

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE « SALHI AHMED » DE NAAMA



INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE TECHNOLOGIE

MEMOIRE DEMASTER

Spécialité : **Génie Mécanique**

Option : **Energétique**

Intitulé de Mémoire

Etude des vibrations thermomécaniques des panneaux solaires sur appuis élastiques

Présenté par : Melle AOUISSAT OUAFAA

Soutenu Le Dimanche 05/06/2016 devant les membres de jury

M BASSNOUSSI Zakaria	MC	CU Naama	Préside
M KHATIR Tawfiq	MC	CU Naama	Examinaeur
M BELABED Zakaria	MCB	CU Naama	Encadreur

Année Universitaire 2017-2018

Remerciements

En cette journée mémorable, je tiens à remercier des êtres chers qui ont marqué mon parcours étudiant. D'élève, collégienne, lycéenne et étudiante.

En hommage à ma grande mère paternelle cette généreuse femme aimante qui a bercé ma tendre enfance m'inculquant persévérance et sérieux dans le travail et la vie quotidienne.

Je remercie mon père et ma mère ces personnes si chères et si tendres qui ont tout fait pour que je réussisse, présentes à tout moment tantôt reconfortantes tantôt confidentes.

A mes frères et sœurs qui me vouaient respect et admiration.

A mes professeurs qui n'ont ménagé aucun effort pour assouvir ma curiosité du savoir et des connaissances.

A mes encadreurs qui m'orientaient et m'aidaient pour l'élaboration de ce précieux outil de travail.

A mes cousins et cousines qui partageaient parfois mes craintes et mes soucis, mon bonheur de réussite présentes et absentes je leur dirai merci.

A mes amis étudiants et étudiantes à tous ceux qui ont contribué à la réussite de cette journée qui met fin à notre vie étudiante et nous projette vers un avenir que nous espérons digne de nos attentes et de tous nos sacrifices.

Merci à tous et à toutes.

A ma mère et mon père

Ils sont là assis devant moi, me regardant. Ils savourent leur pari gagné. A travers leurs lunettes je vois leurs yeux pétillants de bonheur.

Ils se disent : « notre fille a réussi ses études merci mon dieu »

Mon bonheur est partagé mes parents savourent leur victoire c'est ce que je ressens. Que dire de plus si ce n'est l'émotion et la confusion qui me gagnent.

Je leur dirai : « pardonnez moi mes chers parents c'est à ce moment là de bonheur et de réussite que je ressens l'immense amour que vous me portiez .

Merci

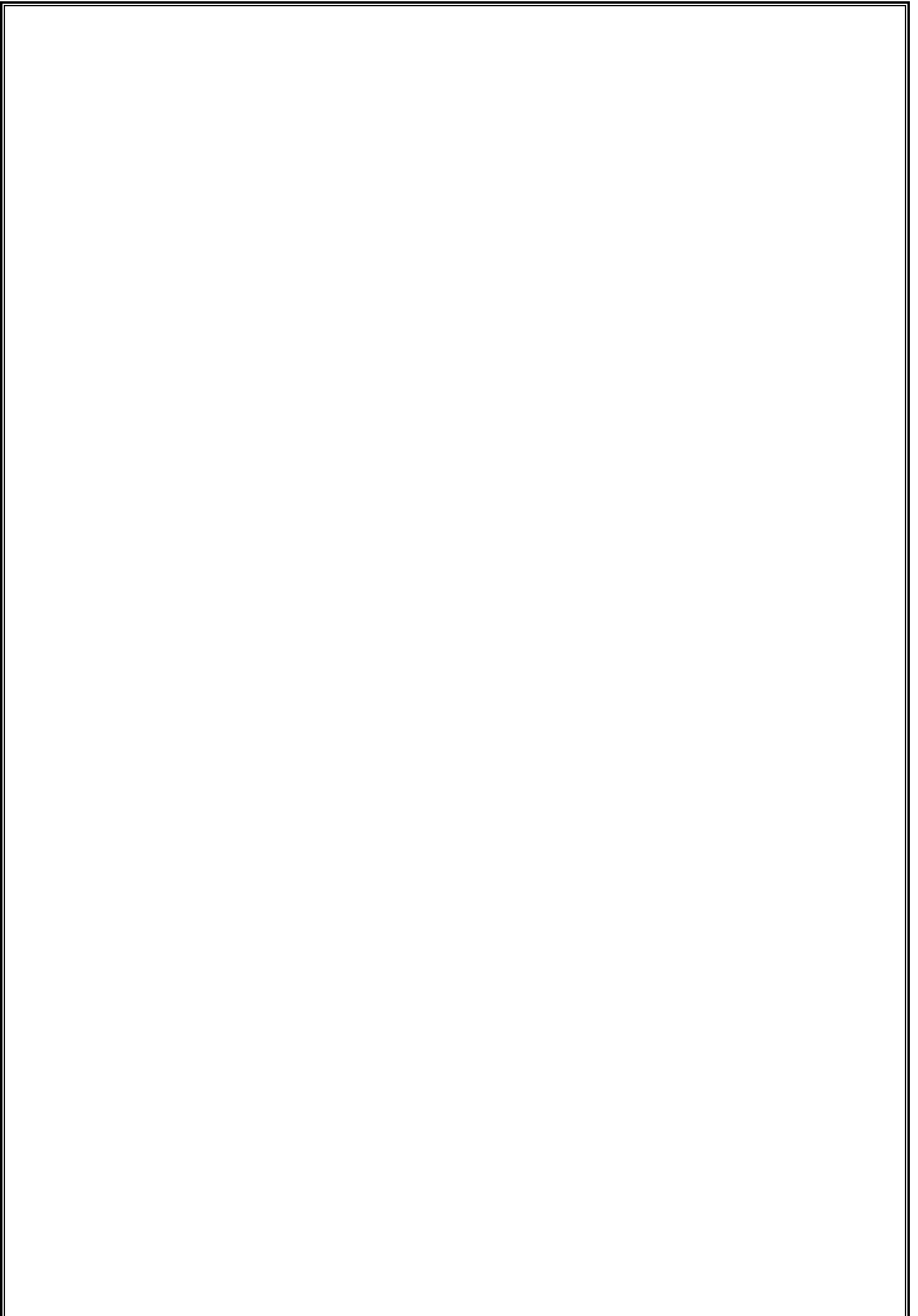


Table des matières

Résumé.....	i
Table des matières	iv
Liste des tableaux.....	vi
Liste des figures	viii
Liste des notations.....	ix

1 Introduction Générale :

1.1) Introduction et problématique.....	01
2.2) Méthodologie	02
2.3) Organisation de Mémoire	02

Chapitre I : Revue sur l'utilisation des matériaux non-homogènes dans le Domaine Thermique et Energétique.

I) Généralités sur les matériaux composites.....	03
I.1) Définition.....	03
I.2) Classification des matériaux composites.....	04
I.2.1) Classification suivant la forme des constituants.....	04
I.2.2) Classification suivant la nature des constituants.....	05
I.3) Composants.....	06
I.3.1) Matrice.....	06
I.3.1.1) Résines thermodurcissables.....	07
I.3.1.2) Résines thermoplastiques.....	07
I.3.1.3) Additifs.....	08
I.3.2) Renforts.....	08
I.3.2.1) Fibres de verre.....	08
I.3.2.2) Fibres de carbone.....	08

I.3.2.3	Fibres aramides.....	09
I.3.2.4	Fibres céramiques.....	09
I.3.2.5	Caractéristiques mécaniques des fibres.....	09
I.4)	Les matières composites structuraux.....	10
I.4.1)	Monocouches.....	10
I.4.2)	Stratifiés.....	10
I.4.3)	Matériaux sandwichs.....	11
I.5)	Généralités sur les panneaux solaires.....	12
I.5.1)	Historique.....	12
I.5.2)	Principe de fonctionnement.....	12
I.5.3)	Technologies des cellules solaires.....	13
I.5.4)	Les type des panneaux solaires.....	13
I.6)	Généralité sur les matériaux a gradient propriété.....	14
I.6.1)	Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	14
I.6.2)	Caractéristiques matérielles des FGMs.....	15
I.6.3)	Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués.....	16
I.6.4)	Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.....	16
I.6.5)	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM.....	17
I.6.5.1)	Loi de puissance P-FGM.....	18
I.7)	Conclusion	19

Chapitre II : Formulation théorique sur les problèmes des vibrations

Thermomécaniques des panneaux solaires.

II.1)	Introduction.....	20
II.2)	Formulation théorique	21
II.2.1)	Champ des déplacements	21

II.2.2) Lois de comportement élastique.....	22
II.2.3) Équations du mouvement.....	23
II.2.3.a) Variation de l'énergie de déformation	23
II.2.3.b) Variation de l'énergie de la fondation élastique.....	24
II.2.3.c) Expression du travail des efforts extérieurs	24
II.2.3.d) Variation de l'énergie cinétique.....	25
II.2.4) Résumé des relations fondamentales du mouvement	27
II.2.5) Les équations de mouvement en termes de déplacement.....	30
II.3) Solution Analytique	31
II.4) Conclusion.....	32

Chapitre III : Résultats numériques et discussion.

III.1) Introduction.....	33
III.2) Etude vibratoire des plaques minces en FGM	34
III.3) Etude des vibrations thermomécaniques des plaques minces en FGM	35
III.4) Etude des vibrations thermomécaniques des plaques minces en FGM sur appuis élastiques	39
III.5) Conclusion	42

2 Conclusion et Recommandations.

2.1) Introduction	43
2.2) Remarques et conclusions	43
2.3) Recommandations pour des travaux futurs	44
Références Bibliographiques	45

Liste des Tableaux

N°	Titre	Page
I.1	Caractéristique des matériaux composites.	04
I.2	Caractéristiques des résines thermodurcissables.	07
I.3	Caractéristiques des résines thermoplastiques.	07
I.4	Caractéristiques mécaniques des fibres.	10
III.1	Caractéristiques des matériaux utilisés.	33
III.2	La première fréquence en fonction de la série (n,m) des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h.	34
III.3	Les trois premières fréquences des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h.	34
III.4	Les trois premières fréquences des plaques en P-FGM en fonction du ratio d'allongement a/b avec h=100.	35
III.5	La première fréquence en fonction de la série (n,m) des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h $T_1=100$ et $T_2=0$.	36
III.6	Les trois premières fréquences des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h $T_1=100$ et $T_2=0$.	36
III.7	Les trois premières fréquences des plaques en P-FGM en fonction du ratio d'allongement a/b avec h=100 $T_1=100$ et $T_2=0$.	37
III.8	La première fréquence en fonction de la série (n,m) des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h $T_1=100$ et $T_2=100$.	38
III.9	Les trois premières fréquences des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h $T_1=100$ et $T_2=100$.	38
III.10	Les trois premières fréquences des plaques en P-FGM en fonction du ratio d'allongement a/b avec h=100 $T_1=100$ et $T_2=100$.	39
III.11	L'effet de l'indice matériel et la fondation élastique sur la fréquence fondamentale d'une plaque en P-FGM avec (a/h=100) $T_1=T_2=0$.	40
III.12	L'effet de l'indice matériel et la fondation élastique sur la fréquence fondamentale d'une plaque en P-FGM avec (a/h=100) $T_1=100$ et $T_2=0$.	40
III.13	L'effet de l'indice matériel et la fondation élastique sur la fréquence fondamentale d'une plaque en P-FGM avec (a/h=100) $T_1=100$ et $T_2=100$.	41

Liste des Figures

N°	Titre	Page
I.1	<i>matériaux composites.</i>	03
I.2	<i>Type de matrice.</i>	06
I.3	<i>Types de renfort</i>	08
I.4	<i>pli unidirectionnelle.</i>	10
I.5	<i>schématisation d'un composite stratifié.</i>	11
I.6	<i>schéma d'un sandwich.</i>	11
I.7	<i>principe de fonctionnement de la cellule solaire.</i>	13
I.8	<i>Schéma d'une microstructure graduée continue avec les constituants céramique-métal.</i>	14
I.9	<i>Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel :a) première approche; b) deuxième approche.</i>	15
I.10	<i>les domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés.</i>	16
I.11	<i>Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les Matériaux composites conventionnels.</i>	17
I.12	<i>Géométrie et dimension d'une plaque FGM.</i>	17
I.13	<i>variation du module de Young dans une plaque P-FGM.</i>	18
II.1	<i>Cinématique de Love-Kirchhoff.</i>	21
II.2	<i>plaque FGM (1) appuyée sur fondation élastique transversale (2) et de cisaillement (3).</i>	24
II.3	<i>Présentation des conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée.</i>	29
III.1	<i>Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction de la rigidité élastique transversale K_w et $K_s=100$.</i>	41
III.2	<i>Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction de la rigidité élastique de cisaillement K_s et $K_w=100$.</i>	42

Notations

Symboles :

1,2, 3 : les axes des coordonnées locales

\int : Intégrale

$[]$: Matrice

$\{ \}$: Vecteur

df: dérivée de la fonction f

$f_{,x}$: dérivée de la fonction f par rapport à x

\sum : somme

3D : tridimensionnelle

2D : bidimensionnelle

Minuscules romaines :

$f(z)$: la fonction de cisaillement

$g(z)$: dérivée de la fonction de cisaillement

x ,y,z : les axes de coordonnées cartésiennes

a, b : dimensions de la plaque

h : épaisseur de la plaque

k : l'indice de la variation matériel

u,v,w : composantes de déplacement

$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$: Composantes des dérivées de déplacement par rapport le temps

w_b : composante de déplacement de flexion

w_s : composante de déplacement de cisaillement

q : charge répartie

t : temps

k^b : la courbure due à la flexion

k^s : la courbure due au cisaillement

d_{ij} , d_{ji} et d_{ijm} les opérateurs différentiels

Majuscules romaines :

FGM : en anglais « Functionally Graded Materials ».

P.V.D : en anglais « Powder Vapor Deposition »

C.V.D : en anglais « Chemical Vapor Deposition »

S.H.S : en anglais « Self-propagating High-temperature Synthesis »

C_{ij} : Matrice élastique de Houke

U : énergie de déformation

V : travail des efforts extérieurs

K : énergie cinétique

$E(z)$: Module de Young à travers l'épaisseur en fonction de (z)

E_0 : Module de Young de la face homogène.

E_m : Module de Young de la céramique.

E_c : Module de Young du Métal.

V_c : Fraction volumique de la céramique.

$G(z)$: Module de Cisaillement à travers l'épaisseur en fonction de (z)

A : l'aire de la plaque.

C: contour de la plaque

N_x, N_y, N_{xy}, N_z : Efforts normaux dans la plaque

M_x, M_y, M_{xy} : Moments de flexion dans la plaque

M_x, M_y, M_{xy} : Moments de flexion dans la plaque

M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b : Moments supplémentaires dus à la flexion

M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s : Moments supplémentaires dus au cisaillement

S_{xz}, S_{yz} : Efforts tranchants dans la plaque

A, B, D, D^s, B^s, H^s, A^s : les matrices de rigidités de la membrane, couplage membrane/flexion, flexion et de cisaillement.

$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2)$: les inerties massiques

a_{ij} : coefficients de la matrice de rigidité

m_{ij} : coefficient de la matrice masse

Minuscules grecques

σ : Contraintes

ε : Déformations

ν : Coefficient de Poisson

$\mu(z), \lambda(z)$: Coefficients de Lamé.

φ_x, φ_y : rotations d'une normale transversale

φ_z : déformation normale

$\rho(z)$: la masse volumique à travers l'épaisseur en fonction de (z) .

θ_1, θ_2 : composantes de rotation autour les axes x et y respectivement

$\vartheta_{xz}, \vartheta_{yz}$: les déformations en plan .

τ_{xz}, τ_{yz} : contraintes de cisaillement en plan

∂ : dérivée partielle

δ : quantité virtuel

ω, β : fréquences propres

Majuscules grecques :

$\Psi(z)$: fonction de cisaillement (Hyperbolique)

Introduction générale

1.1) Introduction et problématique:

Lorsque les matériaux métalliques conventionnels ont commencé à montrer leurs limites face à une conception de pièces et de machines de plus en plus sophistiquées et soumises à des contraintes de plus en plus complexes, les matériaux composites sont venus apporter quelques solutions à ces limites. Un matériau composite est un matériau généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes dont l'association confère à l'ensemble des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice dans laquelle sont enrobées des particules ou des fibres qu'on appelle « renfort ». Ainsi, des propriétés telles que la rigidité, la résistance à la fatigue, la résistance à la corrosion, la résistance à l'usure, la réduction de poids, et bien d'autres sont améliorées. Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués de couches ont un problème majeur : la discontinuité des propriétés et des contraintes au niveau des interfaces. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délamination dus à la transition brutale de composition, en particulier dans un environnement à haute température.

Les panneaux solaires sont considérés comme des plaques à deux faces : une face en céramique et l'autre métallique. La modélisation de ce type de structures devient l'intérêt principal de plusieurs chercheurs, pour décrire leur comportement réel et la mise en œuvre des techniques adéquates capables de résoudre les problèmes rencontrés vis-à-vis l'impact environnemental (statique, dynamique, thermique, couplages... etc.)

