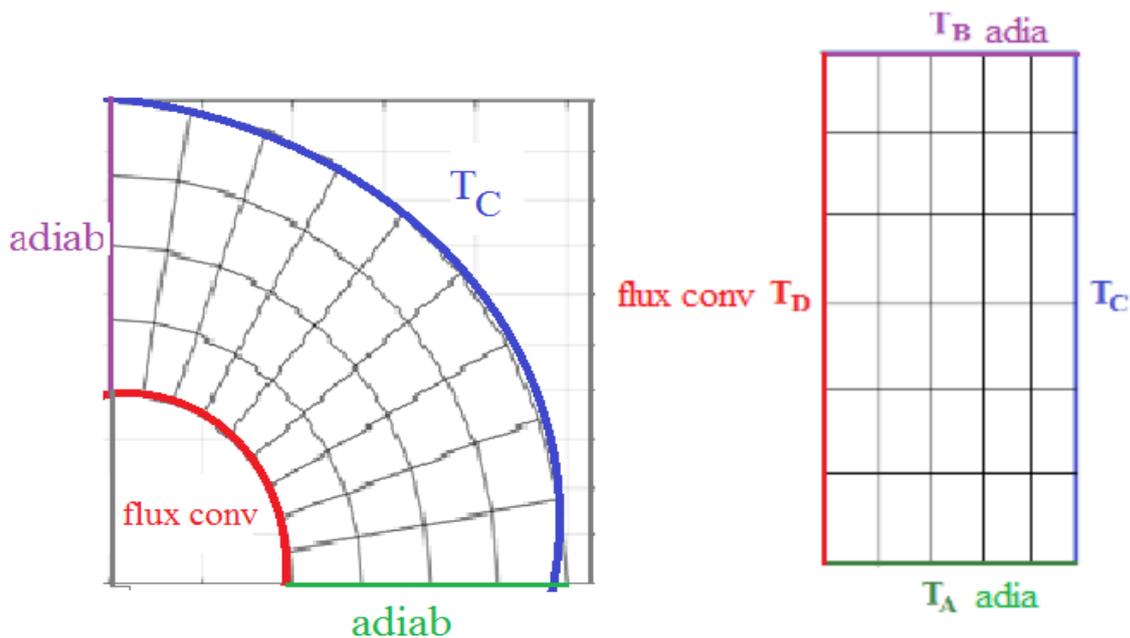
$$S_{u(i,ny)} = T_B \frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \quad (IV.79)$$

le troisième cas : un car d'annulaire

a). Conditions aux limites de type « flux nul » Neumann, « température imposée » Dirichlet et Robin « flux convection » :

A	$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$
B	$\frac{\partial T}{\partial r} = 0$
C	TC=20
D	$\left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} = h(T_p - T_\infty) \right) = 100$

Tableau 3:tableau de condition aux limites troisième cas



(a)

(b)

Figure 17. Volume de contrôle CL Neumann Dirichlet Robin

(i). Résolution numérique de l'équation de chaleur en 2D par la méthode des volumes finis :

$$\text{Neumann} \left(\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \right), \text{ robin (flux convective)} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} = h(T_p - T_\infty) \right)$$

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.80})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.81})$$

Le nœud de coin 'SW' :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_A) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{h \Delta r}{r_w} (T_P - T_\infty) = 0 \quad (\text{IV.82})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{h \Delta r}{r_w} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_\infty \left(\frac{h \Delta r}{r_w} \right) \quad (\text{IV.83})$$

$$S_{p(1,1)} = \frac{-h \Delta r}{r_w} \quad (\text{IV.84})$$

$$S_{u(1,1)} = T_\infty \frac{h \Delta r}{r_w} \quad (\text{IV.86})$$

le nœud du 'SE' :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_A) + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_C - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.87})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + T_C \left(\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.88})$$

$$S_{P(nx,1)} = -\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \quad (\text{III.89})$$

$$S_{u(nx,1)} = T_C \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \quad (\text{III.90})$$

les nœud de Sud 'S' :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{2k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_A) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.91})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.92})$$

$$S_{p(i,1)} = 0 \quad (\text{IV.93})$$

$$S_{u(i,1)} = 0 \quad (\text{IV.94})$$

Les nœuds du West 'W' :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{h \Delta r}{r_w} (T_P - T_\infty) = 0 \quad (\text{IV.95})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{h \Delta r}{r_w} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_\infty \left(\frac{h \Delta r}{r_w} \right) \quad (\text{IV.96})$$

$$S_{p(1,j)} = \frac{-h \Delta r}{r_w} \quad (\text{IV.97})$$

$$S_{u(1,j)} = T_\infty \frac{h \Delta r}{r_w} \quad (\text{IV.98})$$

Les nœuds de l'East 'E' :

$$\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_N - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_C - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.99})$$

$$T_P \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) = T_N \left(\frac{k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + T_C \left(\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.100})$$

$$S_{p(nx,j)} = -\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \quad (\text{IV.101})$$

$$S_{u(nx,j)} = T_C \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \quad (\text{IV.102})$$

Le nœud du 'NW' :

$$\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_B - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{h \Delta r}{r_w} (T_P - T_\infty) = 0 \quad (\text{IV.103})$$

$$T_P \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{h \Delta r}{r_w} \right) = T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_\infty \left(\frac{h \Delta r}{r_w} \right) \quad (\text{IV.104})$$

$$S_{p(1,ny)} = -\frac{h \Delta r}{r_w} \quad (\text{IV.105})$$

$$S_{u(1,ny)} = T_\infty \frac{h\Delta r}{r_w} \quad (\text{IV.106})$$

le nœud du 'NE' :

$$\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_B - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_C - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.107})$$

$$T_P \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} + \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) = T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) + T_C \left(\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.108})$$

$$S_{p(nx,ny)} = -\frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \quad (\text{IV.109})$$

$$S_{u(nx,ny)} = T_C \frac{2k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \quad (\text{IV.110})$$

Les nœuds du Nord 'N' :

$$\frac{2k_n r_n \Delta \theta}{\Delta r} (T_B - T_P) - \frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} (T_P - T_S) + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} (T_E - T_P) - \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} (T_P - T_W) = 0 \quad (\text{IV.111})$$

$$T_P \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} + \frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} + \frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) = T_S \left(\frac{k_s r_s \Delta \theta}{\Delta r} \right) + T_E \left(\frac{k_e \Delta r}{r_e \Delta \theta} \right) + T_W \left(\frac{k_w \Delta r}{r_w \Delta \theta} \right) \quad (\text{IV.112})$$

$$S_{p(i,ny)} = 0 \quad (\text{IV.113})$$

$$S_{u(i,ny)} = 0 \quad (\text{IV.114})$$

5. La résolution du système d'équations

La résolution du système d'équation se fait par une méthode itérative comme la méthode de TDMA, Jacobi, Gauss Seidel.....

On applique la TDMA ligne par ligne du sud vers le nord on divise nos équations en trois partie :

-la limite Sud

-les lignes du centre

-la limite Nord

➤ la limite Sud j=1

$$-a_w T_{(i-1,1)} + a_p T_{(i,1)} - a_e T_{(i+1,1)} = a_n T_{(i,j+1)} + a_s T_{(i,j+1)} + S_{u(i,1)}$$

➤ les lignes du centre 1

$$-a_w T_{(i-1,j)} + a_p T_{(i,j)} - a_e T_{(i+1,j)} = a_n T_{(i,j+1)} + a_s T_{(i,j-1)} + S_{u(i,j)}$$

➤ la limite Nord j=ny

$$-a_W T_{(i-1,ny)} + a_p T_{(i,ny)} - a_E T_{(i+1,ny)} = \cancel{a_N T_{(i,j+1)}} + a_S T_{(i,j-1)} + S_{u(i,ny)}$$

La matrice TDMA se fait ligne par ligne, itération de $i=1,2,\dots,nx$

Comme exemple est une ligne du centre de notre domaine:

$$\begin{pmatrix} a_p & -a_E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_W & a_p & -a_E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_W & a_p & -a_E & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & -a_W a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{(1,j)} \\ T_{(2,j)} \\ T_{(3,j)} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{(nx,j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_N T_{(i,j+1)} + S_{u1} \\ a_N T_{(2,j+1)} + a_S T_{(2,j-1)} + S_u \\ a_N T_{(3,j+1)} + a_S T_{(3,j-1)} + S_u \\ \cdot \\ \cdot \\ a_S T_{(nx,j-1)} + S_{unx} \end{pmatrix}$$

6. **Organigramme du code MATLAB** : pour la résolution de notre problème, nous avons utilisé le code de calcul MATLAB.

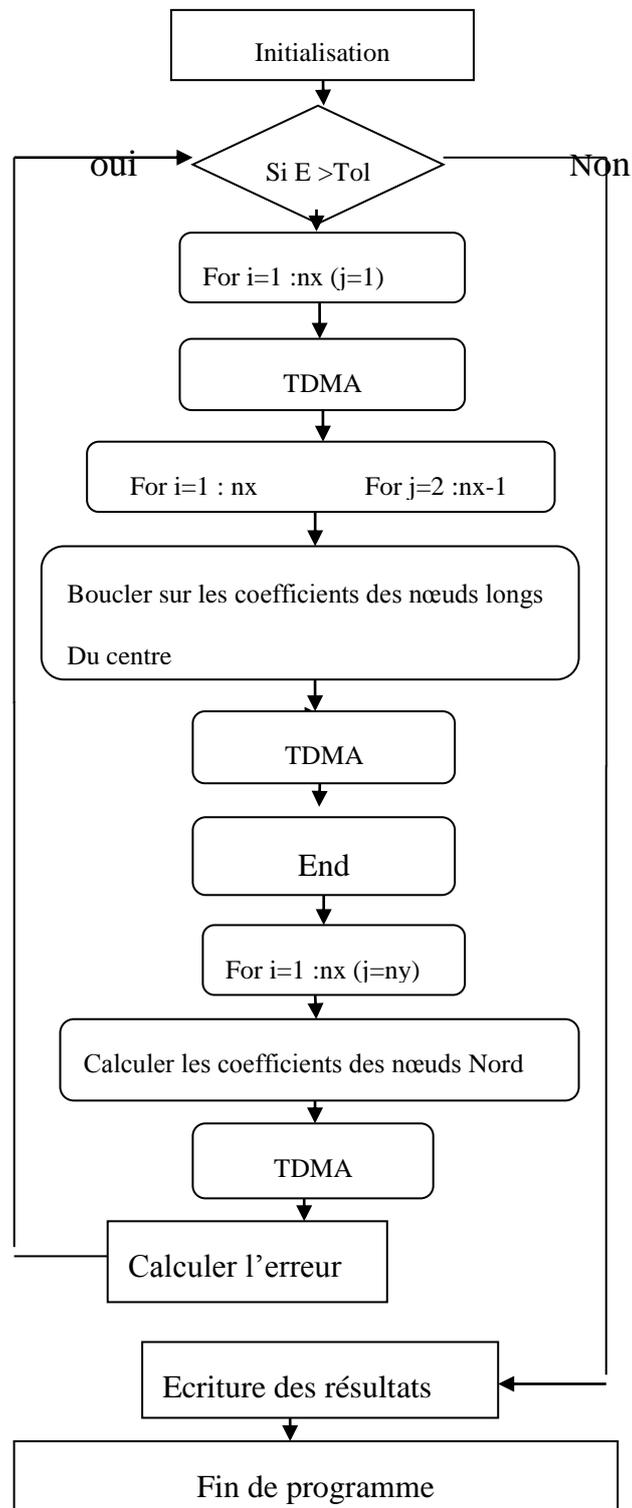


Figure 18.organigramme du programme

7. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les trois cas des conditions aux limites **NEUMANN**, **DIRICHLET** et **ROBIN** pour une résolution numérique bidimensionnel d'équation polaire par la méthode de volume fini qui est représenté au chapitre précédent, effectuée par le code **MATLAB**.

V. Chapitre V : Résultats et Interprétations

1. Introduction :

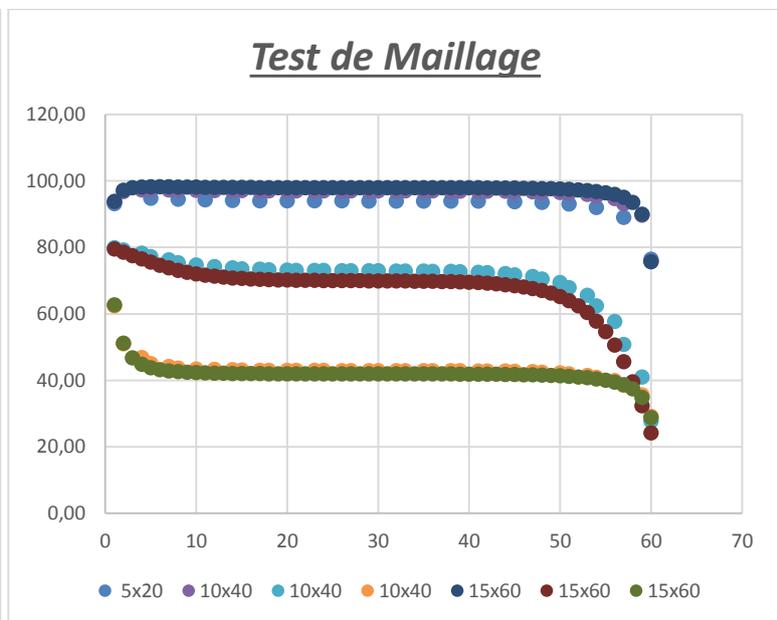
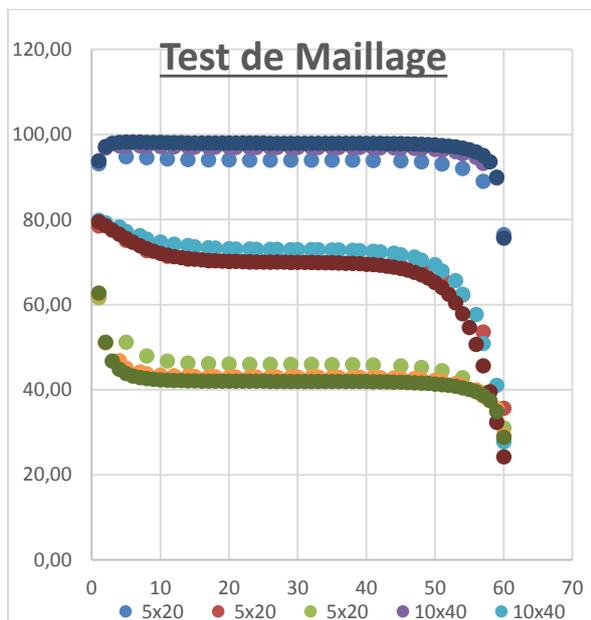
Dans ce chapitre nous comparons les résultats numériques des programmes MATLAB et COMSOL, on employant trois méthodes analytiques TDMA, Gausse-Seidel sans et avec relaxation et Jacobi sur MATLAB.

2. Test de maillage :

On a programmé le teste de maillage pour connaitre le seuil minimum du maillage pour l'apparition de la distribution de la température, on est arrivé aux les résultats suivant :

Maillage	5x20	5x20	5x20	10x40	10x40	10x40	15x60	15x60	15x60
1	93,17	78,49	61,62	93,76	79,89	62,41	93,83	79,53	62,72
2	94,04	70,16	46,07	97,03	73,22	43,05	98,02	70,21	42,03
3	94,00	70,00	46,00	97,00	73,00	43,00	98,00	69,99	42,00
4	93,96	69,82	45,93	96,97	72,80	42,96	97,98	69,72	41,96
5	93,59	68,30	45,30	96,67	70,52	42,49	97,74	67,04	41,62
6	76,51	35,69	31,11	75,87	27,79	29,21	75,70	24,24	28,82

Tableau 4:tableau de teste de maillage



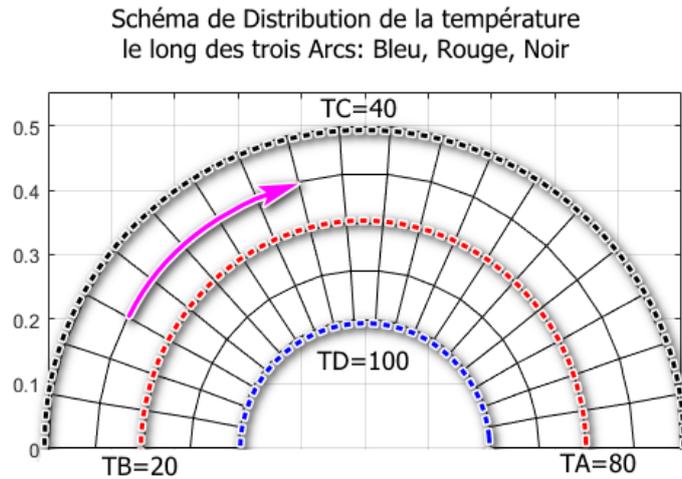


Figure 19.les courbe de test de maillage

3. Discussions :

D'après le test de maille effectué on remarque qu'on a une superposition de la distribution de la température pour les mailles suivantes (15x60) et (25x100) donc le maillage pris en considération doit être supérieur ou égale à (15x60)

4. Validation de nos résultats :

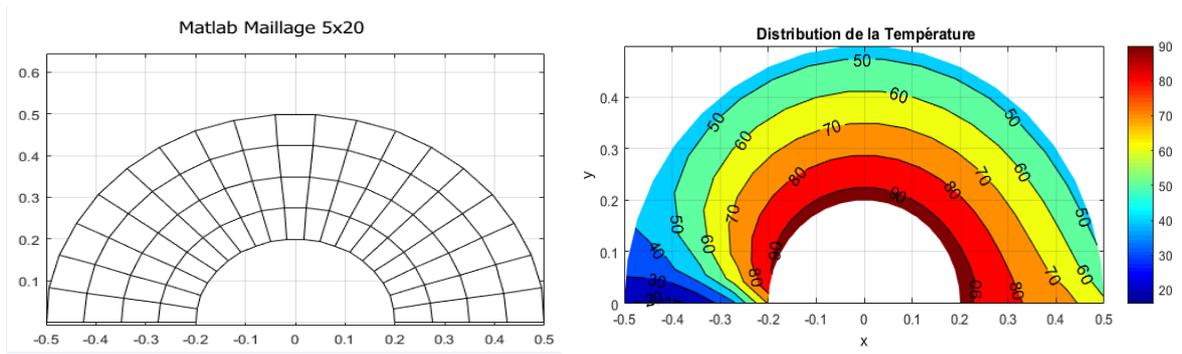
Dans le but principal de notre étude est la discrétisation de l'équation de chaleur en 2D dans une demi-couronne, avec différentes conditions aux limites par la méthode de volume finis.