L'importance technologique des plaques en matériaux composites (notamment les stratifiés et les sandwichs) relève à développer des outils d'analyse très sophistiqués par des méthodes rigoureuses et précises pour lesquelles nous renvoyons vers les littératures spécialisées, sur diverses méthodes (analytiques ou/et numériques) et types des problèmes analysés

I.2) Méthodologie :

L'objectif de cette étude est d'appliquer la théorie classique des plaques pour analyser le comportement thermomécanique des panneaux minces en matériaux à gradient de propriétés dites « FGM ».

À la fin, nous présentons les résultats obtenus pour examiner la performance de notre formulation théorique pour les problèmes thermiques et dynamiques (vibration libre). Surtout pour leurs applications dans le domaine de la production de l'électricité à l'aide des panneaux solaires.

I.3) Organisation de Mémoire :

Ce mémoire est organisé en trois (03) chapitres :

Dans **le premier chapitre**, nous présentons une rapide revue sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs historiques, leurs évolutions et les domaines d'utilisation. L'extension vers les matériaux utilisés dans la conception des panneaux solaires est aussi discutée dans ce chapitre

Le chapitre deux concerne la formulation théorique des plaques en FGM basant sur les hypothèses de Kirchhoff-Love en analyse thermique et dynamique, avec l'application du principe de Hamilton pour décrire les équations gouvernantes.

Le chapitre trois est réservé à la validation et l'évaluation de notre modèle présenté dans cette étude, pour plusieurs configurations de plaques en FGM, en analyse thermique et dynamique. Dans un second temps, une étude paramétrique basée sur l'effet de la fondation élastique est présentée à la fin de ce chapitre.

Et la conclusion résume les différentes conclusions obtenues et les recommandations pour des travaux futurs.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux non-homogènes

I) GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIEAUX COMPOSITES :

I.1) Définitions :

Le mot « composite » signifie « constitué de deux ou plusieurs parties différentes ». En fait, l'appellation *matériau composite* ou *composite* est utilisée dans un sens beaucoup plus restrictif, qui sera précisé tout au long de ce chapitre. **Berthelot, J-M, 1999**, donne pour l'instant la définition générale suivante. Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est dit hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée la *matrice*. La phase discontinue est appelée le *renfort* ou *matériau renforçant* (figure I.1).

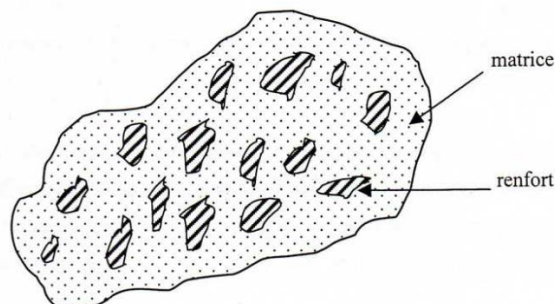


Fig.I.1 :matériaux composites.

Tableau I.1 : caractéristique des matériaux composites.

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
1. Composites à matrice organique Papier, carton Panneaux de particules Panneaux de fibres Toiles enduites Matériaux d'étanchéité Pneumatiques Stratifiés Plastiques renforcés	Résine/charges/fibres cellulose-siques Résine/copeaux de bois Résine/fibres de bois Résines souples/tissus Elastomères/bitume/textiles Caoutchouc/toile/acier Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc. Résines/microsphères	Imprimerie, emballage, etc. Menuiserie Bâtiment Sports, bâtiment Toiture, terrasse, etc. Automobile Domaines multiples
2. Composites à matrice minérale Béton Composite carbone-carbone Composite céramique	Ciment/sable/granulats Carbone/fibres de carbone Céramique/fibres céramiques	Génie civil Aviation, espace, sports, bio-médecine, etc. Pièces thermo-mécaniques
3. Composites à matrice métallique	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
4. Sandwiches { Peaux Ames	Métaux, stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.	Domaines multiples

I.2) Classification des matériaux composites :

Les matériaux composites peuvent être classés suivant la forme ou suivant la nature des composants.

I.2.1) Classification suivant la forme des constituants :

En grande fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux classes :

- Les matériaux composites à particules.
- Les matériaux composites à fibres.

I.2.1.1) Composites à fibres :

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes.

Les fibres continues : Une fibre continue est caractérisée géométriquement comme ayant un facteur longueur/diamètre très élevé. Elles sont généralement plus fortes et plus rigides que les matériaux en volume. Le diamètre de la fibre est généralement entre 3 et 200 μm .

Les fibres découpées : ce type de fibres est considéré généralement comme courts, elles peuvent être définies largement pour avoir un facteur longueur/diamètre de $5 < l/d < 1000$ au-delà, le diamètre de ces fibres est généralement entre 0,02 et 100 μm .

I.2.1.2) Composites à particules :

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

I.2.2) Classification suivant la nature des constituants :

La distinction entre les composites des matériaux est basée principalement sur la nature de la matrice, nous pouvons citer :

I.2.2.1) Composites à matrice organique (CMO) (résine, charges), avec :

- des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- des fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc.
- des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

I.2.2.2) Composites à matrice métallique (CMM) (alliages légers et ultralégers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :

- des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC),
- des fibres métalliques : bore, *89-
- des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (BorSiC).

I.2.2.3) Composites à matrice minérale (CMC) (céramique), avec :

- des fibres métalliques : bore,
- des particules métalliques : cermets,
- des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique.

I.3)composant :

Les principaux constituants sont le renfort et la matrice. Le renfort a pour rôle d'apporter au matériau composite ses performances mécaniques élevées. La matrice qu'on appelle aussi liant, son rôle est de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures.

En ajoutant des additifs pour modifier certains des propriétés physiques ou chimiques. On les utilise même pour des raisons économiques et par fois pour faciliter la mise en œuvre, **Rouam K,2013**.

I.3.1) Matrices :

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation dit, **Laurent Gornet, 2008**. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices couramment rencontrées est donnée sur la figure I.2.

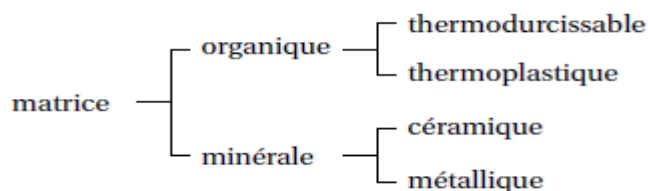


Fig.I.2 : Type de matrice

I.3.1.1) Résines thermodurcissables :

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mise en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. Les résines polyester insaturées, les résines de condensation (phénoliques, amioplastes, furaniques) et les résines époxy sont des résines thermodurcissables. Les exemples de résines thermodurcissables classiquement rencontrées sont 914, 5208, 70, LY556.

Les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces caractéristiques sont présentées dans le tableau I.2.

Tableau I.2 : *Caractéristiques des résines thermodurcissables.*

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (Kg/m ³)	$\epsilon_t^R(\%)$	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyesters	60 à 100	1 140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
phénoliques	120	1 200	2,5	40	250	3 à 5
epoxydes	290	1 100 à 1 500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

I.3.1.2) Résines thermoplastiques :

Les résines thermoplastique ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Les résines thermoplastiques classiquement rencontrées sont PEEK, K3B.

De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau I.3.

Tableau I.3 : *Caractéristiques des résines thermoplastiques.*

résines	$T_f(^{\circ}\text{C})$	ρ (kg/m ³)	$\epsilon_t^R(\%)$	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
polyamide	65 à 100	1 140		60 à 85		1,2 à 2,5
polypropylène	900	1 200		20 à 35		1,1 à 1,4

I.3.1.3) Additifs :

Des produits peuvent être incorporés à la résine pour renforcer les propriétés mécaniques (charges renforçâtes, ex : charges sphériques creuses 5 à 150µm). Des charges non renforçâtes peuvent être également utilisées pour diminuer le coût des matrices en résine. Des additifs, de type colorant ou agent de démoulage sont largement utilisés lors de la conception des structures constituées de matériaux composites.

I.3.2) Renforts :

Les renforts assurent les propriétés mécaniques du matériau composite et un grand nombre de fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée, **Laurent Gornet ,2008**. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils , mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes , tissage tridirectionnel ou plus). La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure I.3.

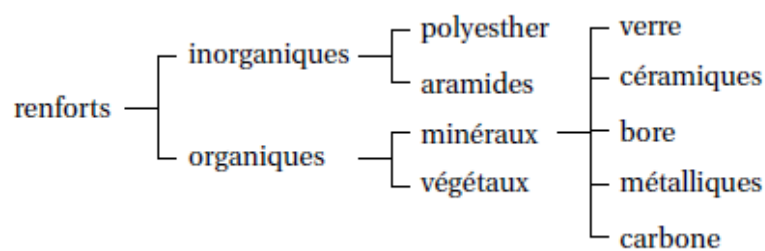


Fig.I.3 :Types de renfort

I.3.2.1) Fibres de verre :

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance-prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction de structures composites.

I.3.2.2) Fibres de carbone :

Les fibres de carbone ont de très fortes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur. Actuellement, les fibres précurseurs utilisées sont des fibres acryliques élaborées à partir du polyacrylonitrile (PAN). La qualité des fibres de carbone finales dépend fortement des qualités du précurseur.

Le principe d'élaboration est de faire subir aux fibres acryliques une décomposition thermique sans fusion des fibres aboutissant à une graphitisation. Le brai qui est un résidu de raffinerie issu du pétrole ou de la houille est également utilisé pour produire des fibres de carbone.

Quelques exemples de fibres de carbone classiquement rencontrées : T300, T800, MR40, TR50, IM6, IM7, GY, M55J.

I.3.2.3) Fibres aramides :

Les fibres aramides ont des propriétés mécaniques élevées en traction comme les carbones mais leurs résistances à la compression est faible. La faible tenue mécanique en compression est généralement attribuée à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite. Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisés. L'utilisation de composites à fibres hybrides permet également de remédier aux faiblesses des composites à fibres aramides. Des renforts hybrides de type verre-kevlar ou carbone-kevlar sont largement utilisés dans le domaine des loisirs (ski, raquette de tennis).

Quelques exemples de fibres aramides : KEVLAR (Dupont de Nemours, USA), TWARON (Akzo, Allemagne-Hollande), TECHNORA (Teijin, Japon).

I.3.2.4) Fibres céramiques :

Les matériaux composites de type céramiques sont souvent constitués de renfort et de matrice en céramique. Les fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces fibres sont rencontrées dans des applications où la température est très élevée entre 500°C et 2000°C. Ces matériaux sont utilisés notamment dans les parties chaudes des moteurs d'avions. Quelques exemples de fibres céramiques :

- fibres de Carbone de Silicium.
- fibres de Bore.
- fibres de Bore carbure de silicium.

I.3.2.5) Caractéristiques mécaniques des fibres :

Il existe différents types de fibres. Elles peuvent être scindées en deux groupes, les fibres à haut module et les fibres à haute résistance. Les fibres à haut module ont une résistance faible et celles à forte résistance ont un module faible. **Laurent Gornet, 2008.**

Tableau I.4 : *Caractéristiques mécaniques des fibres.*

renforts	ρ (Kg/m ³)	σ_t^R (MPa)	σ_c^R (MPa)	E (GPa)
AS4	1 800		3 599	235
T300	1700	1,2	3 654	231
IM6		0,88	1 460	
IM8	1 800		5 171	310
kevlar 49	1 440	2,5	3 620	124
verre E	2 580	3,5	3 450	69

I.4) Les matières composites structuraux :

Les structures des matériaux composites peuvent être classées en trois types. R.K, 2014 :

- les Monocouches
- les Stratifiés
- les sandwichs

I.4.1) Monocouches :

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement) à fibres tissées à fibres courtes.



Fig.I.4: pli unidirectionnelle

I.4.2) Stratifiés :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié. Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

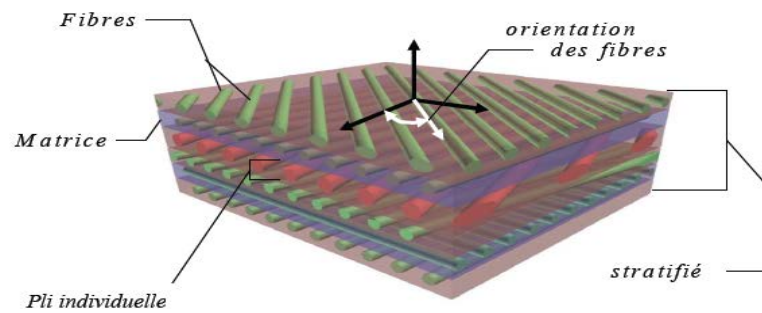


Fig.I.5 :schématisation d'un composite stratifié.

on pourra avoir des stratifiés de type :

1. **Equilibre** : Stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couche orientée suivant la direction $-\theta$.
2. **Symétrique** : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. **orthogonal** : stratifié comportant autant de couches) 0° que de couches à 90° .

I.4.3) Matériaux sandwichs :

Matériaux composés de deux semelles (coupeaux) de grande rigidité et de épaisseur enveloppant une âme (ou cour) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

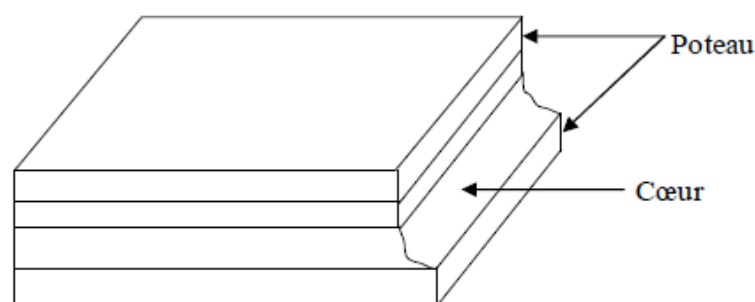


Fig.I.6 :schéma d'un sandwich.

I.5) Généralités sur les panneaux solaires :

I.5.1) Historique :

La science qui traite la transformation directe de l'énergie solaire en énergie électrique, est apparue en 1930 avec les cellules à oxyde cuivreux puis au sélénium. Mais ce n'est qu'en 1954 avec la réalisation des premières cellules PV au sélénium dans les laboratoires de la compagnie Bell Téléphone Laboratoires, que l'on entrevoit la possibilité de fournir de l'énergie, les premiers générateurs ont été utilisés en 1958 pour les satellites Vanguard. Au cours des années 1980, la technique PV terrestre a progressé régulièrement par la mise en place de plusieurs centrales de quelques mégawatts, à recherche par S. Petibon, 2009.

I.5.2) Principe de fonctionnement :

La conversion photovoltaïque, aujourd'hui largement utilisée, peut-être simplement définie comme la transformation de l'énergie des photons en énergie électrique grâce au processus d'absorption de la lumière par la matière. Lorsqu'un photon est absorbé par le matériau, il passe une partie de son énergie par collision à un électron l'arrachant littéralement de la matière. Ce dernier étant précédemment à un niveau d'énergie inférieur où il était dans un état stable passe alors vers un niveau d'énergie supérieur, créant un déséquilibre électrique au sein de la matière se traduisant par une paire électron-trou, de même énergie électrique. Généralement, la paire électron-trou revient rapidement à l'équilibre en transformant son énergie électrique en énergie thermique.

Même si le phénomène électrique est secondaire devant le phénomène thermique (incluant la chauffe du matériau par les rayons solaires), récupérer toute ou une partie de l'énergie électrique est le premier objectif des capteurs photovoltaïques sous forme de cellules ou de générateurs. Cela est possible grâce par exemple à des cellules solaires réalisées en associant un matériau semi-conducteur dopé N à un autre semi-conducteur dopé P.

L'énergie produite par l'absorption d'un photon dans un matériau se traduit du point de vue électrique par la création d'une paire électron-trou. Cette réaction entraîne une différence de répartition des charges créant ainsi une différence de potentiel électrique, c'est l'effet photovoltaïque. S. Petibon, 2009.