4.1) Par TDMA

(i). *Premier cas : une demi annulaire*

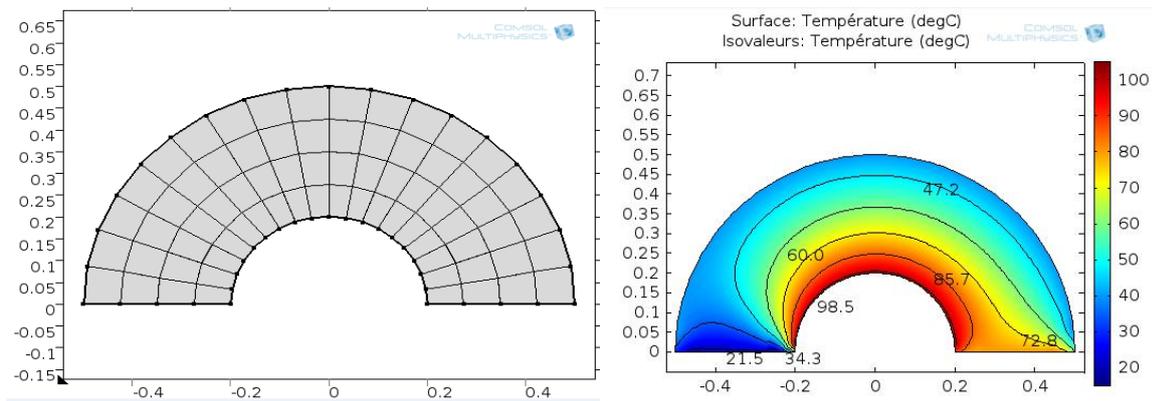
Dans le premier cas on a discrétisé avec condition au limite de type Dirichlet

- Les résultats obtenus avec (nx=5,ny=20)



(a)MATLAB

(b)MATLAB



(c) COMSOL

(d) COMSOL

Figure 20. Le maillage et les isothermes avec une condition au limite Dirichlet (15x20) méthode TDMA

- Les résultats obtenus avec (15x60)

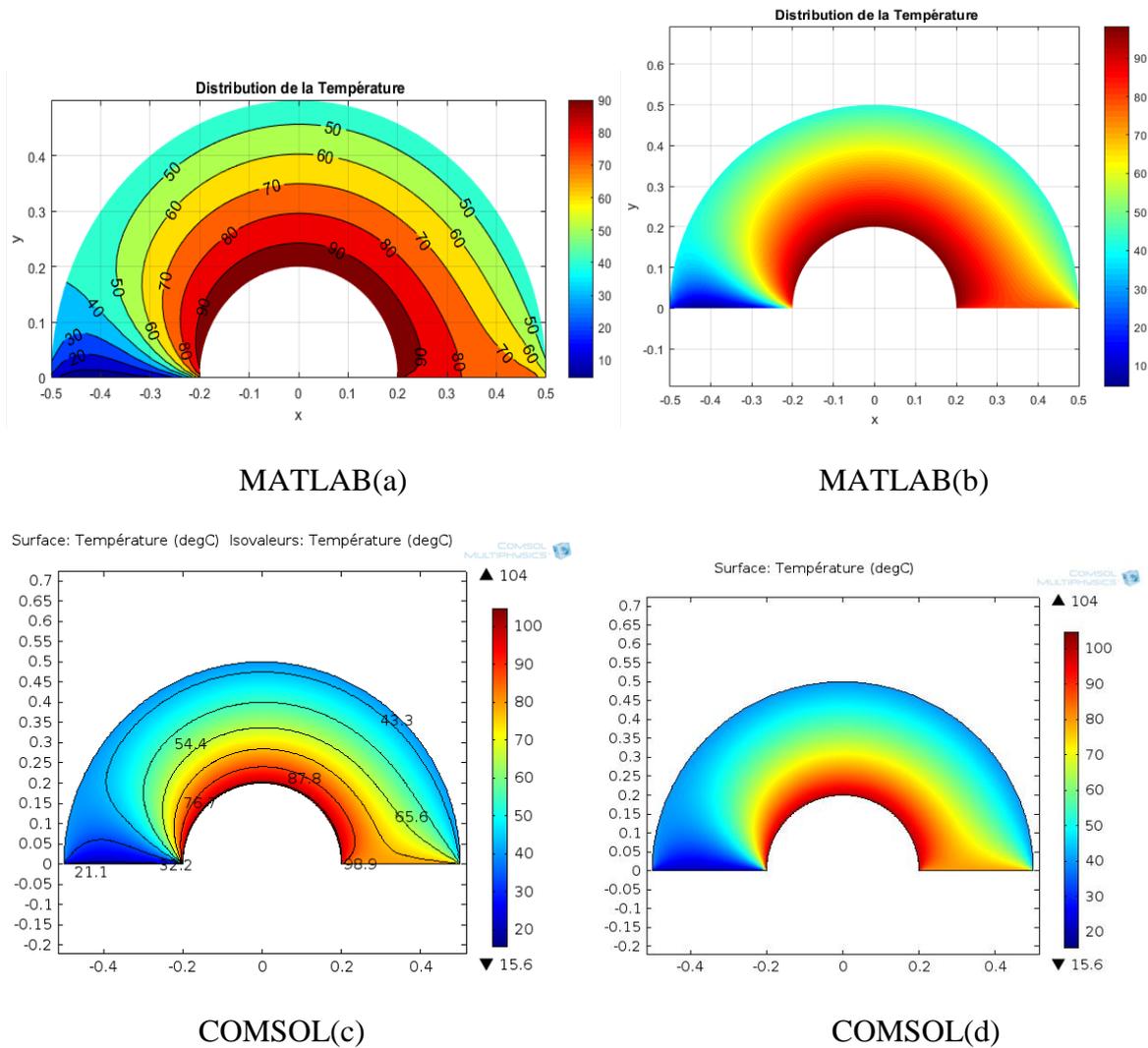


Figure 21. La distribution et les isothermes de la température avec une condition au limite Dirichlet (15x60) méthode TDMA

- Les résultats obtenus avec (25x100)

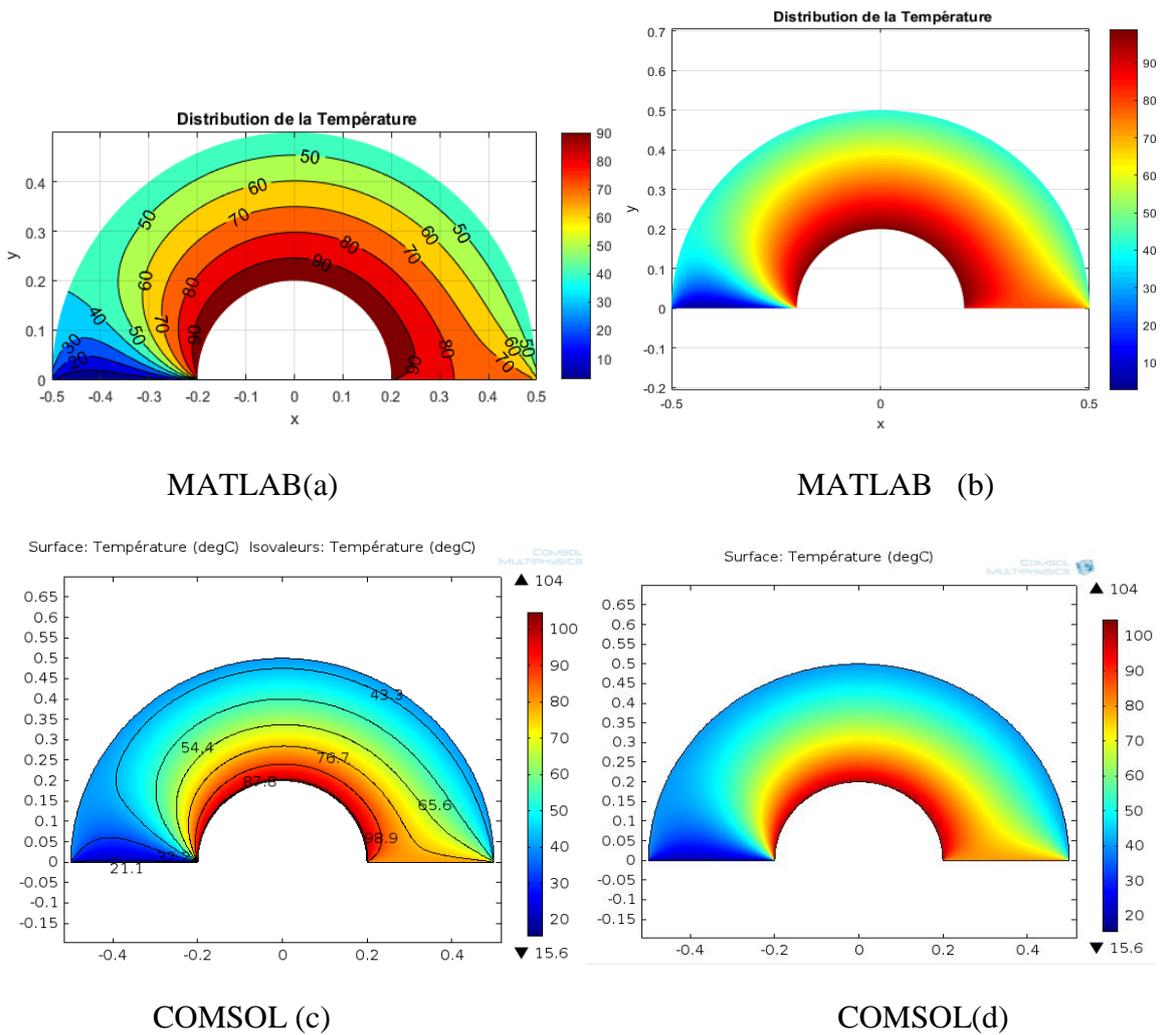


Figure 22.La distribution et les isothermes de la température avec une condition au limite Dirichlet (25x100) méthode TDMA

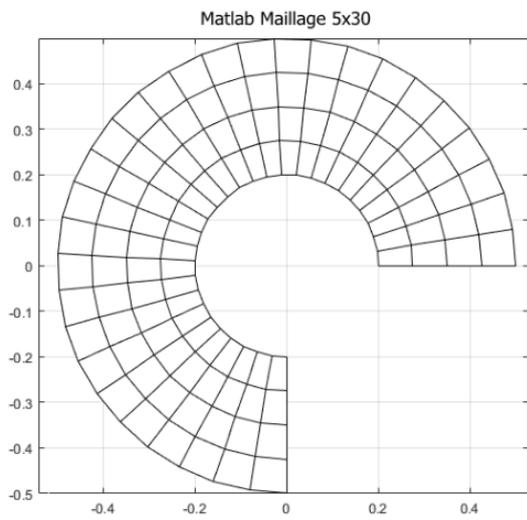
Discussions :

Les figures 20,21, et 22 représentent la comparaison des résultats numériques entre le code de calcul MATLAB et COMSOL dans la condition au limite Dirichlet, on remarque une concordance entre les résultats obtenus par les deux codes, même par un maillage grossier les résultats sont satisfaisantes.

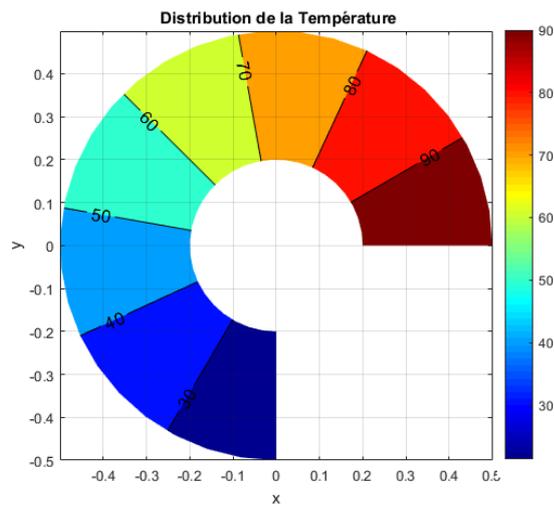
(ii). *Deuxièmes cas : trois car d'annulaire*

Dans le deuxième cas on discrétisé avec conditions aux limite mixte de type Dirichlet et Neumann

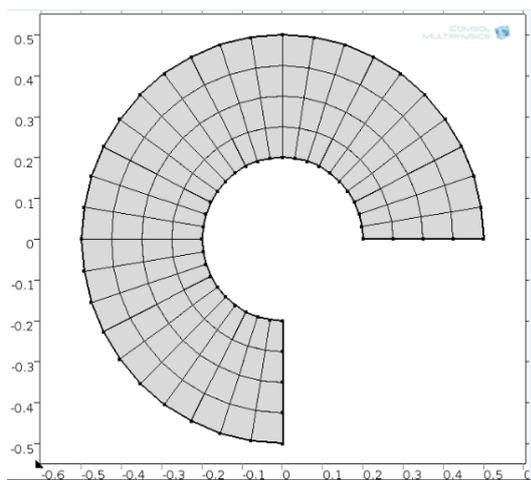
- Les résultats obtenus avec (5x30) :



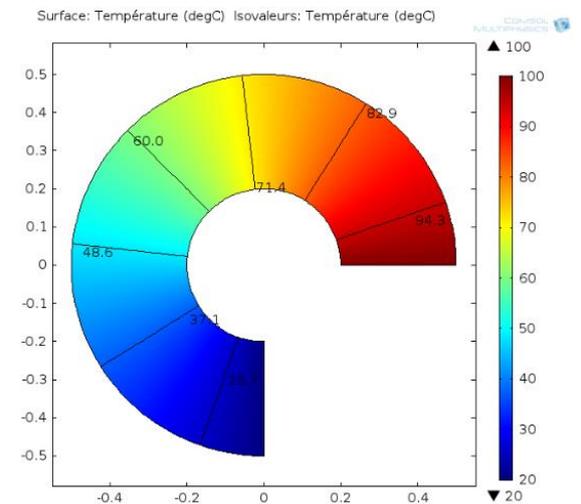
MATLAB(a)



MATLAB (b)



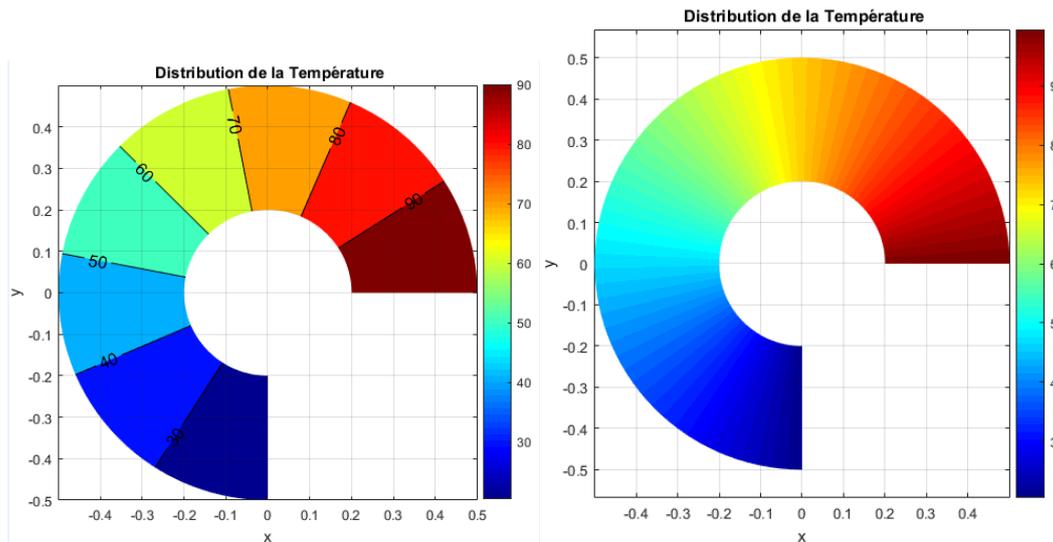
COMSOL(c)



COMSOL (d)

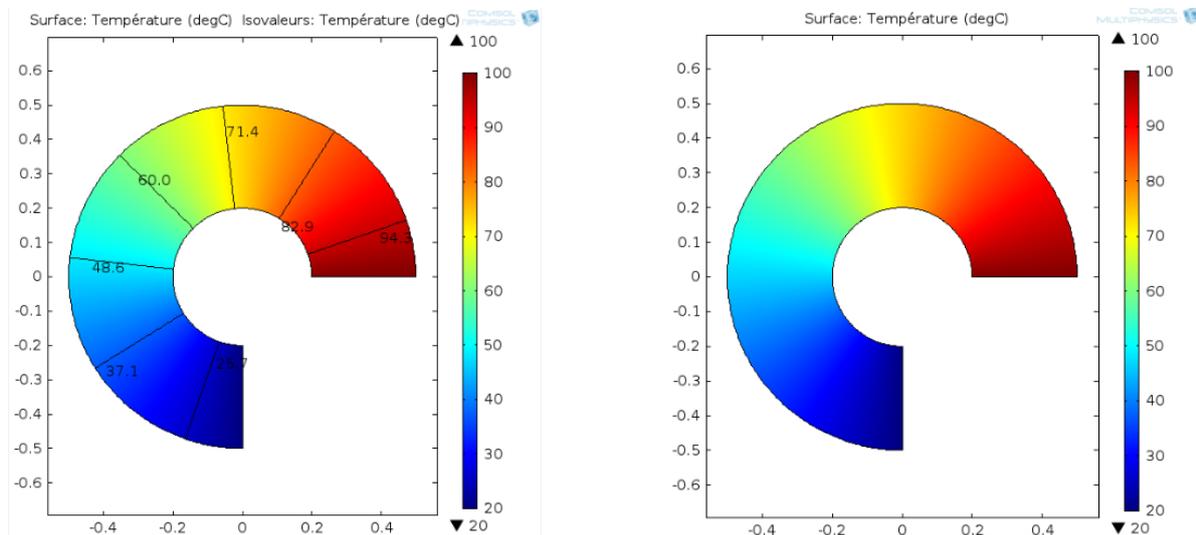
Figure 23. Le maillage et les isothermes avec condition aux limites Dirichlet et Neumann(5x30)

- Les résultats obtenus avec (15x90)



MATLAB(a)

MATLAB (b)



COMSOL(c)

COMSOL (d)

Figure 24. La distribution et les isothermes de la température avec condition aux limite Dirichlet et Neumann (15x90)

- Les résultats obtenus avec (25x150)