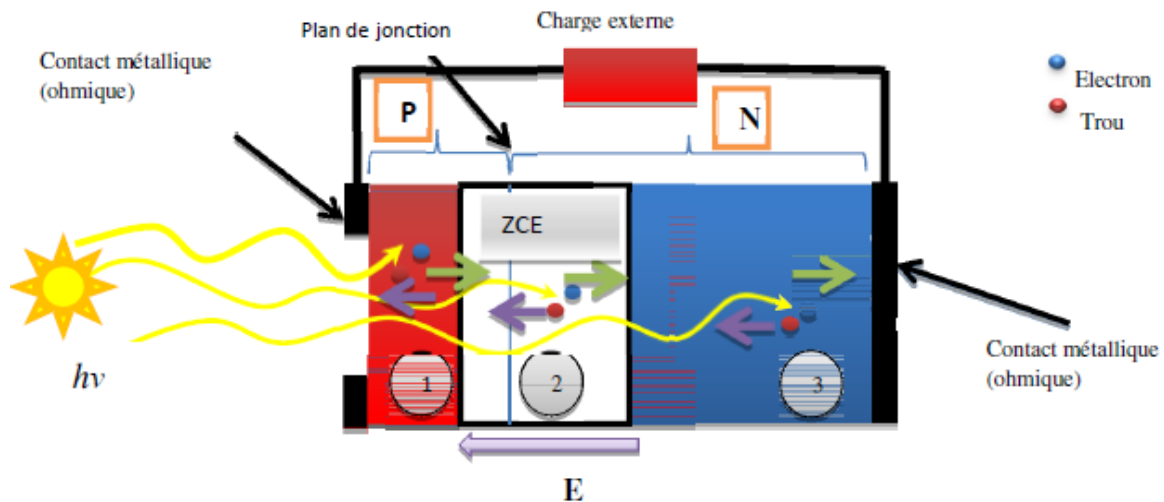


Fig.I.7 : principe de fonctionnement de la cellule solaire.

I.5.3) Technologies des cellules solaires :

Les matériaux photovoltaïques se scindent en deux grandes familles : les matériaux solides cristallisés et les couches sublimes. Ces couches sublimes sont également solides, mais d'épaisseur nettement plus faible (de l'ordre du micron et en deçà) et déposées sur un support, alors que les photopiles cristallines sont massives et épaisses de $0.15 - 0.4 \text{ mm}$ les cellules les plus répandues actuellement sont à base de silicium (différence de potentiel de $0,6 \text{ V}$). Il existe deux grands types de silicium qui sont le silicium cristallin et le silicium amorphe.

I.5.4) Les types des panneaux solaires :

La plupart des panneaux solaires disponibles sur le marché mondial, sont à base de silicium, soit du type mono, poly cristallin ou amorphe. **D.Narimene, 2014.**

- **Les panneaux monocristallins :** Ce sont celles qui ont le meilleur rendement mais aussi celle qui ont le coût le plus élevé, du fait d'une fabrication compliquée.
- **Les panneaux poly cristallin :** Leur conception étant plus facile, leur coût de fabrication est moins important, cependant leur rendement est plus faible.
- **Les panneaux amorphes :** Elles ont un faible rendement, mais ne nécessitent que de très faibles épaisseurs de silicium et ont un coût peu élevé. Elles sont utilisées couramment dans de petits produits de consommation telle que des calculatrices solaires ou encore des montres.

I.6) Généralité sur les matériaux a gradient propriété :

I.6.1) Concept des matériaux fonctionnellement gradués :

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue ou discrète à travers l'épaisseur. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. **B.Bouiadjra, 2015**. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologie.

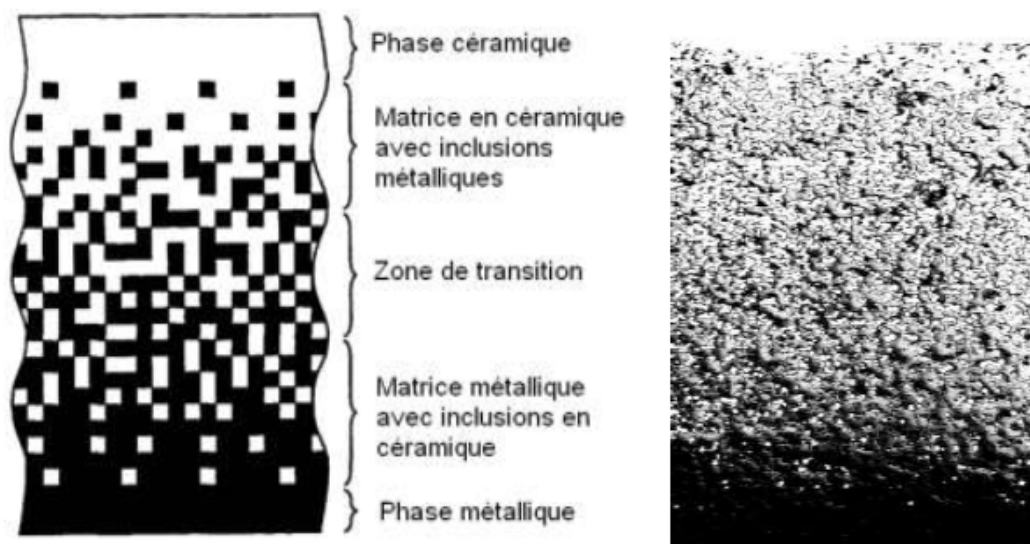


Fig.I.8 : Schéma d'une microstructure graduée continue avec les constituants céramique-métal.

Plusieurs FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différentes propriétés. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle est généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase graduellement varie dans la direction de gradation, les propriétés effectives de FGM changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les FGM comme modèles : Pour la première, une variation par morceaux de la fraction volumique du céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est à dire, couche quasi-homogène de céramique-

métal (Fig. I.9.a) ; Pour la deuxième, une variation continue de la fraction volumique du céramique ou du métal est assumée (Fig. I.9.b). H. ZIOU, 2017.

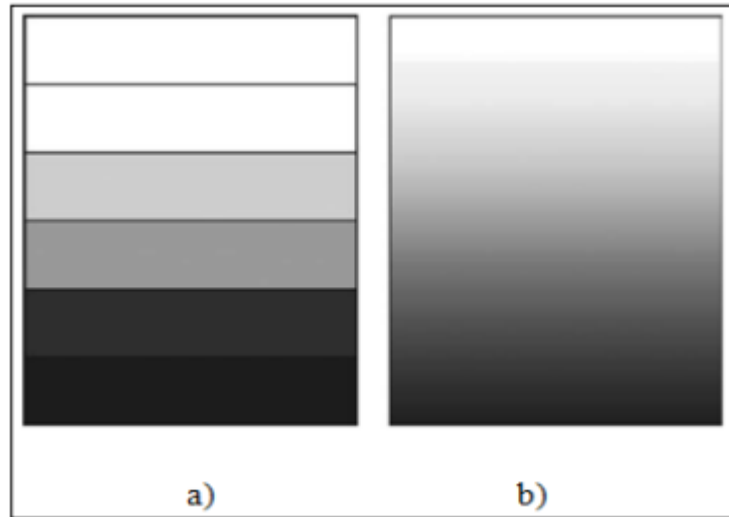


Fig.I.9 : *Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel : a) première approche; b) deuxième approche.*

I.6.2)Caractéristiques matérielles des FGMs :

- faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion ;
 - haute température de fusion ou de décomposition ;
 - haut module d'élasticité et haute dureté ;
 - charge à la rupture élevée ;
 - bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure ;
 - conservation des propriétés à haute température ;
 - faible coefficient de dilatation thermique (donc bonne résistance aux chocs thermiques) ;
 - faible conductivité thermique (donc bonne résistance à la température).
- ❖ Cependant, les céramiques sont réputées être fragiles et très vulnérables aux défauts de petites tailles. Les caractéristiques du métal sont données comme suit :
- Bonne résistance mécanique ;
 - Conductivité thermique élevée,
 - Très bonne ténacité.

I.6.3) Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués :

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.10. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique et dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

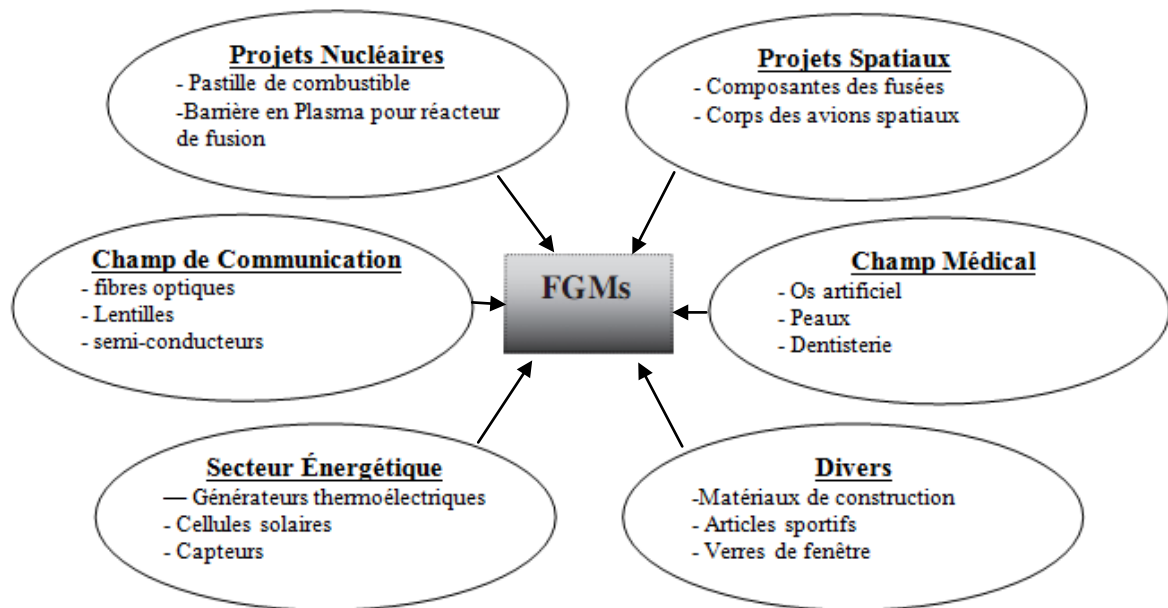


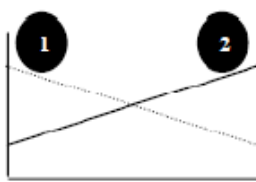
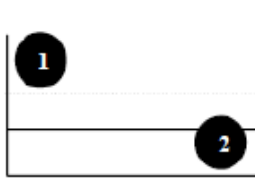
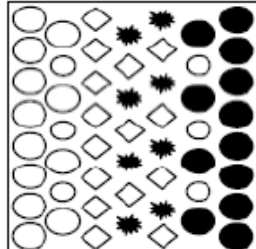
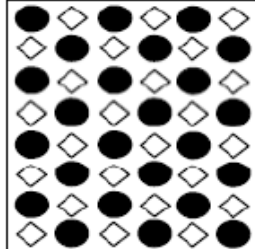
Fig.I.10 : les domaines d'application des matériaux à gradient de propriétés.

I.6.4) Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels :

Généralement, les F.G.M sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure I.11). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente.

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de

hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives. **B.Bouiadjra, 2015.**

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibre *</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

.Fig.I.11:Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les Matériaux composites conventionnels.

I.6.5)Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM :

considérons une plaque rectangulaire en matériaux FGM ayant l'épaisseur h , la longueur a et la largeur b , comme présente sur la (figure I.12). les propriétés du matériau de la plaque sont supposée varier continuellement à travers l'épaisseur de la plaque dans cette étude il ya différentes loi qui participent à la variation des propriétés matérielles (module de Young).

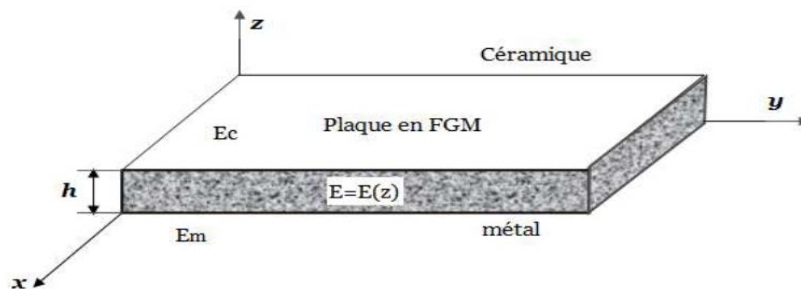


Fig.I.12 : Géométrie et dimension d'une plaque FGM

I.6.5.1) Loi de puissance P-FGM :

Les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées pour la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^k$$

La fraction volumique d'un P-FGM est définie par:

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k$$

Où : E_m , E_c sont les modules d'Young des matériaux constituant la plaque P-FGM pour ($z = h/2$), ($z = -h/2$), respectivement.

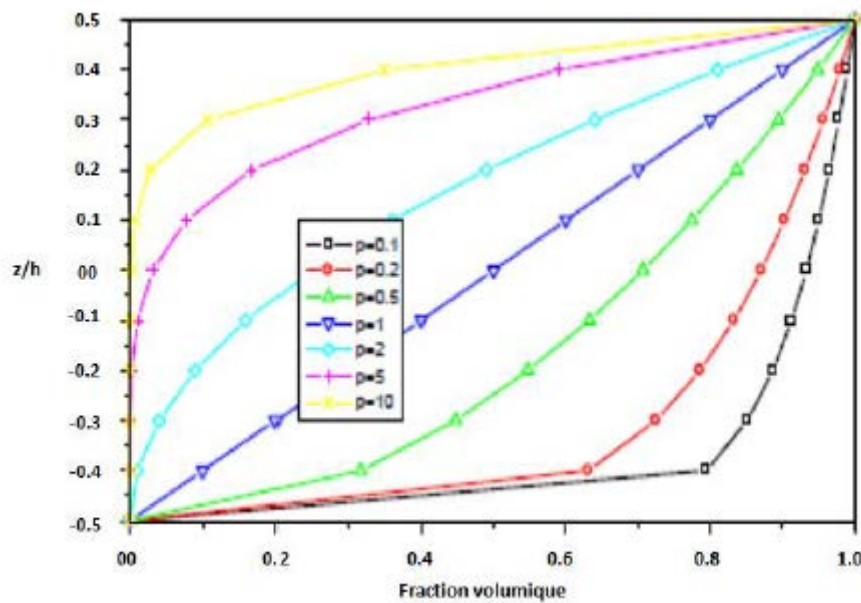


Fig.I.13 : variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

La (figure I.13) montre la variation de module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM (composée de deux matériaux différents : céramique et métal) pour différentes valeurs de l'indice matériel « p ».

I.7) Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons défini les matériaux composites et leur caractéristique, ainsi que l'historique des panneaux solaires et leur type et leur principe de fonctionnement, en suite on a terminé par des généralités sur les matériaux à gradient propriétés et leur domaine d'application et le point le plus important c'est la variation des propriétés matérielles (module de Young) et leur différente loi qui ont été abordées dans ce chapitre.

Chapitre II

Formulation théorique

II.1) Introduction :

Afin de positionner notre étude, il est d'utiliser la présente théorie classique des plaques FGM pour l'étude de la réponse des plaques sous chargement statique et en vibration libre.

Les théories classiques dites théories des plaques minces, où la contrainte normale transversale est négligeable, due à faible épaisseur de la plaque, cette hypothèse n'est pas valable et incorrecte dans le cas des plaques modérément épaisses ou avec forte épaisseur. Cette théorie a été adoptée par Feldman,1997 et Aboudi,1997.Abrate,2008, Mahdavian,2009, et Mohammadi et al.,2010, pour étudier le flambement des plaques minces en FGMs

Cependant, la théorie classique des plaques en FGMs sous-estime la flèche de déplacement et surestime les fréquences propres ainsi que les charges critiques de flambement des plaques modérément épaisses en FGM (Red,2004).

La théorie classique des plaques est basée sur les hypothèses suivantes :

- la contrainte normale dans le plan de la plaque est négligeable devant les autres (hypothèses des contraintes planes).
- les points situés sur une normale à la fibre moyenne avant déformation restent sur cette normale après déformation.

Ces hypothèses correspondent à la théorie des plaques minces dans le domaine des petites déformations (modèle de Love-Kirchhoff,1850).

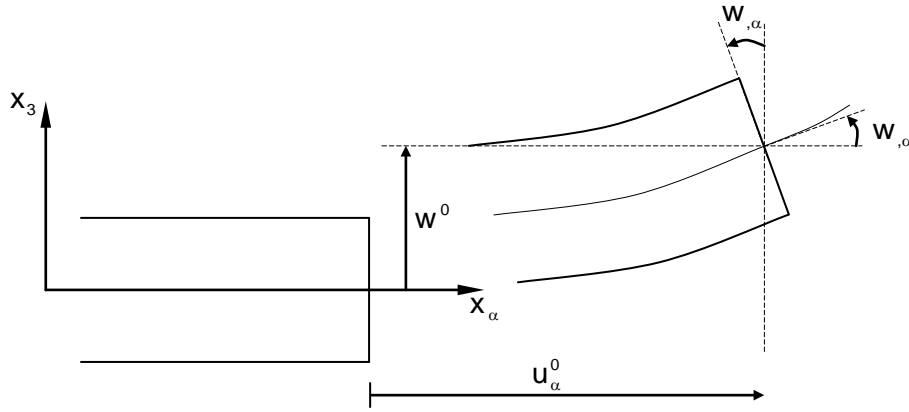


Fig.II.1: Cinématique de Love-Kirchhoff

Le champ cinématique, d'un point quelconque d'une plaque est donné par la relation suivante

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u(x, y) - zw_{,x}(x, y) \\ v(x, y, z) = v(x, y) - zw_{,y}(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Avec :

u, v : Le déplacement du plan neutre.

w : La flèche de la plaque,

$w_{,x}, w_{,y}$: Représentent la rotation de la fibre normale (figure.II.1) autour des axes (x) et (y) respectivement.