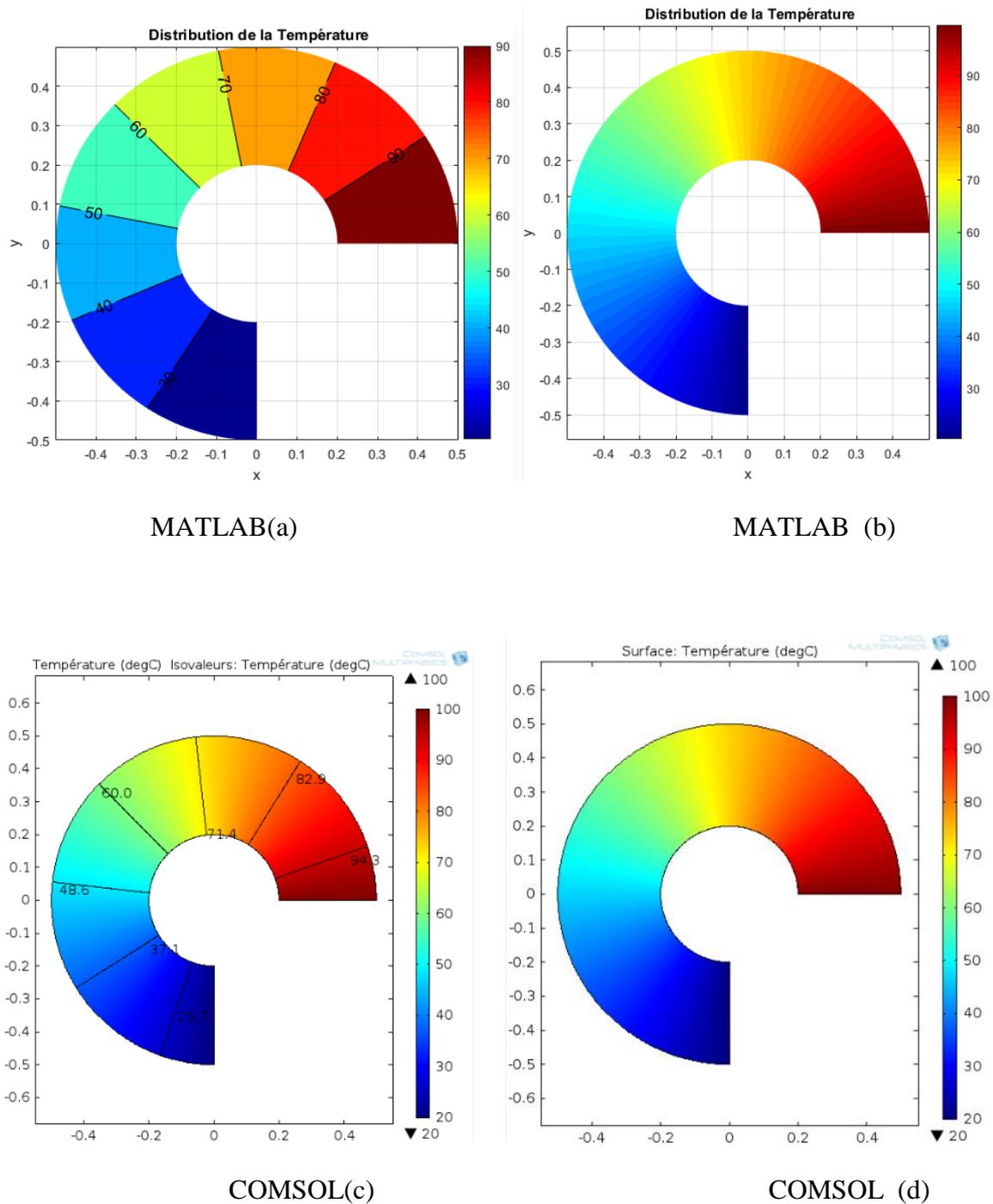


Figure 25. La distribution et les isothermes de la température avec condition aux limites Dirichlet et Neumann (25x150)

Discussions :

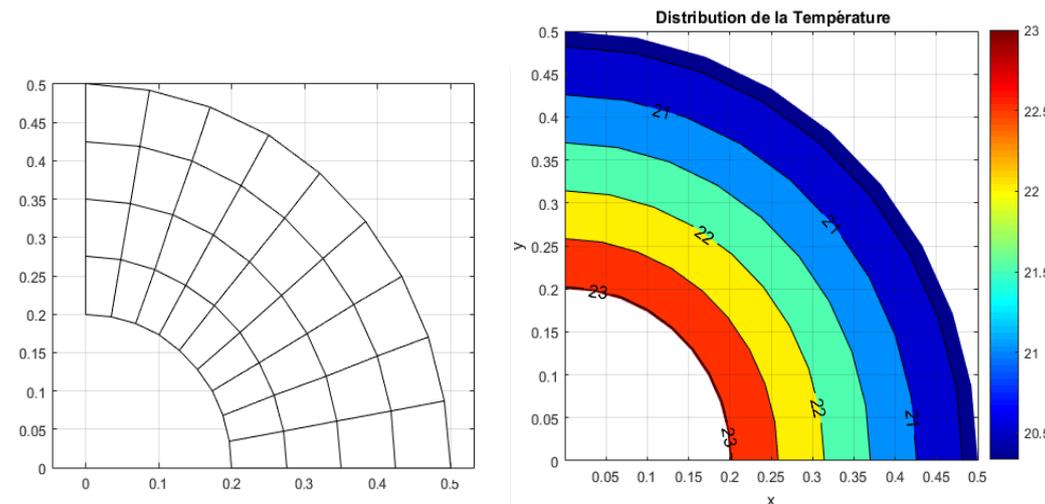
Les figures 23,24et 25 représentent la comparaison des résultats numériques entre le code de calcul MATLAB et COMSOL dans les conditions aux limite Dirichlet et Neumann, on remarque aussi des résultats similaires même par un maillage grossier, en revanche, on remarque une variation entre les résultats obtenus par les deux codes.

Une certaine instabilité par rapport au COMSOL, est très remarquée dans les cas des isothermes, cette instabilité disparaît pour un maillage plus fin.

(iii). *Troisième cas : un car d'annulaire*

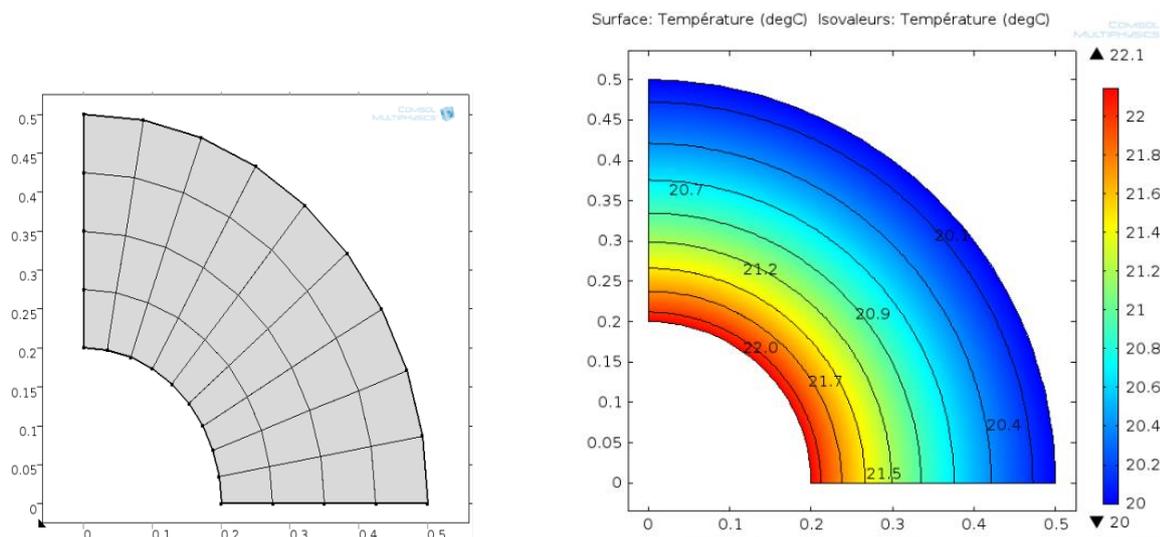
Dans troisième cas on a discrétisé avec conditions aux limites mixte mais ici de type Dirichlet, Neumann et Robin

- Les résultats obtenus (5x10)



MATLAB(a)

MATLAB (b)

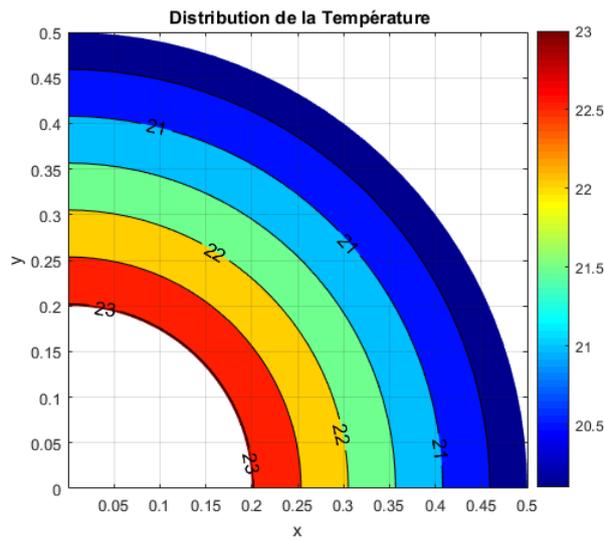


COMSOL (c)

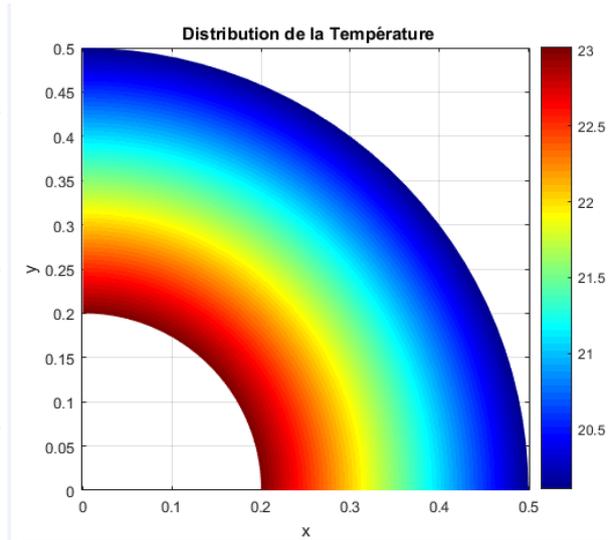
COMSOL (d)

Figure 26. Le maillage et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet, Neumann et Robin (5x10) méthode TDMA

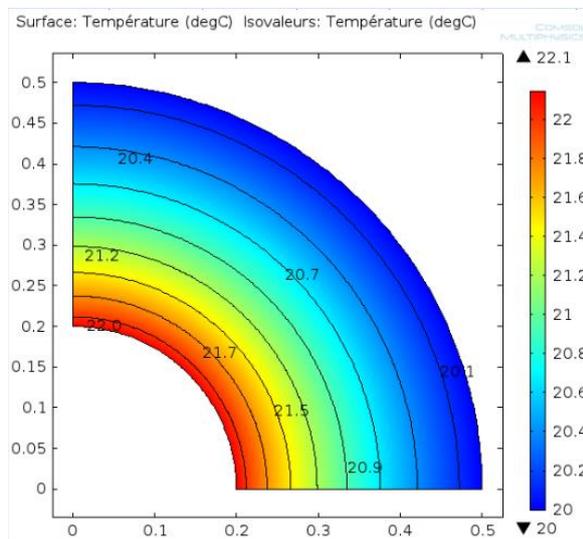
- .les résultats obtenus avec (15x30) :