II.2) Formulation théorique :

II.2.1) Champ des déplacements :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où

u_0 et v_0 sont les déplacements membranaires plans dans les directions (x) et (y) respectivement, w_b sont les composantes de déplacement transversal en terme de flexion.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

II.2.2) Lois de comportement élastique :

Les relations contraintes-déformations, s'écrivent pour une plaque en matériaux à gradient de propriétés :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

$\{\sigma_{i,j}\}$ et $\{\varepsilon_{i,j}\}$ Sont les composantes physiques en un point quelconque de la plaque en FGM

Avec :

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{1}{(1-\nu^2)} E(z) \\ Q_{12} &= \frac{\nu}{(1-\nu^2)} E(z) \\ Q_{66} &= \frac{1}{2(1+\nu)} E(z) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Avec :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (\text{II.11})$$

Et

$$\alpha(z) = \alpha_m + (\alpha_c - \alpha_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^k \quad (\text{II.12})$$

Où «k» est un paramètre matériel, les indices «m» et «c» sont les modules élastiques de la face intérieure «métal» et la face supérieure «céramique» respectivement.

II.2.3) Équations du mouvement :

Les équations de mouvement sont obtenues à partir du principe de Hamilton et sont exprimées par la forme variationnelle suivante :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V + \delta P - \delta K) dt \quad (\text{II.13})$$

Dans cette expression, δU , δK , δV représentent, respectivement, la variation d'énergie de déformation, la variation d'énergie cinétique et la variation du travail des efforts extérieurs s'exerçant sur la plaque. δP présente la variation de l'énergie de la fondation élastique.

II.2.3.a) Variation de l'énergie de déformation :

A partir la présente théorie, la variation de l'énergie de déformation pour une plaque en FGM est définie par :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dV \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{II.14})$$

Soit, en considérant les hypothèses retenues :

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}] dA dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\sigma_x (\delta \varepsilon_x^0 + z \delta k_x) + \sigma_y (\delta \varepsilon_y^0 + z \delta k_y) + \tau_{xy} (\delta \gamma_{xy}^0 + z \delta k_{xy})] dA dz \end{aligned}$$

Alors, l'expression finale de la variation de l'énergie de déformation s'exprime à l'aide de variables des contraintes et des déformations :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x \delta k_x + M_y \delta k_y + M_{xy} \delta k_{xy}] dA$$

Pour exprimer la forme variationnelle de l'énergie de déformation en fonction des variables en déplacements, en remplaçant les déformations par leurs expressions déterminer ci-dessus accorder la cinématique adoptée, nous trouvons :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dA$$

Où (A) est la surface supérieure de la plaque.

La résultantes des charges en plan (N_x, N_y et N_{xy}) sont définies par l'intégrale des termes des contraintes sur l'épaisseur :

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (\text{II.16})$$

$$N_T = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) T \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \end{matrix} \right\} dz \quad (\text{II.17})$$

et les résultantes des moments en plan (M_x, M_y et M_{xy}) sont définies par l'intégrale des moments créés par les contraintes en plan et le plan moyen de la plaque sur l'épaisseur

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \quad (\text{II.18})$$

II.2.3.b) Variation de l'énergie de la fondation élastique:

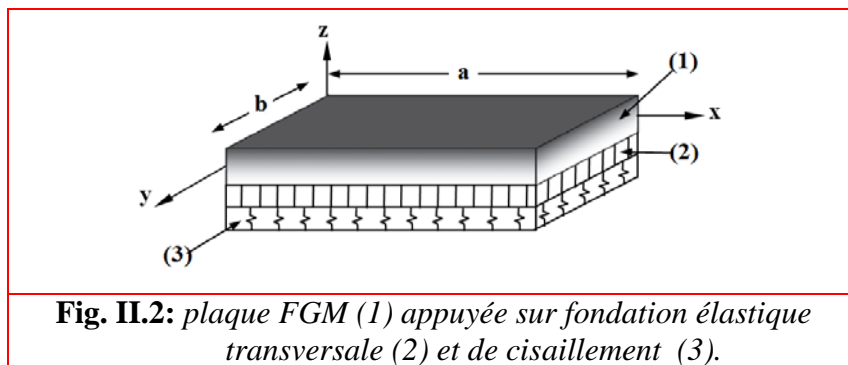
La variation de l'énergie de la fondation élastique s'exprime sous la forme :

$$\delta V = \int_A f_e \delta(w) dA \quad (\text{II.19})$$

Avec f_e présente la densité des réactions de la fondation élastique.

$$f_e = K_w (w)^2 - K_{s1} \frac{\partial^2(w)}{\partial x^2} - K_{s2} \frac{\partial^2(w)}{\partial y^2} \quad (\text{II.20})$$

Les coefficients K_w et K_s are présentent la rigidité transversale et de cisaillement de la fondation élastique,



II.2.3.c) Expression du travail des efforts extérieurs :

Le travail des forces extérieures appliquées à la plaque s'exprime par :

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_V \delta \{u^v\}^T dV + \int_S \delta \{u^s\}^T dS + \sum \delta \{u^i\} \quad (\text{II.21})$$

Le problème traité dans cette étude est un problème de flexion, Ceci se traduit, la négligence des sollicitations volumiques ainsi que les charges appliquées en dehors de leur plan et prend en compte une répartition uniforme des charges appliquées en plan, l'énergie potentielle se réduit en fonction du déplacement transversal, alors:

$$\delta V = -\frac{1}{2} \int_A q \delta w dA \quad (\text{II.22})$$

(q) est une charge uniforme par unité de surface de la plaque, dirigée suivant l'axe z (exemple : une pression),

II.2.3.d) Variation de l'énergie cinétique :

La variation d'énergie cinétique peut s'exprimer par :

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV \quad i = 1,2,3 \quad (\text{II.23})$$

En respectant les hypothèses cinématiques ci-dessus, l'énergie cinétique de la plaque pour un déplacement virtuel (δu_i), s'écrit :

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dA dz \quad (\text{II.24})$$

Par conséquent, le champ de vitesse s'exprime en fonction de la composante (u_i) du vecteur déplacement,

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, y, z, t) &= \dot{u}_0(x, y, t) - z \frac{\partial \dot{w}(x, y, t)}{\partial x} \\ \dot{v}(x, y, z, t) &= \dot{v}_0(x, y, t) - z \frac{\partial \dot{w}(x, y, t)}{\partial y} \\ \dot{w}(x, y, z, t) &= \dot{w}(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \left[\begin{aligned} & \left(\dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \left(\delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} \right) \\ & + \left(\dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \left(\delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} \right) \\ & + (\dot{w})(\delta \dot{w}) \end{aligned} \right] \rho(z) dA dz \quad (\text{II.26})$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \left[\begin{aligned} & \dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 - z \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} - z \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + z^2 \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \\ & \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 - z \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} - z \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 + z^2 \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} + (\dot{w} \delta \dot{w}) \end{aligned} \right] \rho(z) dA dz \quad (\text{II.27})$$

En collectionnant les termes semblables :

$$= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \left[\begin{aligned} & \left[(\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w} \delta \dot{w}) \rho(z) \right] \\ & - \left[\left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) z \rho(z) \right] \\ & + \left[\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \right) z^2 \rho(z) \right] \end{aligned} \right] dA dz$$

L'expression de la variation d'énergie cinétique alors s'écrit : (II.28)

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w})(\delta \dot{w})] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right. \\ \left. + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \right) \right\}$$

(II.29)

(I_0, I_1, I_2) sont les inerties massiques, définies respectivement par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz \quad (\text{II.30})$$

II.2.4) Résumé des relations fondamentales du mouvement :

Nous obtenons les relations fondamentales fournies par cette nouvelle théorie par la constitution les expressions δU , δV et δK en fonction des déplacements virtuels et en les remplaçant dans le principe d'Hamilton, nous trouvons, par conséquent :

$$\int_0^T \left\{ \int_A \left[N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) + N_r \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \right) - M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dA - \int_A [q \delta(w)] dA + \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w}) (\delta \dot{w})] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) + I_2 \left(\frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \right) \right\} dA \right\} dt = 0 \quad (\text{II.31})$$

En intégrant par parties les termes de l'expression précédente et en reconnaissant que les termes d'intégration sont nuls puisque $\delta u_i(t=0) = \delta u_i(t=T) = 0$, afin d'extraire les déplacements virtuels δu_0 , δv_0 , δw , nous trouvons :

$$\int_0^T \left\{ \int_A \left[-\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial N_y}{\partial x} \delta v_0 + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 \right) - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta w - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta w - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta w \right] dA + \oint_{\Gamma} \delta u_i ds - \int_A [q (\delta w)] dA + \int_A \left\{ (I_0 \ddot{u}_0 \delta u_0 + I_0 \ddot{v}_0 \delta v_0 + I_0 (\ddot{w}) \delta w \right\} - I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \delta w - I_1 \left(\frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \delta v_0 \right) + I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right) \delta w \right\} dA \right\} = 0 \quad (\text{II.32})$$

L'expression des conditions aux limites imposées sur le contour (Γ) de l'équation ci-dessus peuvent être écrite sous la forme :

Avec :

$$\begin{aligned} \delta u_0 &: N_x n_x + N_{xy} n_y \\ \delta v_0 &: N_{xy} n_x + N_y n_y \\ \delta w &: \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \right) n_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \right) n_y + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \end{aligned}$$

(II.33)

$$\frac{\partial \delta w}{\partial n} : M_n$$

Or

$$M_{ns} = (M_y - M_x)n_x n_y + M_{xy}(n_x^2 - n_y^2),$$

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y \quad (\text{II.34})$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y},$$

L'intervalle du temps $[0, T]$ et la surface (A) sont arbitraires ainsi que les déplacements virtuels $\delta u_0, \delta v_0, \delta w$, sur (A). Par conséquent, l'équation ne peut être satisfaite que si les intégrands s'annulent séparément sur (A) et sur (C).

Nous avons alors les équations dynamiques suivantes sur (A) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial N_T}{\partial x} \right) \delta u_0 + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_T}{\partial y} \right) \delta v_0 - \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + f_e \right) \delta w \\ & - \left(I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \right) \delta u_0 - \left(I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \right) \delta v_0 - \left(I_0 (\ddot{w}) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w} \right) \delta w = 0 \end{aligned}$$

En séparant les déplacements virtuels et en s'annulent ces derniers, On obtient alors : (II.35)

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial N_T}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \\ \delta v_0 : & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_T}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \\ \delta w : & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + f_e = I_0 (\ddot{w}) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w} \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

La figure suivante présente les conditions aux limites pour une plaque simplement appuyées de la présente théorie, nous adoptons :

Pour les bords $x=0$ et $x=a$:

$$v = w = \frac{\partial w}{\partial y} = N_x = M_x = 0$$

Pour les bords $y=0$ et $y=b$:

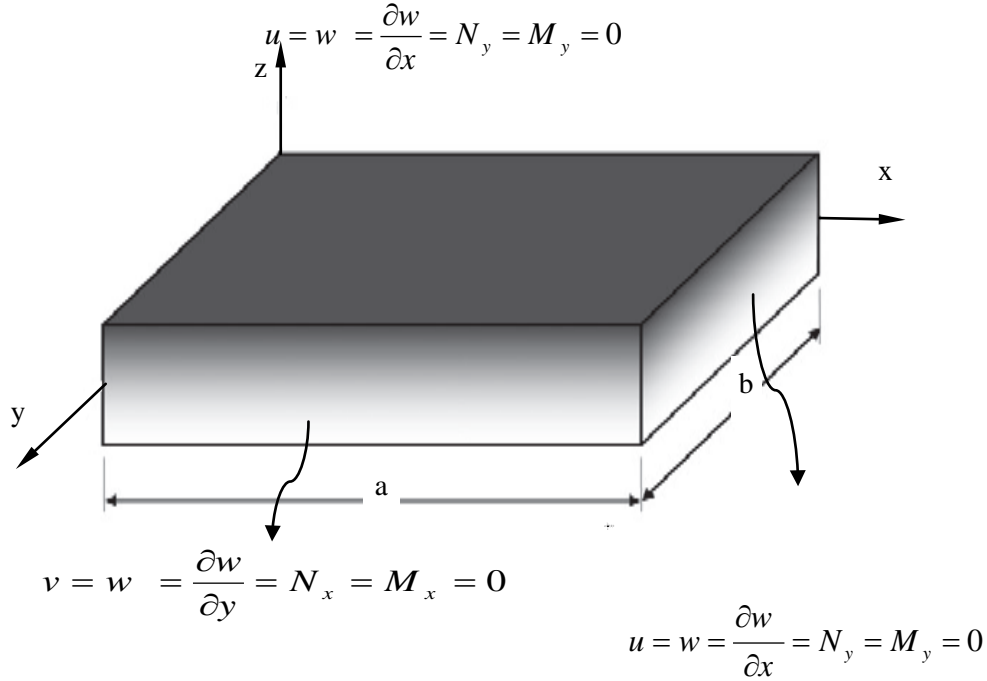


Fig. II.3: Présentation des conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée.

Par la suite, nous remplaçons les expressions des contraintes par leurs relations, Les expressions des résultantes et moments sont obtenues sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ & A_{22} & 0 \\ Sym & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ & B_{22} & 0 \\ Sym & & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ & B_{22} & 0 \\ Sym & & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ & D_{22} & 0 \\ Sym & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II.37)$$

Les coefficients élastiques C_{ij} ainsi définis tiennent en compte la variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur à partir les expressions données dans les équations (II.1), (II.2) ou (II.3). En substituant les relations (II.4) dans l'expression de la matrice (II.7) et en fonction des résultats obtenus dans (II.16) (II.17) et (II.18) sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix}, \quad (\text{II.38})$$

Ou,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.39})$$

Ici, Les coefficients de rigidité sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{2} \\ \nu \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz, \quad (\text{II.43})$$

et

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}), \quad (\text{II.44})$$

II.2.5) Les équations de mouvement en termes de déplacement :

En introduisant les équations (II.38-II42) dans les équations (II33-II34-II36), les équations du mouvement s'expriment en termes des déplacements $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w)$ et les équations appropriées ont la forme suivante :

$$A_{11}d_{11}u_0 + A_{66}d_{22}u_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}v_0 - B_{11}d_{111}w - (B_{12} + 2B_{66})d_{122}w = I_0\ddot{u}_0 - I_1d_1\ddot{w} \quad (\text{II.45})$$

$$A_{22}d_{22}v_0 + A_{66}d_{11}v_0 + (A_{12} + A_{66})d_{12}u_0 - B_{22}d_{222}w - (B_{12} + 2B_{66})d_{112}w = I_0\ddot{v}_0 - I_1d_2\ddot{w} \quad (\text{II.46})$$

$$B_{11}d_{111}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{122}u_0 + (B_{12} + 2B_{66})d_{112}v_0 + B_{22}d_{222}v_0 - D_{11}d_{1111}w - 2(D_{12} + 2D_{66})d_{1122}w - D_{22}d_{2222}w + q = I_0(\ddot{w}) + I_1(d_1\ddot{u}_0 + d_2\ddot{v}_0) - I_2(d_{11}\ddot{w} + d_{22}\ddot{w}) \quad (\text{II.47})$$

Où d_{ij} , d_{ijl} et d_{ijlm} sont les opérateurs différentiels, donnés par :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{II.50})$$

II.3) Solution Analytique :

Nous considérons une plaque simplement appuyée de dimensions (a) et (b) et chargée dans leur plan par une charge uniforme (q). La stratégie adaptée pour la résolution des problèmes traités dans ce travail est basée sur la méthode de Navier, Les composantes du vecteur de déplacement (u_0, v_0, w) sont exprimées par la forme de double série de Fourier comme la suite,

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ wb \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

Où U_{mn} , V_{mn} et W_{mn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, ω est la fréquence propre associée à $(m, n)^{\text{xième}}$ mode propre, avec $\lambda = m\pi / a$ et $\mu = n\pi / b$.

Ainsi la charge transversale q est exprimée aussi en doubles séries de Fourier,

(II.52)

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y)$$

Les coefficients Q_{mn} sont donnés ci-dessous pour quelques charges typiques :

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\lambda x) \sin(\mu y) dx dy = \begin{cases} q_0 & \text{pour charge sinusoidale} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{pour charge uniformément répartie} \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

Et la variation de la charge thermique et donnée par

$$T(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y)$$

Nous substituons les équations (II.51) et (II.52) dans les équations (II.45), (II.46) (II.47) (II.48) et (II.49), la solution analytique est obtenue sous forme matricielle :

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

Dans lequel

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) + \lambda^2 A_r \\ a_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ a_{13} &= \lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\ a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) + \mu^2 B_r \\ a_{23} &= \mu [(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ a_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4) + (K_w + K_s(\lambda^2 + \mu^2)) \\ m_{11} &= m_{22} = -I_0, m_{13} = \lambda I_1, m_{23} = \mu I_1, \\ m_{33} &= -(I_0 + I_2(\lambda^2 + \mu^2)), \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

II.4) Conclusion

Le modèle est capable de tenir en compte de dépassement de la limite des théories classiques et/ou de premier ordre des plaques en FGM et possède un nombre réduit des inconnues tandis que plus dans les autres théories d'ordre supérieur.

Ce travail montre qu'il est possible de déterminer des solutions analytiques en basant sur la méthode de Navier et le principe d'Hamilton. Cette méthode nous offre des solutions aux problèmes d'une plaque FGM en analyse vibratoire thermomécanique (vibration libre sous l'effet de température).

La résolution du problème dépasse le strict cadre de l'étude bibliographique qu'elle est clairement présentée pour les résultats obtenus dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Résultats et Discussions

III.1) Introduction :

L'intérêt principal de cette section est de présenter l'évaluation et la validation de la théorie présentée dans ce travail, nous présentons une étude paramétrique pour étudier l'influence des paramètres matériels sur le comportement statique et dynamique des plaques en FGM.

Nous considérons, des plaques en matériaux à gradient de propriétés FGM, rectangulaires ou carrées, simplement appuyées, épaisses ou avec forte épaisseur, d'épaisseur constante et un état de contraintes ou de déformations initiales nulles. Les différents types des plaques considérées, pour l'évaluation, dans le cas thermique et dynamique (vibration libre), sont :

Tableau III.1 : caractéristiques des matériaux utilisés

Propriétés	Métal	Céramique	
	Aluminum (Al)	Alumina (Al ₂ O ₃)	Zirconia (ZrO ₂)
E (GPa)	70	380	200
ν	0.3	0.3	0.3
ρ (kg/m ³)	2702	3800	5700

Dans le cas dynamique, nous tenons les fréquences adimensionnelles en fonction des fréquences propres :

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_m / E_m}, K_0 = \frac{a^4 K_w}{D_m}, K_1 = \frac{a^2 K_s}{D_m}, D_m = \frac{h^3 E_m}{12(1-\nu_m^2)}$$

III.2) Etude vibratoire des plaques minces en FGM :

Tableau III.2 : la première fréquence en fonction de la série (n,m) des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h

a/h	Mode(m, n)	Indice material (p)				
		0	0.5	1	4	10
10	1(1,1)	6.752	6.7752	6.7925	6.7921	6.5018
	2(1,2)	18.161	18.24	18.305	18.451	18.053
	3(2,2)	24.657	24.698	24.718	24.511	23.243
50	1(1,1)	8.2298	8.285	8.3332	8.4996	8.4595
	2(1,2)	20.781	20.923	21.047	21.483	21.418
	3(2,2)	27.796	29.217	29.332	29.57	28.728
100	1(1,1)	8.2386	8.294	8.3425	8.5101	8.4711
	2(1,2)	20.837	20.98	21.106	21.55	21.492
	3(2,2)	29.199	29.344	29.463	29.715	28.885

Tableau III.3 : Les trois premières fréquences des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h

Mode	a/h	p				
		0	0.5	1	4	10
1	10	6.7520	6.7752	6.7925	6.7921	6.5018
	50	6.9786	7.0079	7.0307	7.055	6.781
	100	6.9861	7.0156	7.0386	7.0637	6.7903
2	10	40.092	39.915	39.744	38.859	37.711
	50	200.46	199.57	198.72	194.3	188.56
	100	400.92	399.15	397.44	388.59	377.11
3	10	75.022	74.69	74.371	72.714	70.561
	50	375.03	373.37	371.77	363.5	352.76
	100	750.05	746.74	743.54	727.00	705.51

Tableau III.4 : Les trois premières fréquences des plaques en P-FGM en fonction du ratio d'allongement a/b avec $h=100$

Mode	a/b	p				
		0	0.5	1	4	10
1	1	6.9861	7.0156	7.0386	7.0637	6.7903
	2	4.9273	4.9576	4.9836	5.0646	5.0024
	4	4.6816	4.7169	4.7484	4.8685	4.8957
2	1	400.92	399.15	397.44	388.59	377.11
	2	316.95	315.55	314.2	307.21	298.13
	4	292.22	290.92	289.68	283.23	274.86
3	1	750.05	746.74	743.54	727.00	705.51
	2	592.97	590.35	587.82	574.74	557.75
	4	546.69	544.27	541.94	529.88	514.22

Les résultats présentés dans les tableaux (III.2-4) présentent la variation de la fréquence fondamentale en fonction des paramètres géométriques et matériels. Après l'analyse de ces résultats, nous observons que l'augmentation de la fréquence fondamentale suivi par l'augmentation de l'épaisseur, cette remarque est aussi valable pour l'augmentation de l'indice matériel « k ». Il est aussi remarquable que l'effet de l'allongement influe sur la prédiction des fréquences. À la fin de cette analyse, il est marquant clairement comme la présente théorie est plus simple et déployée plus facilement dans les simulations mécaniques des structures en matériaux à gradient de propriétés

III.3) Etude des vibrations thermomécaniques des plaques minces en FGM :

Dans cette section, nous allons présenter l'effet de la température sur les vibrations libres des plaques minces en FGM. Dans le premier temps, nous étudions l'effet de la température par la considération d'une diffusion unidirectionnel. Les résultats obtenus sont illustrés sur les tableaux (III.5-7). La première analyse indique que les fréquences augmentent légèrement comparées aux celles obtenues précédemment, la seule explication est visée par l'allongement de la plaque avec la présence de l'effet thermique. Comme est définie précédemment, le panneau solaire se compose d'une partie en céramique et l'autre en métal, et avec la connaissance de la nature matérielle et physique des métaux,

ils sont très sensibles à la dilatation thermique, et par conséquent, l'effet est plus important dans la phase métallique.

Tableau III.5 : la première fréquence en fonction de la série (n,m) des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h $T_1=100$ et $T_2=0$

a/h	Mode (m,n)	Indice material (p)				
		0	0.5	1	4	10
10	1(1,1)	6.7635	6.7939	6.8167	6.8309	6.5385
	2(1,2)	18.174	18.26	18.329	18.486	18.084
	3(2,2)	24.673	24.719	24.745	24.551	23.278
50	1(1,1)	7.1655	7.3707	7.5305	7.916	7.6271
	2(1,2)	19.829	20.108	20.335	20.976	20.681
	3(2,2)	28.011	28.305	28.536	29.000	27.871
100	1(1,1)	7.6582	8.3282	8.8282	10.045	9.7263
	2(1,2)	20.347	21.084	21.662	23.205	22.838
	3(2,2)	28.662	29.483	30.122	31.664	30.509

Tableau III 6 : Les trois premières fréquences des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h $T_1=100$ et $T_2=0$

Mode	a/h	p				
		0	0.5	1	4	10
1	10	6.7635	6.7939	6.8167	6.8309	6.5385
	50	7.1655	7.3707	7.5305	7.916	7.6271
	100	7.6582	8.3282	8.8282	10.045	9.7263
2	10	40.214	40.047	39.885	39.032	37.905
	50	203.51	202.86	202.22	198.56	193.36
	100	413.03	412.2	411.31	405.48	396.09
3	10	75.087	74.761	74.446	72.806	70.665
	50	376.67	375.14	373.65	365.8	355.35
	100	756.59	753.8	751.05	736.16	715.84

Tableau III.7 : Les trois premières fréquences des plaques en P-FGM en fonction du ratio d'allongement a/b avec $h=100$ $T_1=100$ et $T_2=0$

Mode	a/b	p				
		0	0.5	1	4	10
1	1	7.6582	8.3282	8.8282	10.045	9.7263
	2	5.5118	6.0923	6.5218	7.5824	7.4373
	4	5.2081	5.7383	6.1328	7.1266	7.0517
2	1	413.03	412.2	411.31	405.48	396.09
	2	326.13	325.44	324.71	319.99	312.49
	4	297.11	296.21	295.29	290.06	282.55
3	1	756.59	753.8	751.05	736.16	715.84
	2	600.41	598.38	596.36	585.17	569.51
	4	555.25	553.51	551.77	541.86	527.72

Dans cette deuxième partie, nous appliquons une diffusion thermique bidimensionnelle, quelques résultats numériques sont présentés dans les tableaux (V.7-9), Comme attendu et quel que soit le type de plaque considérée, les fréquences diminuent avec l'élévation de la température et ceci à cause de la diminution de la rigidité globale de la plaque lorsque la température augmente.

En résumé et indépendamment de l'élévation de la température, l'augmentation de la concentration en métal (accroissement de l'index n de la fraction volumique) fait décroître les fréquences de vibration car la rigidité globale de la plaque décroît du fait de l'affaiblissement du module de Young global (puisque dans notre cas, le module de Young de la céramique est trois fois supérieur à celui du métal). Cette diminution des fréquences est accentuée par l'augmentation de l'inertie globale qui est due à l'augmentation de la fraction volumique du métal étant donné que la masse volumique du métal est largement supérieure à celle de la céramique de la plaque

Tableau III.8 : la première fréquence en fonction de la série (n,m) des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h $T_1=100$ et $T_2=100$

a/h	Mode (m,n)	Indice material (p)				
		0	0.5	1	4	10
10	1(1,1)	6.8001	6.8337	6.8592	6.8833	6.5988
	2(1,2)	18.205	18.293	18.365	18.53	18.133
	3(2,2)	24.706	24.756	24.784	24.599	23.333
50	1(1,1)	8.037	8.2943	8.4982	9.0538	8.9253
	2(1,2)	20.644	20.985	21.263	22.092	21.935
	3(2,2)	28.934	29.302	29.595	30.291	29.357
100	1(1,1)	10.571	11.284	11.836	13.352	13.445
	2(1,2)	23.38	24.276	24.991	27.051	27.143
	3(2,2)	32.148	33.177	33.993	36.215	35.701

Tableau III.9 : Les trois premières fréquences des plaques carrées en P-FGM en fonction du ratio d'épaisseur a/h $T_1=100$ et $T_2=100$

Mode	a/h	p				
		0	0.5	1	4	10
1	10	6.8001	6.8337	6.8592	6.8833	6.5988
	50	8.037	8.2943	8.4982	9.0538	8.9253
	100	10.571	11.284	11.836	13.352	13.445
2	10	40.216	40.051	39.89	39.042	37.915
	50	203.55	202.96	202.35	198.81	193.61
	100	413.2	412.58	411.84	406.46	397.06
3	10	75.088	74.763	74.449	72.812	70.67
	50	376.69	375.19	373.73	365.93	355.48
	100	756.69	754.00	751.34	736.7	716.37

Tableau III.10 : Les trois premières fréquences des plaques en P-FGM en fonction du ratio d'allongement a/b avec $h=100$ $T_1=100$ et $T_2=100$

Mode	a/b	P				
		0	0.5	1	4	10
1	1	10.571	11.284	11.836	13.352	13.445
	2	7.9733	8.565	9.0217	10.289	10.449
	4	7.4392	7.9836	8.4049	9.587	9.7735
2	1	413.2	412.58	411.84	406.46	397.06
	2	326.26	325.72	325.11	320.73	313.22
	4	297.18	296.36	295.51	290.47	282.94
3	1	756.69	754.00	751.34	736.7	716.37
	2	600.52	598.61	596.7	585.79	570.11
	4	555.37	553.78	552.15	542.57	528.42

III.4) Etude des vibrations thermomécaniques des plaques minces en FGM sur appuis élastiques :

Cette partie est consacrée à l'étude des vibrations libres d'une plaque FGM reposant sur un support élastique. Les solutions ont été obtenues en utilisant la méthode de Navier. Les tableaux III 11-13 résument les résultats obtenus. Les résultats ont montré que le support élastique type Pasternak a un rôle significatif dans l'augmentation de la fréquence naturelle. Il a aussi été observé qu'en augmentant l'index de la fraction volumique, l'effet du support élastique sur les fréquences augmente. Ce phénomène a été expliqué par le fait qu'une augmentation du paramètre de cisaillement du support élastique conduit à une augmentation des déplacements en membrane et qui a pour conséquence d'accroître l'effet de la rigidité en membrane sur les fréquences propres de vibration.

D'autre part, les résultats ont révélé que l'effet de la température est plus important dans le cas de la plaque sur appuis élastiques que dans celui de la plaque libre. Une élévation uniforme de la température a plus d'effet sur les fréquences naturelles qu'un gradient de température. Le mode fondamental est plus sensible à l'effet de la température que les modes supérieurs. Une plaque mince avec un index de fraction volumique égal à 1 est plus sensible à la température que celle avec un index égal à 10.

Tableau III.11: l'effet de l'indice matériel et la fondation élastique sur la fréquence fondamentale d'une plaque en P-FGM avec ($a/h=100$) $T1=T2=0$

K_0	K_1	Mode	P					
			0	0.5	1	2	4	10
10	10	1	96.241	97.500	98.692	100.88	104.57	111.54
		2	400.92	399.15	397.44	394.23	388.59	377.11
		3	750.05	746.74	743.54	737.53	727.00	705.51
100	0	1	7.6169	7.6599	7.6962	7.7502	7.7961	7.6486
		2	400.92	399.15	397.44	394.23	388.59	377.11
		3	750.05	746.74	743.54	737.53	727.00	705.51
0	100	1	303.60	307.59	311.36	318.3	329.97	352.1
		2	400.92	399.15	397.44	394.23	388.59	377.11
		3	750.05	746.74	743.54	737.53	727.00	705.51
100	100	1	303.62	307.6	311.38	318.31	329.99	352.12
		2	400.92	399.15	397.44	394.23	388.59	377.11
		3	750.05	746.74	743.54	737.53	727.00	705.51

Tableau III.12 : l'effet de l'indice matériel et la fondation élastique sur la fréquence fondamentale d'une plaque en P-FGM avec ($a/h=100$) $T1=100$ et $T2=0$

K_0	K_1	Mode	P					
			0	0.5	1	2	4	10
10	10	1	96.292	97.603	98.836	101.08	104.81	111.75
		2	413.03	412.2	411.31	409.4	405.48	396.09
		3	756.59	753.8	751.05	745.75	736.16	715.84
100	0	1	8.2377	8.8778	9.3609	10.009	10.573	10.344
		2	413.03	412.2	411.31	409.4	405.48	396.09
		3	756.59	753.8	751.05	745.75	736.16	715.84
0	100	1	303.62	307.62	311.41	318.36	330.05	352.17
		2	413.03	412.2	411.31	409.4	405.48	396.09
		3	756.59	753.8	751.05	745.75	736.16	715.84
100	100	1	303.64	307.64	311.42	318.38	330.07	352.19
		2	413.03	412.2	411.31	409.4	405.48	396.09
		3	756.59	753.8	751.05	745.75	736.16	715.84

Tableau III.13 : l'effet de l'indice matériel et la fondation élastique sur la fréquence fondamentale d'une plaque en P-FGM avec $(a/h=100)$ $T_1=100$ et $T_2=100$

K_0	K_1	Mode	P					
			0	0.5	1	2	4	10
10	10	1	96.568	97.9	99.15	101.42	105.18	112.14
		2	413.2	412.58	411.84	410.16	406.46	397.06
		3	756.69	754	751.34	746.17	736.7	716.37
100	0	1	303.71	307.71	311.51	318.47	330.17	352.3
		2	413.2	412.58	411.84	410.16	406.46	397.06
		3	756.69	754	751.34	746.17	736.7	716.37
0	100	1	10.998	11.696	12.239	13.000	13.754	13.898
		2	413.2	412.58	411.84	410.16	406.46	397.06
		3	756.69	754	751.34	746.17	736.7	716.37
100	100	1	303.72	307.73	311.52	318.49	330.19	352.31
		2	413.2	412.58	411.84	410.16	406.46	397.06
		3	756.69	754	751.34	746.17	736.7	716.37

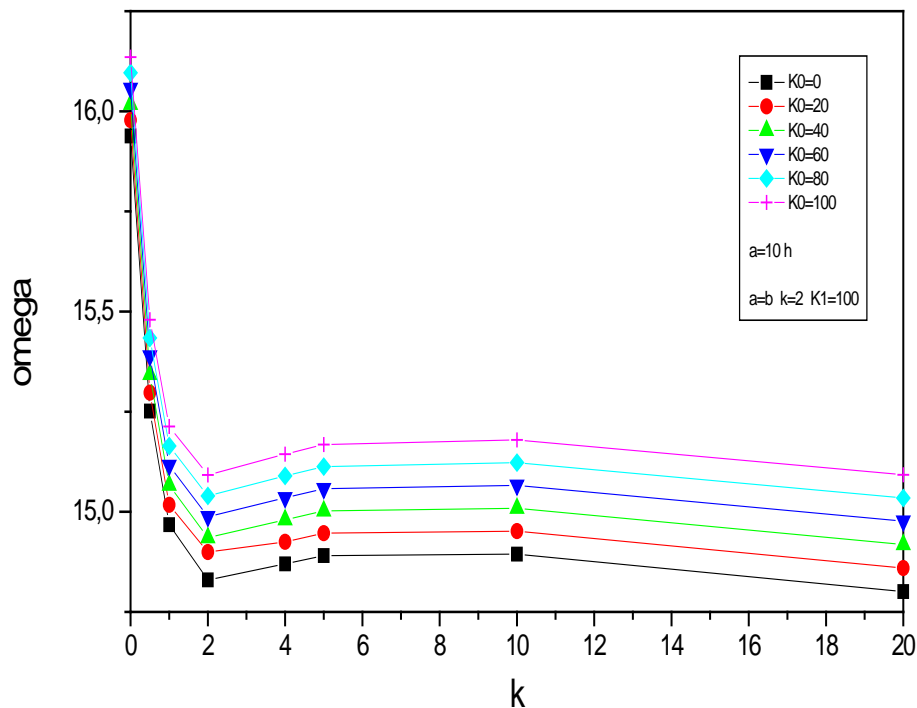


Fig. III.1: Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction de la rigidité élastique transversale K_w et $K_S=100$