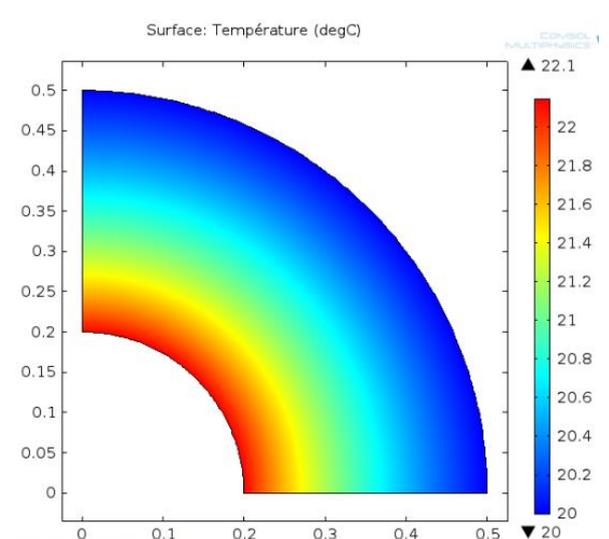
MATLAB (a)



MATLAB (b)



COMSOL (c)



COMSOL (d)

Figure 27. la distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet, Neumann et Robin (15x30)

- Les résultats obtenus avec (25x50) :

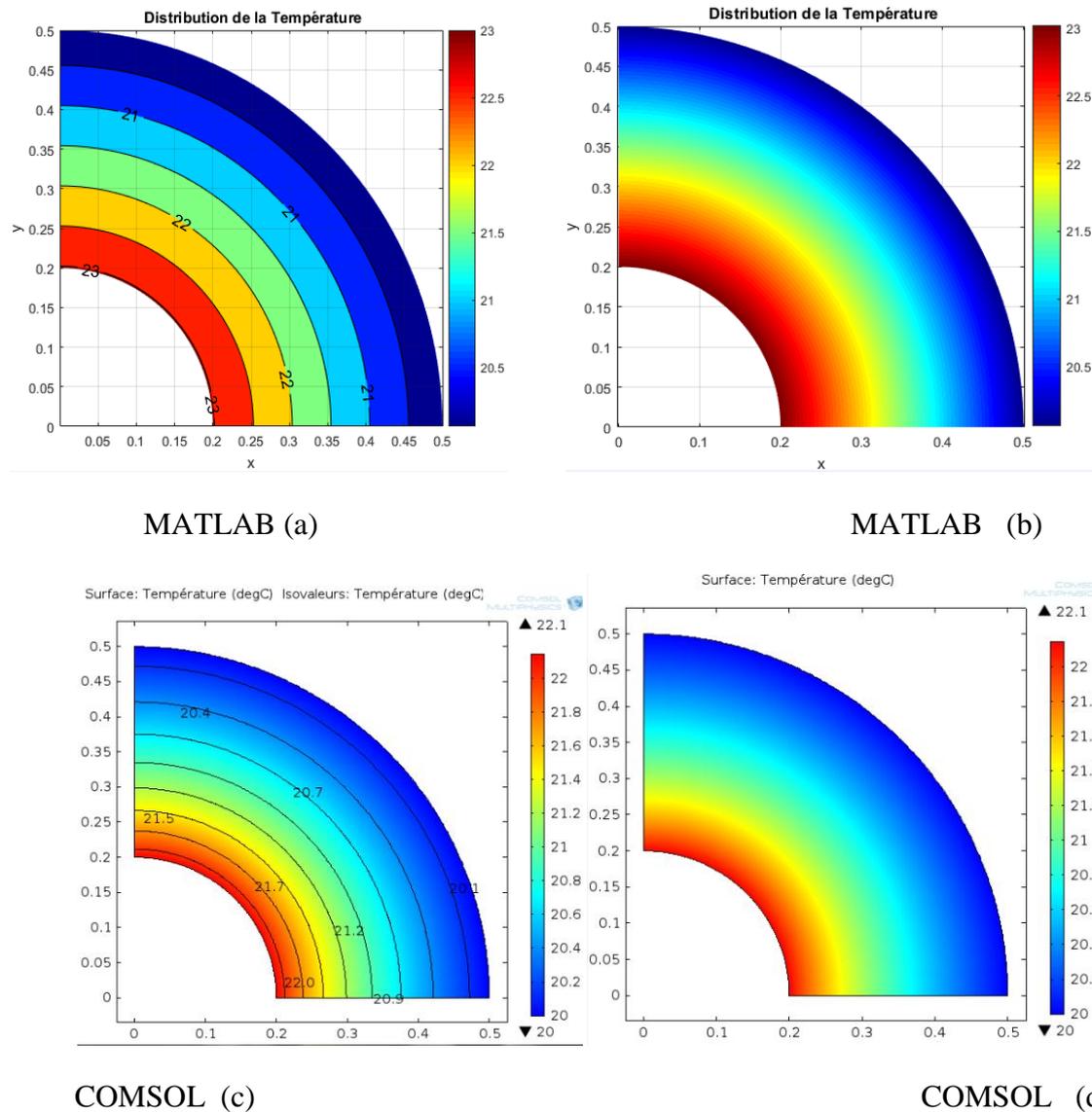


Figure 28. La distribution et les isothermes de la température avec les conditions aux limites Dirichlet, Neumann et Robin (25x50)

Discussion :

Les figures 26, 27 et 28 représente la comparaison des résultats numériques entre le code de calcul MATLAB et COMSOL dans la condition au limite Dirichlet Neumann et Robin, on remarque aussi dans ce cas une variation entre les résultats obtenus entre les deux codes.

Une certaine instabilité par rapport au COMSOL, elle très remarque dans les cas des isothermes, cette instabilité disparaît pour un maillage plus fin.

(iv). *Les méthodes de résolution de la matrice :*

Lors de la discrétisations de l'équation de la chaleur par la méthode MVF on a obtenue une matrice creuse tridiagonal, cette matrice est généralement résolu par la méthode TDMA, mais

on a voulu la résoudre des autres méthodes classique utilisé pour les matrices plaines, pour voir la rapidité de l'exécution du code, par ces méthodes :

- Gauss- Seidel Sans relaxation
- Gauss- Seidel avec relaxation
- Jacobi

Et pour connaître plus d'informations sur ces méthodes vous pouvez voir les annexes, pages (pp 79 82).

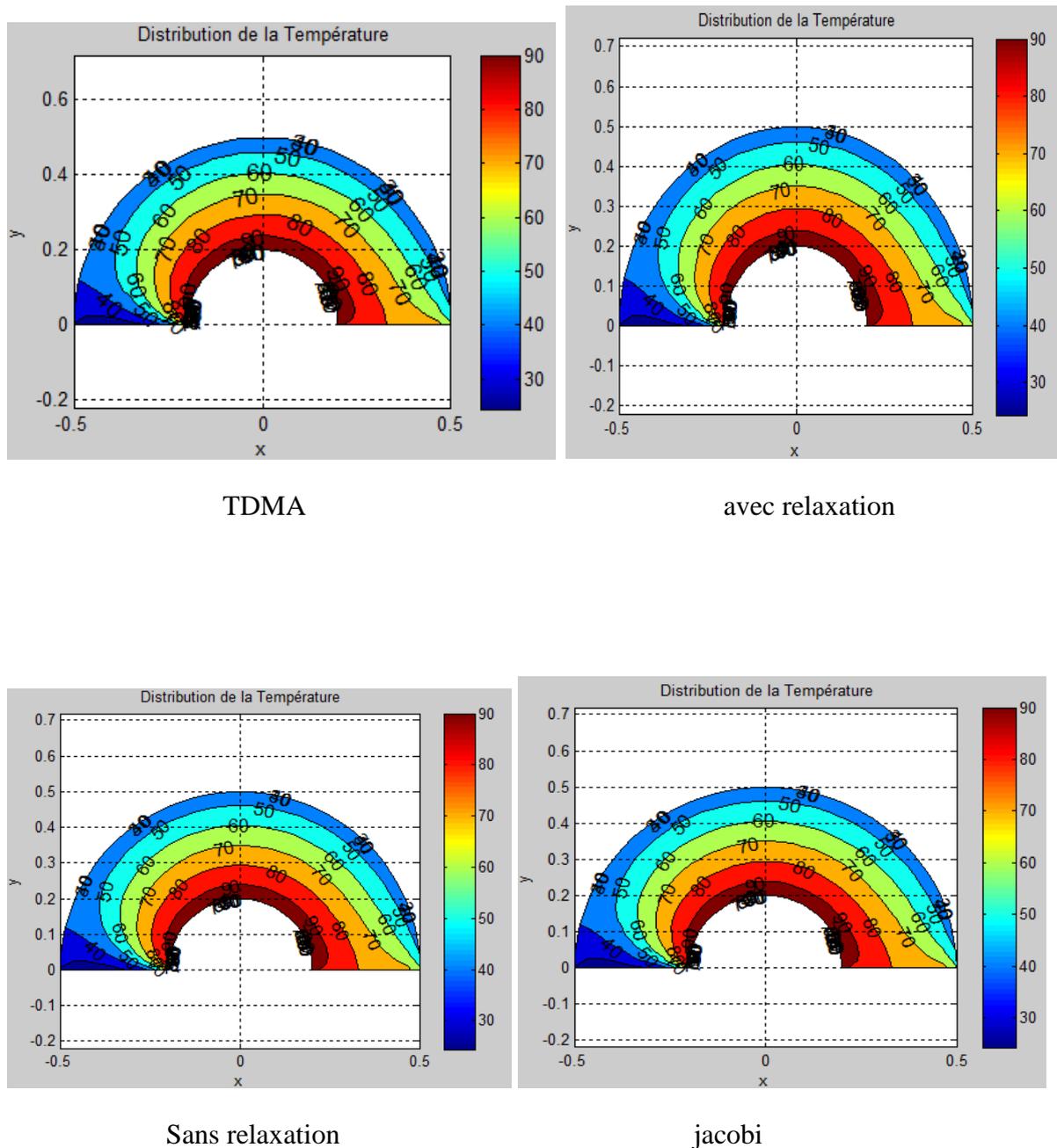


Figure 29. Les isothermes de la température avec condition aux limites Dirichlet par les trois méthodes

Discussions

La figure 29 représente Les isothermes de la température avec condition aux limites Dirichlet par les trois méthodes, on remarque des résultats similaires, on voit la différence entre les résultats exécuté au niveau du nombre d'itération (temps d'exécution)

a). Tableau de comparaison des itérations entre les quatre méthodes

tolérance	itérations	TDMA	GSSR	GSR	Jacobi
1×10^{-5}	10x40	29664	29664	29668	29668
1×10^{-5}	15x60	34806	34808	34816	34816
1×10^{-5}	25x100	39178	39186	39206	39204

Tableau 5. Tableau de comparaison des itérations entre les quatre méthodes

Discussions

Le tableau 1 représente la comparaison des itérations entre les trois méthodes, on ne remarque pas une grande variation des itérations dans les différents maillages utilisés.