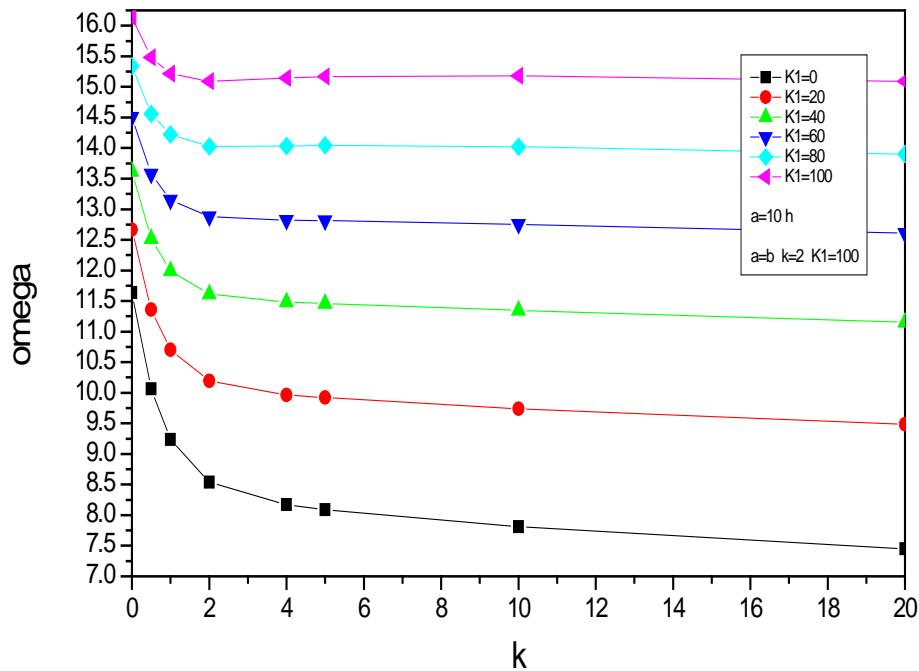


Fig. III.2: Variation de la fréquence fondamentale adimensionnelle $\bar{\omega}$ en fonction de la rigidité élastique de cisaillement K_s et $K_w=100$

Les figures Fig.III.1 et Fig.III.2 montrent la variation de la fréquence adimensionnelle en fonction des coefficients de la fondation élastique correspondante à l'indice de la loi des puissances $p=2$ et le rapport d'épaisseur $a/h=10$. Il est remarquable que les fréquences de la plaque diminuent lorsque les paramètres de la fondation augmentent.

III.5) Conclusion :

En conclusion finale, nous avons également relevé les problèmes traités avec une exactitude et une précision conformes avec cette contribution exprimée par notre théorie proposée, ce qui constitue un axe permet de l'extrapoler au d'autres problèmes sortant du cadre de cette étude de simulation des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

Conclusions et Recommendations

Introduction :

Le développement théorique pour l'analyse des plaques constitue l'un des axes de recherches les plus importants de la modélisation des solides et des structures, avec le progrès rapide de l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés dans les domaines de l'industrie, il est nécessaire de mettre en évidence une théorie adéquate permettant d'analyser les plaques en FGM avec une haute précision sous les différentes configurations géométriques et matérielles, ainsi qu'elles répondent aux exigences techniques sur les divers problèmes de l'ingénierie.

Dans le cadre de ce travail d'étude du comportement thermique et dynamique des plaques en FGM. L'objectif fixé était, d'une part l'étude des vibrations libres des plaques en FGM reposant sur une fondation élastiques, et d'autre part, d'étudier l'influence des paramètres matériels par l'introduction des différents modèles de l'homogénéisation sur le comportement mécanique des plaques en FGM.

Remarques et conclusions :

La précision de la présente théorie a été prouvée dans les deux cas d'analyse, statique et dynamique, pour les plaques en FGM simplement appuyées. Le nombre des inconnues et les équations gouvernantes de la présente théorie est réduit à trois par conséquent il est moins par rapport aux autres théories.

L'équation du mouvement pour les plaques FGM est obtenue par le principe d'Hamilton. La méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec la vibration libre simplement appuyées.

Recommandations pour des travaux futurs :

Le travail que nous avons présenté dans le cadre de notre mémoire de fin étude nous a permis de nous familiariser avec le domaine du développement théorique des plaques en FGM. Nous le considérons comme une base pour un futur développement dans le domaine des matériaux à gradient de propriétés et dans ce contexte l'action à mener pour une continuation et une amélioration de ce travail pour ce résumé dans les points suivants :

- Nous pouvons considérer les résultats obtenus par la présente étude comme une référence à titre de comparaisons avec les autres solutions analytiques ou numériques pour les cas des plaques épaisses en FGM.
- Étendre cette théorie à analyser les structures de type coque épaisse ou avec forte épaisseur en analyse statique et dynamique (vibration libre) car elle fournit une cinématique très assimilable à la géométrie des coques épaisses.
- Adaptation de la présente formulation à étudier les plaques annulaires sectorielles en FGM.
- Effectuer une formulation numérique basée sur cette nouvelle théorie en considérant l'effet de la déformation normale transversale pour l'analyse non linéaire statique (Non-linéarité géométrique ou/et matérielle) et l'analyse non linéaire dynamique sur d'autres cas-tests dans le cas des plaques épaisses en FGM.
- Étudier d'autres cas d'analyse analytique tels que le flambement et le couplage thermomécanique des plaques en FGM .

Références Bibliographique

Abrate.S,2008” Functionally graded plates behave like homogeneous plates” Composites Part B 39 (2008) 151–158.

B. Bary, M.Ben Haha, E.Adam,and P.Montarnal. “Numerical and analytical effective elastic properties of degraded cement pastes.” Cem.Concr.Res.,39(10):902–912,2009.

B. BOUIADJRA .Rabbab, « Contribution à l’Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur Fondations Elastiques » these de Dr Universite D’ORAN ,2015.

E. Carrera.” Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner’s Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells. “Appl. Mech. Revs. 54 (2001) 301-329.

E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. Arch. Comp. Meth. Eng. 10 (2003) 215-296.

E. Carrera, A. Ciuffreda. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. Compos. Struct. 69 (2005) 271-293.

E. Carrera, S. Brischetto, A. Robaldo. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. AIAA Journal 46 (2008) 194-203.

E. Carrera, S. Brischetto, M. Cinefra, M. Soave. Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. Comp. Part B: Eng 42 (2011)123-133.

E. Carrera, S. Brischetto, P. Nali. Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis, Wiley, New York, USA (2011).

E. Carrera, G. Giunta, M. Petrolo, Beam Structures: Classical and Advanced Theories, Wiley, New York, USA (2011).

J.L. Curiel-Sosa, O.A.Bég and J.M Liebana Murillo.” Finite element analysis of structural instability using a switching implicit-explicit technique” Int. J. Comp. Methods Eng. Sci. Mechs., 13 (2013) 452-464.

D.NARIMENE,” Etude et optimisation en environnement Matlab/Simulink d'un système de pompe Photovoltaïque” these de magister Universite Constantine I ,2014.

- E.Feldman, J. Aboudi, "Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading" *Compos Struct.* 38 (1-4) (1997) 29–36.
- D.K. Jha, Tarun Kant, R.K. Singh, A critical review of recent research on functionally graded plates , *Compos. Struct.* 96 (2013) 833–849.
- J.M.Berthelot : "Matériaux Composites- Comportement Mécanique et analyse des structures". Technologie & documents ,Paris,1999.
- H.ZIOU," Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel" these de Dr Université Mohamed Khider – Biskra,2017.
- M. Koizumi, The concept of FGM, *Ceramic Transactions. Functionally Gradient Materials* 34 (1993) 3–10.
- K.Riad," Détection et isolation de défauts combinant des méthodes à base de données appliquées aux systèmes électro-énergétiques" These Dr. UNIVERSITE FERHAT ABBES - SETIF 1 ,2015.
- Li Q, Iu VP, Kou KP. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib* 2008;311(1–2):498–515.
- L. Gornet," Généralités sur les matériaux composites". Enginnering school .2008. col-00470296v1.
- Miyamoto, Y. Shiota, I, *Functionally Graded Materials*, ELSEVIER, (1997).
- Moradi.S, M.H. Mansouri, Thermal buckling analysis of shear deformable laminated orthotropic plates by differential quadrature. *Steel Compos Struct* 12 (2012) 129-147.
- L.F. Qian, R.C. Batra, L.M. Chen. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Comp. Part B: Eng.* 35 (2004) 685-697.
- R. KAMILA," Elaboration, caractérisation mécanique et hygrothermique d'un stratifié renforcé par des fibres naturelles"these de MEMOIRE de magister Universite de Boumerdes,2013.
- Shimpi, R.P., Arya, H., Naik, N.K. "A Higher Order Displacement Model for the Plate Analysis." *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, (2003). ,22(22), 1667 – 1688.
- S. Petibon, "Nouvelles architectures distribuées de gestion et conversion de l'énergie pour les applications photovoltaïques." These Dr. Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2009.

Woo J, Meguid SA. Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *Int J Solids Struct* 2001;38(42–43):7409–21.

Zenkour AM. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech* 2006;77(4):197–214.

Zenkour AM. A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 2013;37(20–21):9041–51.

Zenkour AM. The effect of transverse shear and normal deformations on the thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *Int J Appl Mech* 2009;1(4):667–707.



RAMADAN MUBARAK



Centre Universitaire « SALHI AHMED » de Naama

Institut des science des technologie

Département de technologie



Soutenance de thèse de Master 2

Filière : génie mécanique

Option : énergétique

Intitulé de mémoire

Etude des vibrations thermomécaniques des panneaux solaires sur appuis élastiques