La méthode la plus fiable reste la méthode de Thomas (TDMA), surtout pour les matrices creuses.

Conclusion :

On utilisant plusieurs techniques de résolution de la matrice creuse tri diagonale, on a constaté que les résultats n'étaient pas vraiment différents les uns des autres, sans oublier de dire que la méthode TDMA est la plus efficace.

VI. Conclusion générale

A travers cette memoire, on s'est intéressé à l'étude de la résolution de la conduction 2D dans une demi-couronne. Les équations élaborées par le modèle mathématique a été résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Les conditions aux frontières sont de type Dirichlet, Neumann et Robin. Nous avons utilisé plusieurs méthodes numériques pour la résolution de la matrice obtenue, on cite : TDMA, GAUSS-SEIDEL, GAUSS-SEIDEL avec RELAXATION et JACOBI.

Les résultats obtenus avec le code de calcule élaborer par MATLAB , ont été écrit en utilisant la méthode des volumes finis, qui est une méthode conservatrice, on a pu déterminer les distributions des températures, les isothermes, la solution numérique de l'équation de la chaleur. La validation était faite avec un code CFD connu (Comsol), basé sur la méthode des éléments finis, on a comparé nos résultats pour différent maillage, en utilisant différente méthodes de résolution de la matrice tri diagonal. On a remarqué que les résultats obtenus étaient très satisfaisantes.

Devant l'importance de ce sujet d'avenir qui représente On peut utiliser notre cas d'étude dans les pertes de chaleur dans les canalisations munie d'un calorifuge, et pour l'optimisation de l'épaisseur du calorifuge (isolants). Et même dans le cas des câbles électriques avec isolations.

Références bibliographiques

- [1] [1] P. Naphon and S. Wongwiset, “A review of flow and heat transfer characteristics in curved tubes,” vol. 10, pp. 463–490, 2006.
- [2] A. Grine, J. Y. Desmons, and S. Harmand, “Models for transient conduction in a flat plate subjected to a variable heat flux,” vol. 27, pp. 492–500, 2007.
- [3] H. Z. Alibaba and M. B. Ozdeniz, “Energy Performance and Thermal Comfort of Double-Skin and Single-Skin Facades in Warm-Climate Offices,” no. September, pp. 635–642, 2016.
- [4] Q. Xue, X. F. Xiao, and N. Z. Fan, “Heat Conduction Equation Finite Volume Method to Achieve on MATLAB,” *Mech. Eng. Intell. Syst. Pts 1 2*, vol. 195–196, pp. 712–717, 2012.
- [5] P. Lyra and R. Lima, “An axisymmetric finite volume formulation for the solution of heat conduction problems using unstructured meshes,” *J. Brazilian ...*, vol. XXVII, no. 4, pp. 407–414, 2005.
- [6] D. V. Nance, “Finite Volume Algorithms for Heat Conduction,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 39, no. DECEMBER 2009, pp. 286–293, 2010.
- [7] M. Hasnat, N. Kaid, and M. Bensafi, “A numerical Technique Finite Volume Method for Solving Diffusion 2D Problem,” *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 4, no. 10, pp. 35–41, 2015.
- [8] M. Lobaugh, “Using Excel to Implement the Finite Difference Method for 2-D Heat Transfer in a Mechanical Engineering Technology Course Using Excel to Implement the Finite Difference Method for 2-D Heat Transfer in a Mechanical Engineering Technology Course,” 2014.
- [9] R. Morasata and K. M. Güleren, “Solution of the Two-Dimensional Steady State Heat Conduction using the Finite Volume Method,” *Ninth Int. Conf. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 0, pp. 1–7, 2016.
- [10] M. Daniel, *Numerical Modeling of a Thermal-Hydraulic Loop and Test Section Design for Heat Transfer Studies in Supercritical Fluids*, no. May. 2011.
- [11] “ACME---UK 2016 24 Conference on Computational Mechanics,” 2016.
- [12] R. V. Padilla and D. Yogi Goswami, “Simplified Methodology for Designing Parabolic Trough Solar Power Plants,” *Chem. Eng.*, vol. Ph.D., 2011.

- [13] A. Fourmigue, “Méthodes de calcul numérique pour la simulation thermique des circuits intégrés,” 2014.
- [14] U. Des, F. Mentouri, P. Abdel, and H. Djekoune, “09-10-11 Novembre 2015,” 2015.
- [15] T. Blomberg, *HEAT CONDUCTION Computer Modelling of Building Physics Applications*, no. May. 1996.
- [16] C. Belloni, “Hydrodynamics of Ducted and Open-Centre Tidal Turbines,” p. 230, 2013.
- [17] B. Mohammed and B. Ahmed, “Estimation de fonctions en conduction inverse.”
- [18] R. Algerienne *et al.*, “Présentée par,” 2008.
- [19] B. Benyoucef, T. Benouaz, A. Zerga, R. Saim, and S. M. A. Bekkouche, “Présenté à Etude et Effet de l ’ Orientation de deux Pièces d ’ un Habitat en Pierre Situé à Ghardaïa Etude et Effet de l ’ Orientation de deux Pièces.”
- [20] C. Biblioth, “bibliothèque,” 1993.
- [21] “Dédicaces,” 2012.
- [22] F. Des *et al.*, “Etude de l ’ échange thermique dans une cavité rectangulaire avec deux côtés partiellement actifs,” 2011.
- [23] M. D. E. L. Enseignement, S. Et, R. Scientifique, and O. Thermo-fluides, “Etude du transfert de chaleur a travers une ailette verticale.”
- [24] U. Kasdi and M. Ouargla, “Dédicaces,” 2015.
- [25] J and Brau, “Conduction - - 53 - - ©,” pp. 53–92, 2006.
- [26] D. W. Hahn and M. N. Özışık, *Heat conduction*. 2012.
- [27] J. Battaglia, *Introduction Thermiques*. .
- [28] L. U. A. Belkaid-tlemcen and S. Département, “Magister Comparaison Entre l ’ Isolation Thermique Extérieure et Intérieure d ’ une pièce D ’ un Habitat Situé Dans Le Site De.”
- [29] UniversitéHLBatna, “METHOADPESLINQUUMESRIQUES.L.MESSAOUDI.”
- [30] G. Methodology, “Finite-Volume Methods,” vol. M.
- [31] E. Blayo, “M1 MAI Eric Blayo Janvier 2010,” 2010.

Annexe :

Annexe A

Code MATLAB :

MATLAB est un langage de développement informatique particulièrement dédié aux applications scientifiques. Il est utilisé pour développer des solutions nécessitant une très grande puissance de calcul.

MATLAB permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs.

Exemple de calcul des coefficients des nœuds Nord dans le code MATLAB :

```
%---noeud-----NE---20
aw(nx,ny)=kw*dR/(RI(nx,ny)*dTheta);
ae(nx,ny)=0.;
as(nx,ny)=ks*RI(nx,ny)*dTheta/dR;
an(nx,ny)=0.;
Sp(nx,ny)=-(2*ke*dR/(RI(nx,ny)*dTheta)+2*kn*RI(nx,ny)*dTheta/dR);
Su(nx,ny)=2*ke*dR/(RI(nx,ny)*dTheta)*TC+2*kn*RI(nx,ny)*dTheta/dR*TB;
ap(nx,ny)=ae(nx,ny)+an(nx,ny)+aw(nx,ny)+as(nx,ny)-Sp(nx,ny);
a(nx)=-aw(nx,ny);
b(nx)=ap(nx,ny);
c(nx)=-ae(nx,ny);
d(nx)=Su(nx,ny)+as(nx,ny)*Told(nx,ny-1);
erreur=erreur+abs(aw(nx,ny)*T(nx-1,ny)+as(nx,ny)*T(nx,ny-1)+Su(nx,ny)-ap(nx,ny)*T(nx,ny));
Frp = Frp + abs(ap(nx,ny)*T(nx,ny));
%-----TDMA-----
T(:,ny)=MyTDMA(a,b,c,d);
```

Annexe B

L'algorithme de thomas TDMA :

En algèbre linéaire numérique, l'algorithme matriciel tri diagonal, également connu sous le nom d'algorithme de thomas (nommé d'après Llwellyn Thomas) est une forme simplifiée d'élimination gaussienne qui peut être utilisée pour résoudre des systèmes d'équations tri diagonales. Un système tri diagonal pour « n » inconnues peut être écrit comme :

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad \text{ou} \quad a_1 = 0 \quad \text{et} \quad c_n = 0$$

Exemple de TDMA

$$\begin{pmatrix} a_p & -a_e & 0 & 0 \\ -a_w & a_p & -a_e & 0 \\ 0 & -a_w & a_p & -a_e \\ 0 & 0 & -a_e & a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{u1} \\ S_{u2} \\ S_{u3} \\ S_{u4} \end{pmatrix}$$

Algorithme :

```
function phi =MYTDMA (a,b,c,d)
nx=length (a);
for k=2:nx
    m=a(k)/b(k-1);
    b(k)=b(k)-m*c(k-1);
    d(k)=d(k)-m*d(k-1);
end
phi(nx)=d(nx)/b(nx);

%...phase de substitution en arriere...%
for k=nx-1:-1:1
    phi(k)=(d(k)-c(k)*phi(k+1))/b(k);
end
```

Annexe C

Méthode de Jacobi : la méthode de Jacobi due au mathématicien allemand Karl Jacobi est une méthode itérative de résolution d'un système linéaire $Ax = b$ ou A est une matrice $n \times n$ et x, b sont des vecteurs de R^n . pour cela on utilise une suite $x^{(k)}$ qui converge vers un point fixe x solution du système d'équations linéaires. Elle consiste en la manipulation suivante :

on décompose A comme $A=D-E-F$, $\begin{pmatrix} & -F \\ D & \\ -E & \end{pmatrix}$

On peut alors transformer le système en

$$Ax = b \Leftrightarrow Dx - (E + F)x = b \Leftrightarrow x = D^{-1}(E + F)x + D^{-1}b$$

On définit ensuite une suite de vecteur (x^k) par la formule :

$$x^{k+1} = D^{-1}(E + F)x^k + D^{-1}b$$

Exemple :

$$\begin{cases} -2x + y + 5z = 15 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15 - y - z}{-2} \\ y = \frac{-21 - 4x - z}{-8} \\ z = 7 - 4x - y \end{cases}$$

Vecteur initial : $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

1^{er} itération :

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{15 - y^{(0)} - 5z^{(0)}}{-2} = 1.5 \\ y^{(1)} = \frac{-21 - 4x^{(0)} - z^{(0)}}{-8} = 4.5 \\ z^{(1)} = 7 - 4x^{(0)} + y^{(0)} = -2 \end{cases}$$

Exemple de calcul de MATLAB :

```
% Noeud SE (4) %----noeud---4---SE-----
aw(nx,1) = kw*dR / (RI(nx,1)*dTheta);
ae(nx,1) = 0.;
as(nx,1) = 0.;
an(nx,1) = kn*RI(nx,1)*dTheta/dR;
Sp(nx,1) = -(2*ke*dR / (RI(nx,1)*dTheta) + 2*ks*RI(nx,1)*dTheta/dR);
Su(nx,1) = 2*ke*dR / (RI(nx,1)*dTheta)*TC + 2*ks*RI(nx,1)*dTheta/dR*TA;
ap(nx,1) = an(nx,1) + aw(nx,1) + as(nx,1) + ae(nx,1) - Sp(nx,1);
a(nx) = -aw(nx,1);
b(nx) = ap(nx,1);
c(nx) = -ae(nx,1);
d(nx) = Su(nx,1) + an(nx,1)*Told(nx,2);
erreur=erreur+ abs(an(nx,1)*Told(nx,2)+aw(nx,1)*T(nx-1,1)+Su(nx,1)-ap(nx,1)*T(nx,1));
Frp = Frp + abs(ap(nx,1)*T(nx,1));
% JACOBI %%%%%%%%%%
T(nx,1) = (aw(nx,1)*Told(nx-1,1) + an(nx,1)*Told(nx,2) + Su(nx,1))/ap(nx,1);
```

Annexe D

Méthode de Gauss-Seidel :

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative de résolution d'un système linéaire (de dimension finie, de la forme $Ax = b$, ce qui signifie qu'elle génère une suite qui converge vers

une solution de cette équation, lorsque des conditions de convergence sont satisfaites. L'algorithme suppose que la diagonale de A est formée d'éléments non nuls.

Exemple

$$\begin{cases} -2x + y + 5z = 15 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15 - y - 5z}{-2} \\ y = \frac{-21 - 4x - z}{-8} \\ z = \frac{7 - 4x - y}{1} \end{cases}$$

Vecteur initiale $x^{(0)} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

1^{er} itérations :

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{15 - y^{(0)} - 5z^{(0)}}{-2} = 1.5 \\ y^{(1)} = \frac{-21 - 4x^{(1)} - z^{(0)}}{-8} = 3.75 \\ z^{(1)} = 7 - 4x^{(1)} + y^{(1)} = 4 \end{cases}$$

Exemple de calcul par MATLAB :

```
aw(1,1)=0.;
ae(1,1)=ke*dR/(RI(1,1)*dTheta);
as(1,1)=0.;
an(1,1)=kn*RI(1,1)*dTheta/dR;
Sp(1,1)=-(2*kw*dR/(RI(1,1)*dTheta) + 2*ks*RI(1,1)*dTheta/dR);
Su(1,1)= 2*kw*dR/(RI(1,1)*dTheta)*TD + 2*ks*RI(1,1)*dTheta/dR*TA;
ap(1,1)= ae(1,1)+ an(1,1)+ aw(1,1)+ as(1,1)- Sp(1,1);
a(1)=-aw(1,1);
b(1)= ap(1,1);
c(1)=-ae(1,1);
d(1)= Su(1,1) + an(1,1)*Told(1,2);
erreur = erreur + abs(ae(1,1)*Told(2,1)+an(1,1)*Told(1,2)+Su(1,1)-ap(1,1)*T(1,1));
Frp = Frp + abs(ap(1,1)*T(1,1));
% GAUSS-SEIDEL %%%%%%%%%%
T(1,1) = ( ae(1,1) *Told(2,1) + an(1,1)*Told(1,2) + Su(1,1))/ap(1,1);
```

Annexe E

Méthode de relaxation de Gauss-Seidel : est une méthode itérative pour résoudre les systèmes linéaires $Ax = b$ ou A est une matrice $n \times n$, x et b sont des vecteurs de R^n , elle

consiste en la manipulation suivante : on décompose A comme $A = D - F - E$ ou D est une matrice diagonale $-E$ est une matrice triangulaire inférieure et $-F$ supérieure.

$$\begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

Soit ω un nombre réel non nul, appelé paramètre de la méthode relaxation.

La méthode de la relaxation consiste à écrire le système sous la forme

$$Ax = b \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)x + \left(\frac{\omega-1}{\omega}D - F\right)x = b \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)x = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)x + b$$

Puis à définir une suite de vecteur (x^k) par la formule suivante :

$$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)x^{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)x^k + b$$

On espère alors que la suite (x^k) converge vers une solution de $Ax = b$. Par exemple si A est une matrice tri-diagonal et définit positive, et si $0 \leq \omega \leq 2$ alors la suite (x^k) converge effectivement vers l'unique solution de $Ax = b$.

Lorsque $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gausse –Seidel.

Exemple de calcul de MATLAB :

```
for i=2:nx-1 %----noeuds---2---3-----
    aw(i,1)= kw*dR/(RI(i,1)*dTheta);
    ae(i,1)= ke*dR/(RI(i,1)*dTheta);
    as(i,1)= 0.;
    an(i,1)= kn*RI(i,1)*dTheta/dR;
    Sp(i,1)=- (2*ks*RI(i,1)*dTheta/dR);
    Su(i,1)= 2*ks*RI(i,1)*dTheta/dR*TA;
    ap(i,1)= ae(i,1)+ an(i,1)+ aw(i,1)+ as(i,1)- Sp(i,1);
    a(i)   =-aw(i,1);
    b(i)   = ap(i,1);
    c(i)   =-ae(i,1);
    d(i)   = Su(i,1) + an(i,1)*Told(i,2);
    erreur=erreur + abs(ae(i,1)*Told(i+1,1)+an(i,1)*Told(i,2)+aw(i,1)*T(i-1,1)+Su(i,1)-ap(i,1)*T(i,1));
    Frp = Frp + abs(ap(i,1)*T(i,1));
    % GAUSS-SEIDEL %%%%%%%%%%
    T(i,1) = omega*( aw(i,1) *T(i-1,1) + ae(i,1)*Told(i+1,1) + an(i,1)*Told(i,2)+ Su(i,1))/ap(i,1)...
    +(1-omega)*T(i,1) ;
end
```

Résumé : Une méthode numérique de volume fini avec un maillage structuré, des coordonnées polaire et différents conditions aux limites, pour résoudre la conduction 2D dans une demi-couronne en utilisant le langage MATLAB comme outil de programmation a été adopté.

Les résultats obtenus avec MATLAB sont comparés avec COMSOL, et ont permis de déterminer la distribution de la température et la solution numérique de l'équation de la chaleur.

Mots-clés : Volumes finis, Conduction thermique, MATLAB, Comsol, coordonnées polaires, simulation.

ملخص

طريقة عددية للحجوم المحدودة مع شبكة هيكلية ، إحدائيات قطبية وظروف حدية مختلفة ، لحل توصيل ثنائي الأبعاد في نصف التاج باستخدام لغة ماتلاب كأداة برمجة، قد أستعملت. لقد تم مقارنة النتائج المتحصل عليها بالماتلاب و الكومسول ، مما سمح بتحديد توزيع درجة الحرارة والحل العددي لمعادلة الحرارة.

الكلمات المفتاحية: الحجوم المحدودة ، النقل الحراري ، ماتلاب ، كومسول، الاحدائيات القطبية، محاكاة.

Summary:

A numerical method of finite volume with a structured mesh, polar coordinates and different boundary conditions, to solve the 2D conduction in a half-crown using the MATLAB language as a programming tool, was adopted.

The results obtained with MATLAB are compared with COMSOL, and allowed to determine the temperature distribution and the numerical solution of the heat equation.

Keywords: Finite volumes, Thermal conduction, MATLAB, Comsol, polar coordinates, simulation