Présente par : Melle AOUISSAT Ouafaa

Encadrée par : Dr BELABED Zakaria

Juin 2018

Plane de travail

Introduction

Revue sur les matériaux non-homogène

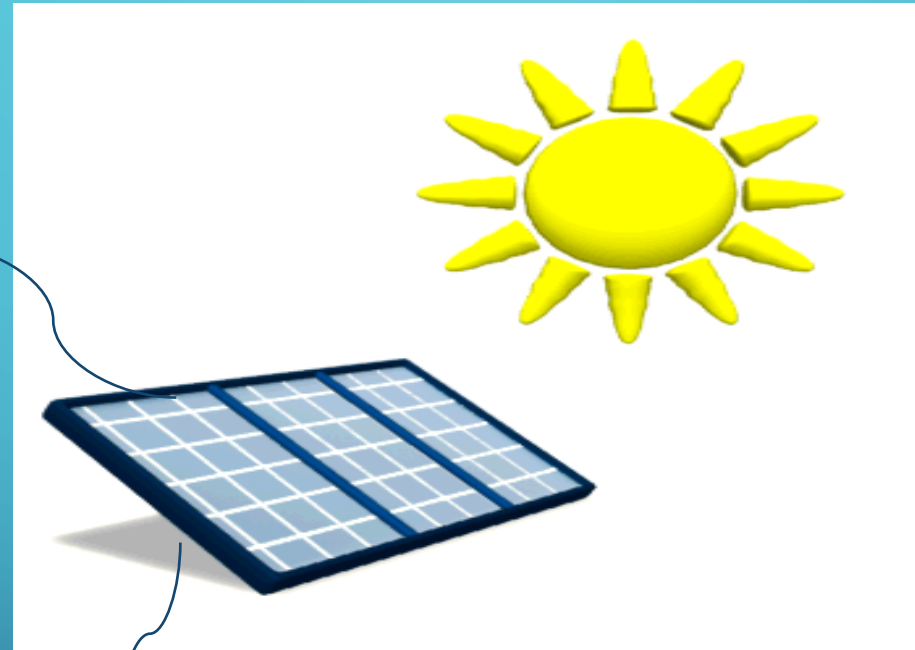
Formulation théorique

Résultats et Discussions

Conclusion et Recommandations

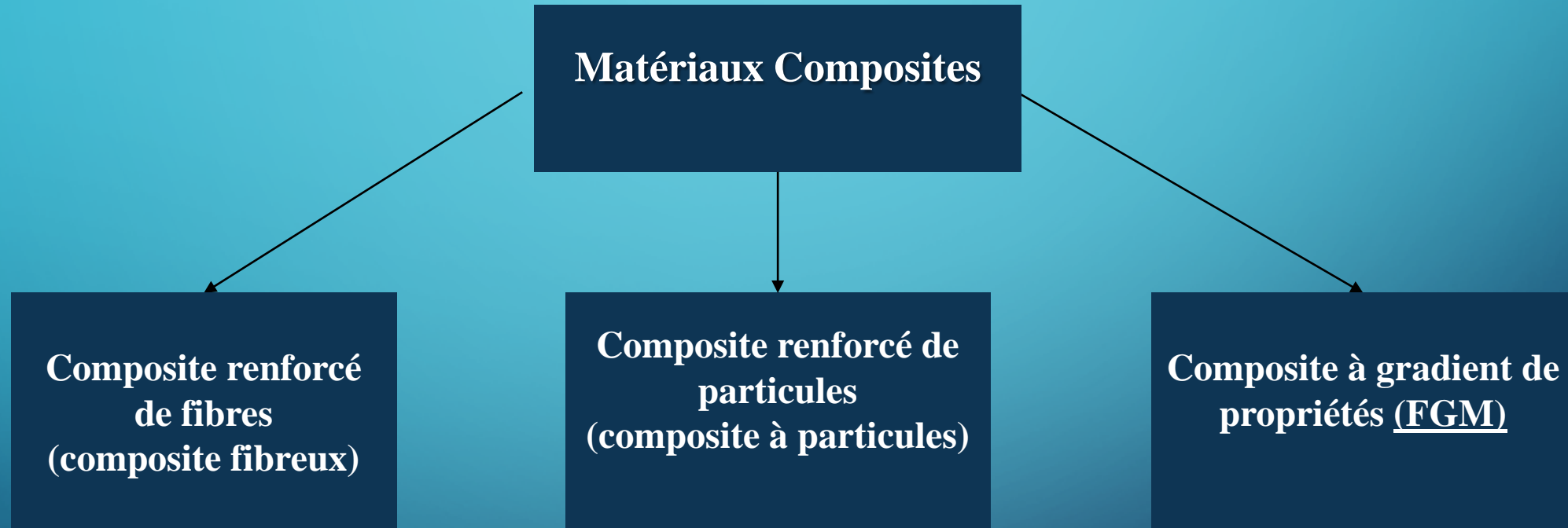
Introduction

Face céramique

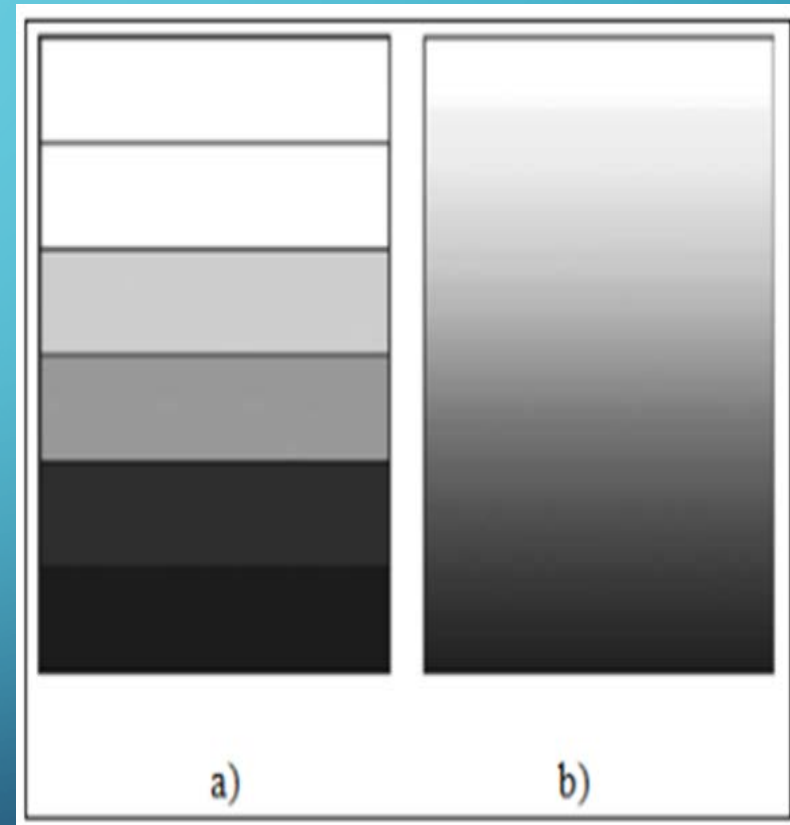
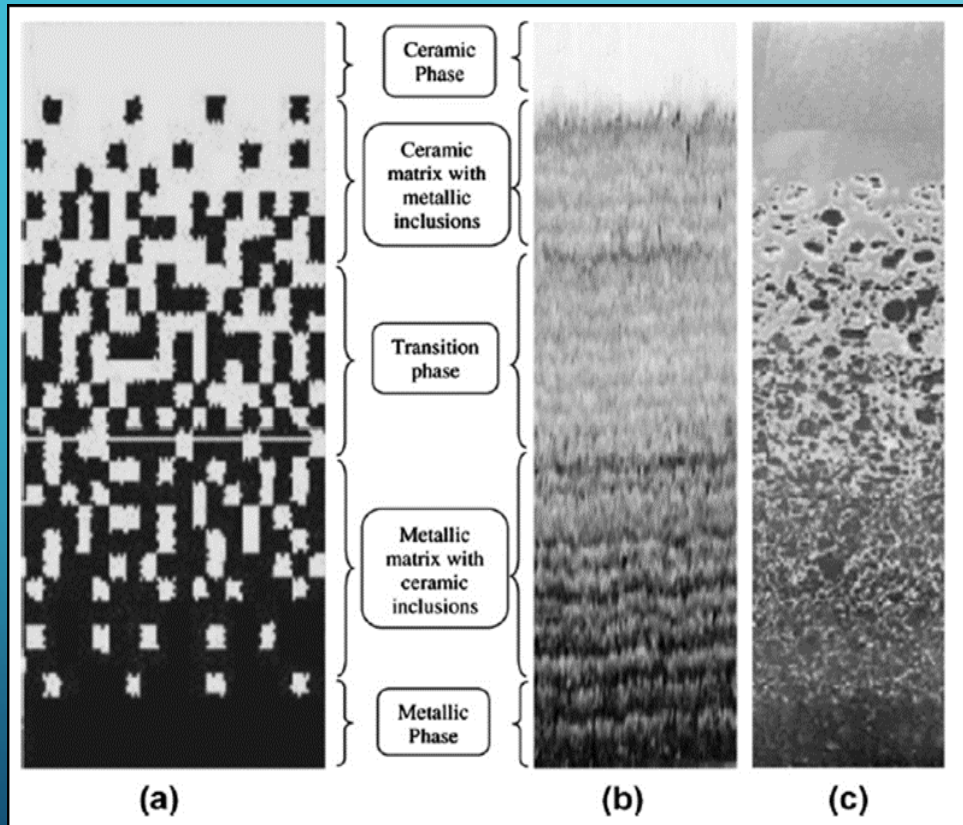


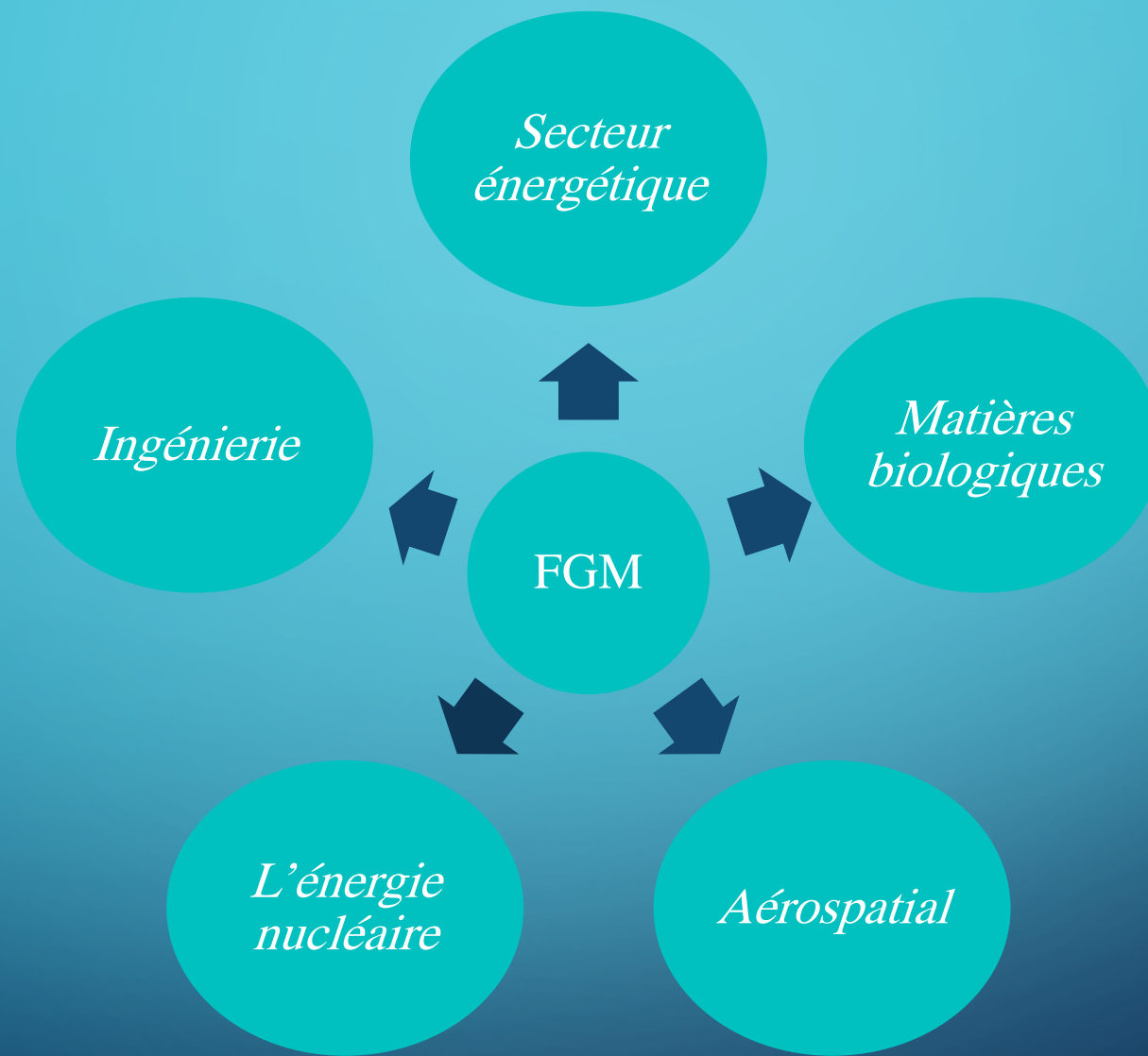
Face métallique

Revue sur les matériaux non-homogene

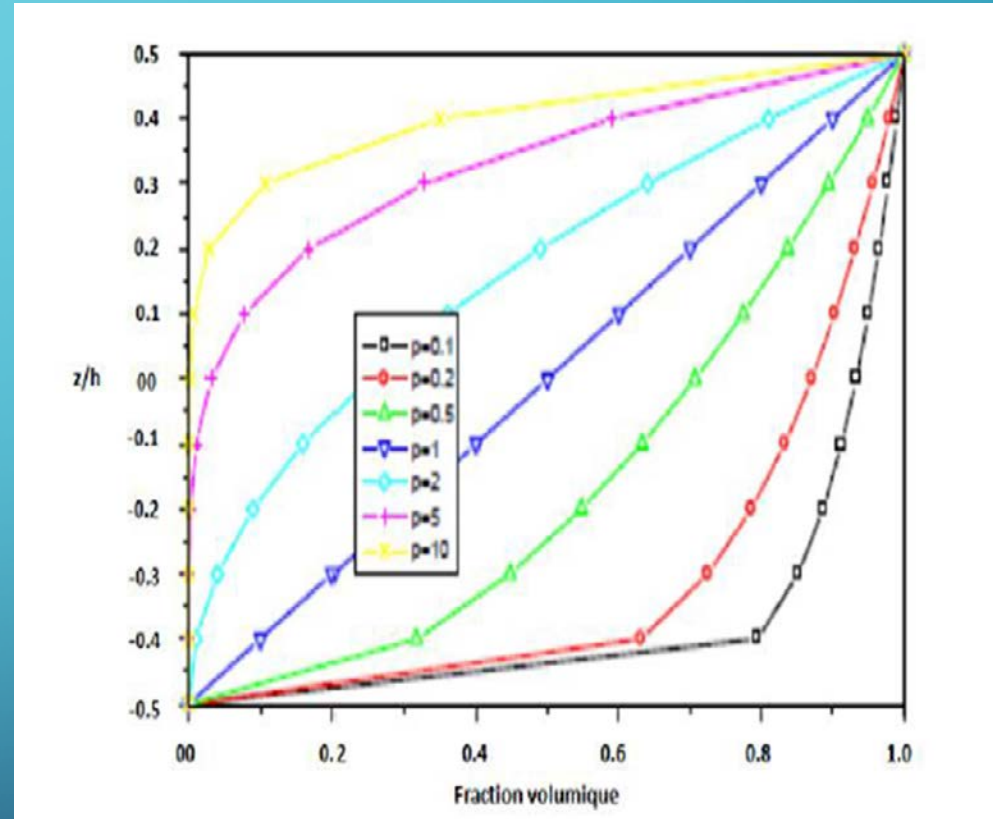
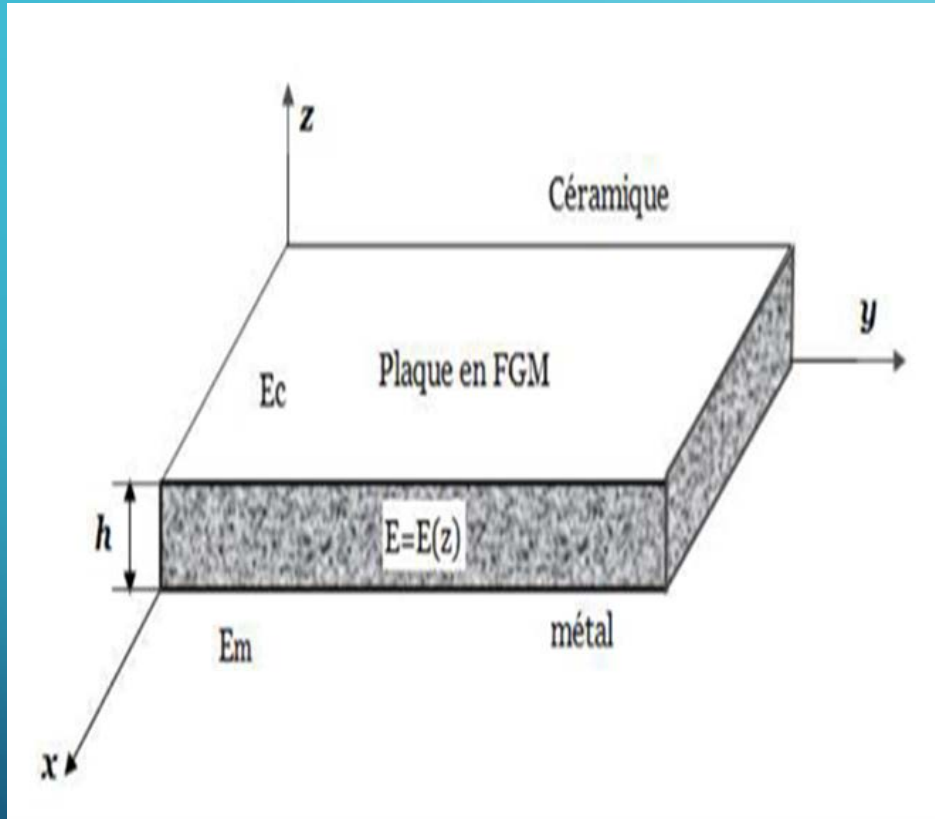


FGM, qu'est-ce que c'est ?

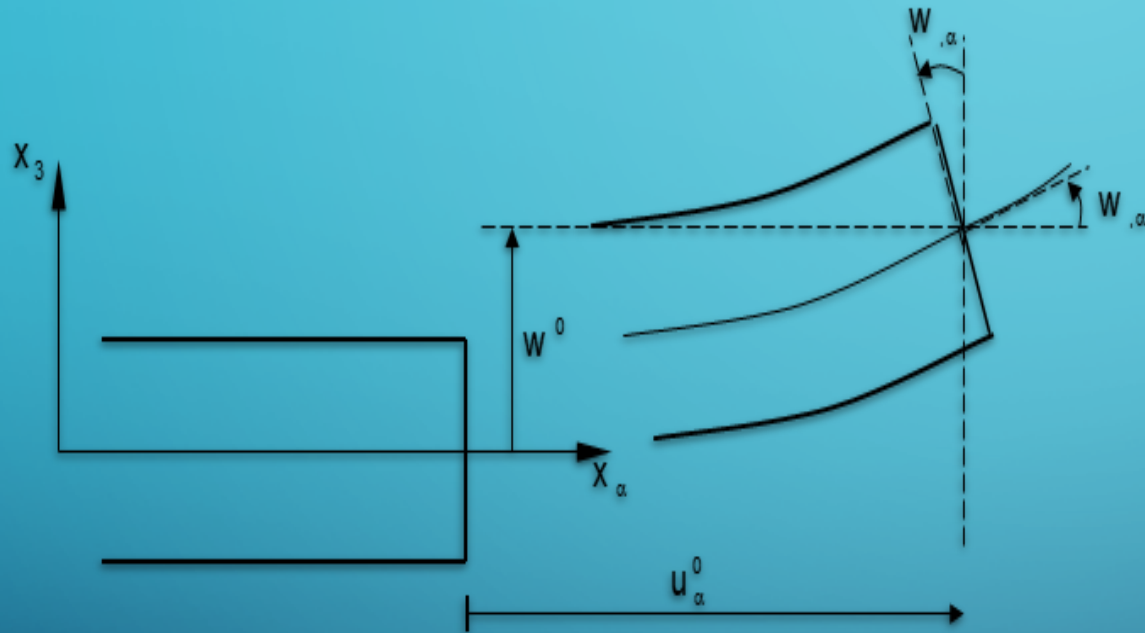




$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^k$$



Formulation théorique



$$\begin{cases} u(x, y, z) = u(x, y) - zw_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v(x, y) - zw_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w(x, y) \end{cases}$$

Cinématique de Kirchhoff

1) Équation de mouvement :

Les équations du mouvement sont obtenues à partir du principe de Hamilton et sont exprimées par la forme variationnelle suivante :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V + \delta P - \delta K) dt$$

δU la variation d'énergie de déformation

δV la variation d'énergie cinétique

δK la variation du travail des efforts extérieurs

δP la variation de l'énergie de la fondation élastique

1.a) Variation de l'énergie de déformation :

la variation de l'énergie de déformation pour une plaque en FGM est définie par :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) dV$$

l'expression finale de la variation de l'énergie de déformation s'exprime à l'aide de variables des contraintes et des déformations

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] dA$$

1.b) Variation de l'énergie de la fondation élastique:

La variation de l'énergie de la fondation élastique s'exprime sous la forme :

$$\delta V = \int_A f_e \delta(w) dA$$

1.c) Expression du travail des efforts extérieurs:

Le travail des forces extérieures appliquées à la plaque s'exprime par :

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_V \delta\{u^v\}^T dV + \int_S \delta\{u^s\}^T dS + \sum \delta\{u^i\}$$

1.d) Variation de l'énergie cinétique :

La variation d'énergie cinétique peut s'exprimer par :

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dV$$

L'expression final de la variation d'énergie cinétique alors s'écrite :

$$\delta K = \frac{1}{2} \int_A \{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + (\dot{w})(\delta \dot{w})] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} \right) \}$$

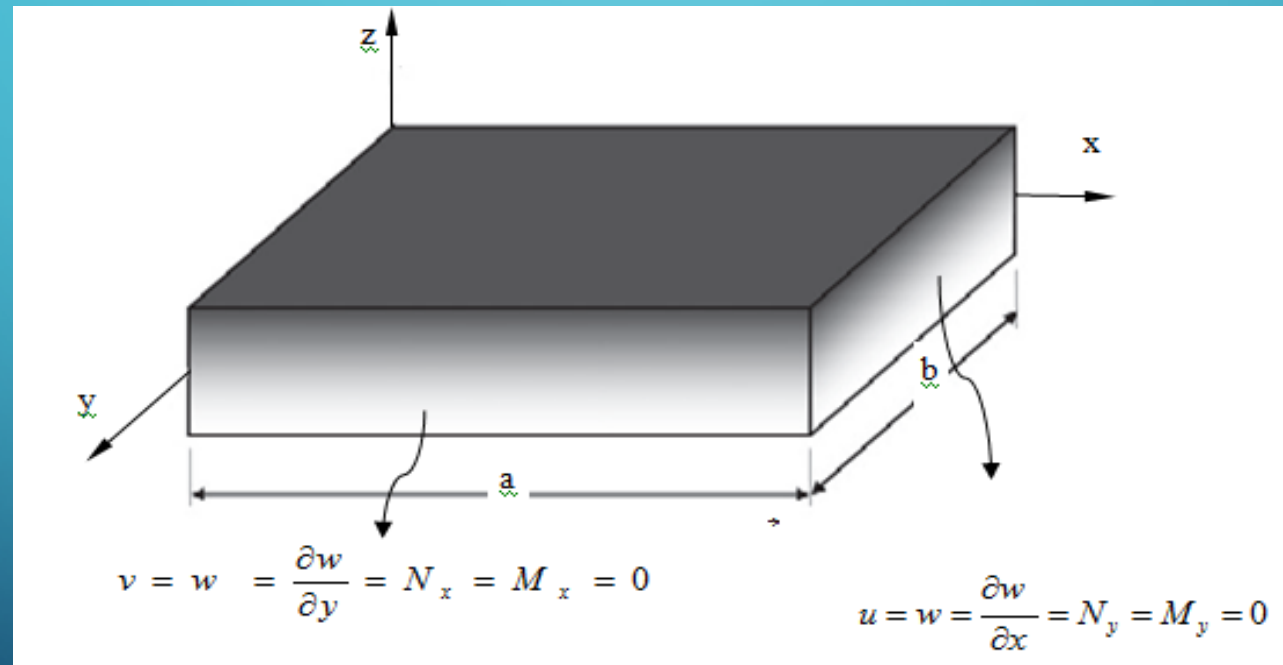
2) Résumé des relations fondamentales du mouvement :

Comme une synthèse , les équations d'équilibres s'écrivent:

$$\begin{aligned}\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial N_r}{\partial x} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_r}{\partial y} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \\ \delta w : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + f_z &= I_0 (\ddot{w}) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}\end{aligned}$$

3) Solution Analytique :

Nous considérons une plaque simplement appuyée de dimensions (a) et (b) et chargée dans leur plan par une charge uniforme (q). La stratégie adaptée pour la résolution des problèmes traités dans ce travail est basée sur la méthode de Navier.



Les composantes du vecteur de déplacement (u,v,w) sont exprimées par la forme de double série de Fourier comme la suite:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix}$$

la solution analytique est obtenue sous forme matricielle.

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Résultats et Discussions

Cas statiques :

- étude d'une plaque épaisse isotrope sous chargement uniforme
- étude d'une plaque en P-FGM type Al/Al₂O₃ avec l'étude de l'influence de l'épaisseur
- analyse des plaques en P-FGM de type Al/Al₂O₃ modérément épaisse $a/h=10$

caractéristiques des matériaux utilisés

Propriétés	Métal	Céramique	
	Aluminum (Al)	Alumina (Al ₂ O ₃)	Zirconia (ZrO ₂)
E(GPa)	70	380	200
ν	0.3	0.3	0.3
P(kg/m ³)	2702	3800	5700

a/h	Mode(m, n)	Indice material (p)				
		0	0.5	1	4	10
10	1(1,1)	6.752	6.7752	6.7925	6.7921	6.5018
	2(1,2)	18.161	18.24	18.305	18.451	18.053
	3(2,2)	24.657	24.698	24.718	24.511	23.243
50	1(1,1)	8.2298	8.285	8.3332	8.4996	8.4595
	2(1,2)	20.781	20.923	21.047	21.483	21.418
	3(2,2)	27.796	29.217	29.332	29.57	28.728
100	1(1,1)	8.2386	8.294	8.3425	8.5101	8.4711
	2(1,2)	20.837	20.98	21.106	21.55	21.492
	3(2,2)	29.199	29.344	29.463	29.715	28.885

Mode	a/h	p				
		0	0.5	1	4	10
1	10	6.7520	6.7752	6.7925	6.7921	6.5018
	50	6.9786	7.0079	7.0307	7.055	6.781
	100	6.9861	7.0156	7.0386	7.0637	6.7903
2	10	40.092	39.915	39.744	38.859	37.711
	50	200.46	199.57	198.72	194.3	188.56
	100	400.92	399.15	397.44	388.59	377.11
3	10	75.022	74.69	74.371	72.714	70.561
	50	375.03	373.37	371.77	363.5	352.76
	100	750.05	746.74	743.54	727.00	705.51

Mode	a/b	p				
		0	0.5	1	4	10
1	1	6.9861	7.0156	7.0386	7.0637	6.7903
	2	4.9273	4.9576	4.9836	5.0646	5.0024
	4	4.6816	4.7169	4.7484	4.8685	4.8957
2	1	400.92	399.15	397.44	388.59	377.11
	2	316.95	315.55	314.2	307.21	298.13
	4	292.22	290.92	289.68	283.23	274.86
3	1	750.05	746.74	743.54	727.00	705.51
	2	592.97	590.35	587.82	574.74	557.75
	4	546.69	544.27	541.94	529.88	514.22

a/h	Mode (m,n)	Indice material (p)				
		0	0.5	1	4	10
10	1(1,1)	6.7635	6.7939	6.8167	6.8309	6.5385
	2(1,2)	18.174	18.26	18.329	18.486	18.084
	3(2,2)	24.673	24.719	24.745	24.551	23.278
50	1(1,1)	7.1655	7.3707	7.5305	7.916	7.6271
	2(1,2)	19.829	20.108	20.335	20.976	20.681
	3(2,2)	28.011	28.305	28.536	29.000	27.871
100	1(1,1)	7.6582	8.3282	8.8282	10.045	9.7263
	2(1,2)	20.347	21.084	21.662	23.205	22.838
	3(2,2)	28.662	29.483	30.122	31.664	30.509

Mode	a/h	p				
		0	0.5	1	4	10
1	10	6.7635	6.7939	6.8167	6.8309	6.5385
	50	7.1655	7.3707	7.5305	7.916	7.6271
	100	7.6582	8.3282	8.8282	10.045	9.7263
2	10	40.214	40.047	39.885	39.032	37.905
	50	203.51	202.86	202.22	198.56	193.36
	100	413.03	412.2	411.31	405.48	396.09
3	10	75.087	74.761	74.446	72.806	70.665
	50	376.67	375.14	373.65	365.8	355.35
	100	756.59	753.8	751.05	736.16	715.84

Mode	a/b	p				
		0	0.5	1	4	10
1	1	7.6582	8.3282	8.8282	10.045	9.7263
	2	5.5118	6.0923	6.5218	7.5824	7.4373
	4	5.2081	5.7383	6.1328	7.1266	7.0517
2	1	413.03	412.2	411.31	405.48	396.09
	2	326.13	325.44	324.71	319.99	312.49
	4	297.11	296.21	295.29	290.06	282.55
3	1	756.59	753.8	751.05	736.16	715.84
	2	600.41	598.38	596.36	585.17	569.51
	4	555.25	553.51	551.77	541.86	527.72

a/h	Mode (m,n)	Indice material (p)				
		0	0.5	1	4	10
10	1(1,1)	6.8001	6.8337	6.8592	6.8833	6.5988
	2(1,2)	18.205	18.293	18.365	18.53	18.133
	3(2,2)	24.706	24.756	24.784	24.599	23.333
50	1(1,1)	8.037	8.2943	8.4982	9.0538	8.9253
	2(1,2)	20.644	20.985	21.263	22.092	21.935
	3(2,2)	28.934	29.302	29.595	30.291	29.357
100	1(1,1)	10.571	11.284	11.836	13.352	13.445
	2(1,2)	23.38	24.276	24.991	27.051	27.143
	3(2,2)	32.148	33.177	33.993	36.215	35.701

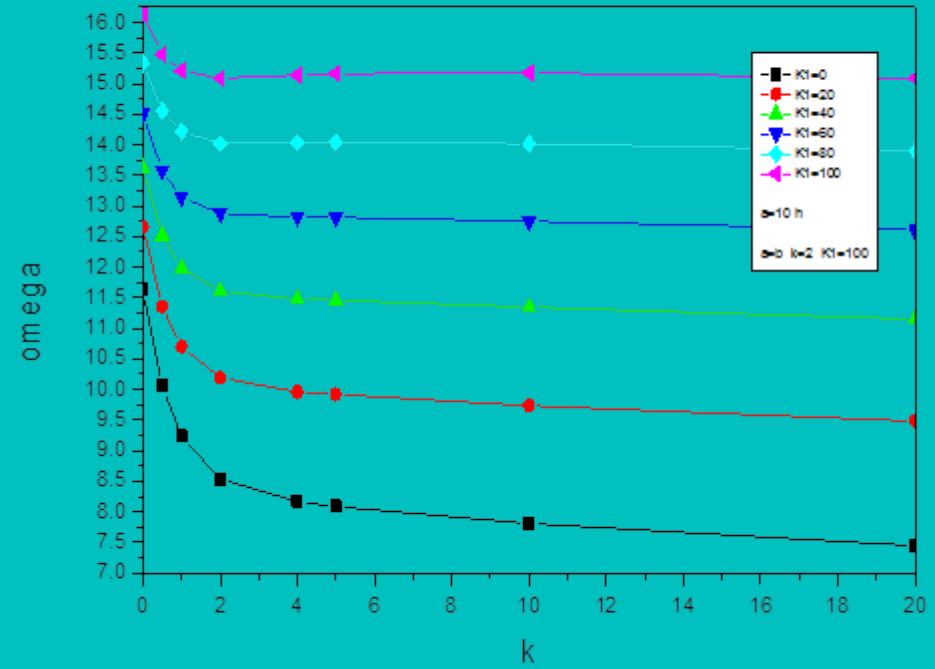
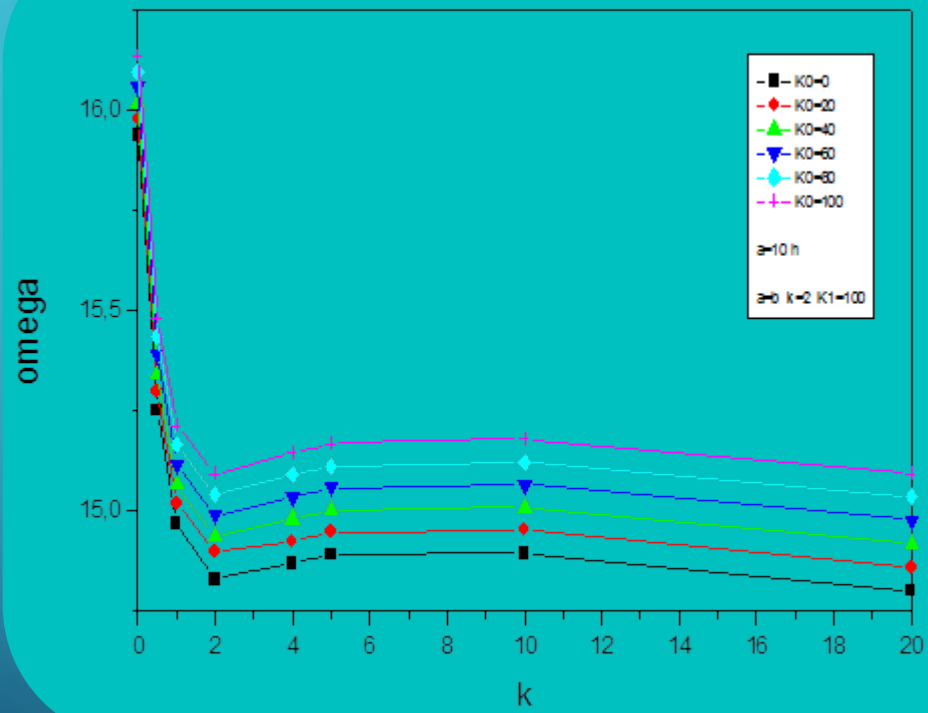
Mode	a/h	p				
		0	0.5	1	4	10
1	10	6.8001	6.8337	6.8592	6.8833	6.5988
	50	8.037	8.2943	8.4982	9.0538	8.9253
	100	10.571	11.284	11.836	13.352	13.445
2	10	40.216	40.051	39.89	39.042	37.915
	50	203.55	202.96	202.35	198.81	193.61
	100	413.2	412.58	411.84	406.46	397.06
3	10	75.088	74.763	74.449	72.812	70.67
	50	376.69	375.19	373.73	365.93	355.48
	100	756.69	754.00	751.34	736.7	716.37

Mode	a/b	p				
		0	0.5	1	4	10
1	1	10.571	11.284	11.836	13.352	13.445
	2	7.9733	8.565	9.0217	10.289	10.449
	4	7.4392	7.9836	8.4049	9.587	9.7735
2	1	413.2	412.58	411.84	406.46	397.06
	2	326.26	325.72	325.11	320.73	313.22
	4	297.18	296.36	295.51	290.47	282.94
3	1	756.69	754.00	751.34	736.7	716.37
	2	600.52	598.61	596.7	585.79	570.11
	4	555.37	553.78	552.15	542.57	528.42

K_0	K_1	Mode	P					
			0	0.5	1	2	4	10
10	10	1	96.241	97.500	98.692	100.88	104.57	111.54
		2	400.92	399.15	397.44	394.23	388.59	377.11
		3	750.05	746.74	743.54	737.53	727.00	705.51
100	0	1	7.6169	7.6599	7.6962	7.7502	7.7961	7.6486
		2	400.92	399.15	397.44	394.23	388.59	377.11
		3	750.05	746.74	743.54	737.53	727.00	705.51
0	100	1	303.60	307.59	311.36	318.3	329.97	352.1
		2	400.92	399.15	397.44	394.23	388.59	377.11
		3	750.05	746.74	743.54	737.53	727.00	705.51
100	100	1	303.62	307.6	311.38	318.31	329.99	352.12
		2	400.92	399.15	397.44	394.23	388.59	377.11
		3	750.05	746.74	743.54	737.53	727.00	705.51

K_0	K_1	Mode	P					
			0	0.5	1	2	4	10
10	10	1	96.292	97.603	98.836	101.08	104.81	111.75
		2	413.03	412.2	411.31	409.4	405.48	396.09
		3	756.59	753.8	751.05	745.75	736.16	715.84
100	0	1	8.2377	8.8778	9.3609	10.009	10.573	10.344
		2	413.03	412.2	411.31	409.4	405.48	396.09
		3	756.59	753.8	751.05	745.75	736.16	715.84
0	100	1	303.62	307.62	311.41	318.36	330.05	352.17
		2	413.03	412.2	411.31	409.4	405.48	396.09
		3	756.59	753.8	751.05	745.75	736.16	715.84
100	100	1	303.64	307.64	311.42	318.38	330.07	352.19
		2	413.03	412.2	411.31	409.4	405.48	396.09
		3	756.59	753.8	751.05	745.75	736.16	715.84

K_0	K_1	Mode	P					
			0	0.5	1	2	4	10
10	10	1	96.568	97.9	99.15	101.42	105.18	112.14
		2	413.2	412.58	411.84	410.16	406.46	397.06
		3	756.69	754	751.34	746.17	736.7	716.37
100	0	1	303.71	307.71	311.51	318.47	330.17	352.3
		2	413.2	412.58	411.84	410.16	406.46	397.06
		3	756.69	754	751.34	746.17	736.7	716.37
0	100	1	10.998	11.696	12.239	13.000	13.754	13.898
		2	413.2	412.58	411.84	410.16	406.46	397.06
		3	756.69	754	751.34	746.17	736.7	716.37
100	100	1	303.72	307.73	311.52	318.49	330.19	352.31
		2	413.2	412.58	411.84	410.16	406.46	397.06
		3	756.69	754	751.34	746.17	736.7	716.37



Conclusion et Recommandations

Dans ce travail nous avons abordé les deux aspects suivants :

1. Formulation théorique basée sur le modèle de Kirchhoff , pour analyser les vibrations thermomécaniques des panneaux solaires

2. Étude de l'effet des paramètres de la fondation élastique sur les vibrations

- La précision de la présente théorie a été prouvée dans le cas thermique et mécanique, pour un panneau solaire simplement appuyé. Le nombre des inconnues et les équations gouvernantes de la présente théorie est réduite à trois par conséquent il est moins par rapport aux autres théories .
- L'équation du mouvement pour les plaques FGM est obtenue par le principe d'Hamilton . la méthode de Navier est utilisée pour les solutions analytiques de la plaque à gradient de propriétés avec la vibration libre simplement appuyée

Recommandations pour des travaux futurs

Étudier d'autres cas d'analyse analytique tels que le flambement et le couplage thermomécanique des plaques en FGM

Adaptation de la présente formulation à étudier les plaques annulaires sectorielles en FGM



RAMADAN MUBARAK

