

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE « SALHI AHMED » DE NAAMA



INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE TECHNOLOGIE

MEMOIRE DE MASTER

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Energétique

Intitulé de Mémoire

Etude et Simulation par MATLAB d'une Cavité Différentiellement Chauffée

Présenté par :

BEGHNI Abdelghani

BEHLOUL Abdallah

Soutenu publiquement le : 24/05/2017, devant le jury :

M. BADAOUI Abdelhamid	MAA	CU Naama	Président
M. KAID Noureddine	MAA	CU Naama	Encadreur
M. NAIMA Khatir	MCB	CU Naama	Examineur

Année universitaire 2016-2017

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

A mes chers parents,

A mes frères et sœurs,

A toute ma famille et à mes amis.

Abdelghani

Dédicaces

*A mon père et ma très chère maman,
Qui m'ont éclairé le chemin en me donnant la main tout au
long de mes années d'étude « Que Allah me les gardes ».*

A mes frères.

A mes sœurs.

A tous mes amis sans exception.

Abdallah

Remerciements

Notre premier remerciement va à **Allah soubhanou w taàla** le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin.

Nous remercions vivement et chaleureusement notre encadreur Monsieur **KAID Noureddine** pour son aide et ses conseils qui ont contribué à la réalisation de ce travail, et particulièrement apprécié ses encouragements, ses conseils et la liberté qu'il nous a accordée dans la poursuite de notre travail. Nous lui sommes aussi très reconnaissants pour nous avoir sensibilisé à l'importance de la communication scientifique.

Nos vifs remerciements s'adressent à **M. BADAoui Abdelhamid**, d'avoir accepté la présidence du jury. Mes remerciements s'adressent également aux membres de jury M. NAIMA Khatir pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter de participer au jury.

A tous nos professeurs du département de Génie Mécanique et les enseignants, qui ont contribué de près ou de loin de m'avoir aidé.

Table De Matière

Dédicaces :.....	i
Remerciements :.....	iii
Table des matières :	iv
Liste des figures :	vii
Liste des tableaux :.....	v
Nomenclature :.....	vi

<i>Introduction générale</i> :.....	1
-------------------------------------	----------

Chapitre I : Généralités et Synthèse bibliographiques

I.1. Introduction :.....	3
I.2. Notions Sur La Convection :.....	3
I.2.1. Définition :.....	3
I.2.2. Type De Convection :	3
I.2.3. Convection Naturelle :.....	3
I.3. Convection dans les cavités :.....	4
I.3.1. Cavité avec gradient vertical de température :.....	4
I.3.2. Cavité avec gradient horizontal de température :.....	5
I.4. Les nombres Adimensionnelle :.....	6
I.5. Synthèse Bibliographique :.....	8

Chapitre II : Géométrie et Formulation Mathématique

II-1- Introduction:.....	11
II-2- Description du problème :.....	11
II.3. Equations gouvernantes :.....	12
➤ Equation de continuité :.....	12

➤ Équation de mouvement (Navier-stokes) :.....	12
➤ Equation de l'énergie :	13
II.4. Hypothèses simplificatrices :	13
II.4.1. Approximation de Boussinesq :.....	13
➤ Equation de continuité :	13
➤ Equation de quantité de mouvement :.....	13
➤ Equation de l'énergie :	14
II.5. Adimensionnalisation des équations :	14
➤ Equation de continuité :	14
➤ Equation de quantité de mouvement :.....	14
➤ Equation de l'énergie :	14
II.5.1. La formulation de fonction de vortacité et de courant Ψ et ω :.....	15
II.6. Conditions aux limites et les conditions initiales:	16
II.8. Calcul du nombre de Nusselt :.....	16
II.7. conclusion :.....	17

Chapitre III : Méthode Numérique

III.1. Introduction :	18
III.2. Méthode des différences finies :	18
III.3. Maillage :.....	18
III.4. Discrétisation Des Différentes Dérivées:	19
III.4.1. La Discrétisation Temporelle :.....	19
III.4.2. La Discrétisation Des Termes Diffusifs:.....	19
III.4.3. La Discrétisation Des Termes Convectifs:.....	20
III.5. Discrétisation Des Systèmes D'équations :.....	20
III.5.1. Discrétisation de l'équation d'énergie :	20
III.5.2. Discrétisation de L'équation De Vortacité :	21
III.5.3. Discrétisation de L'équation De La Fonction De Courant :.....	21
III.5.4 Champ De Vitesses :	22
III.6. Conditions Initiales Et Conditions Aux Limites :	22
III.6.1. La température :	22
III.6.2. Les vitesses :	23
III.6.3. la vortacité :.....	23
III.6.4. la fonction de courant :.....	23
III.7. les conditions CFL (Courant–Friedrich–Lewy)	24
III.8. Critère De Convergence	24
III.9.le programme MATLAB :.....	24

III.10. Organigramme :	24
III.11. Conclusion :	26

Chapitre IV : Résultat et discussions

IV.1. Introduction :	27
IV.2. L'influence Du Maillage Sur Les Résultats :	27
IV.3. Validation De Code De Calcule:	27
IV.4. Les Résultats :	33
IV.4.1 Cavité Avec Rapport D'aspect Déférant à 1 :	33
IV.4.1.1. Rapport D'aspect Supérieur à 1 :	33
IV.4.1.1.3. Nombre De Nusselt Local :	36
IV.4.1.2. Rapport D'aspect Inferieur à 1 :	37
IV.4.1.2.1. Les Isothermes :	37
IV.4.1.2.2. Les Lignes De Courant :	38
IV.4.1.2.3. Nombre De Nusselt Local :	39
IV.4.1.3. Nombre De Nusselt Moyen En Fonction De Rapport D'aspect :	40
IV.4.2. Cavité Carré Avec Variation Du Parti Active :	40
IV.4.2.2. Les Lignes De Courant :	42
IV.4.2.3. Nombre De Nusselt Local :	44
IV.4.2.4. Nombre De Nusselt Moyen :	46
IV.4.3. Cavité Carré Avec Ailettes Adiabatique :	47
IV.4.3.1 Cavité Carré Avec Ailettes Adiabatique En Bas:	47
IV.4.3.1.1. Les Isothermes :	47
IV.4.3.2. Cavité Carré Avec Ailettes Adiabatique En haut:	50
IV.4.3.3. Nombre De Nusselt Moyen :	53
IV.5.conclusion :	54
<i>Conclusion General :</i>	56
<i>Références Bibliographiques :</i>	57
<i>Annexe :</i>	58
<i>Résumé :</i>	59

Liste de figure

Figure I.1. Schéma représentatif de la particule fluide et le mécanisme de base de la convection de Rayleigh-Bernard	4
Figure I.2. Schéma représentatif des rouleaux de la convection de Rayleigh –Bernard	5
Figure I.3. Schéma de la convection dans une cavité avec gradient de température horizontal	6
Figure I.4. Les modèles physique utilise par Valencia et Frederick	9
Figure II.1. les configurations du problème physique	12
Figure II.2. les conditions aux limites sous forme adimensionnelles	16
Figure III.1. Schéma du maillage uniforme	18
Figure III.2. L’organigramme du programme	25
Figure.IV.1. les isothermes pour nombre de Rayleigh qui varié de 10^3 jusqu’à 10^5 . Comparaison entre nos résultats et les résultats de Vahl davis [3].....	28
Figure.IV.2. les vorticité pour nombre de Rayleigh qui varié de 10^3 jusqu’à 10^5 . Comparaison entre nos résultats et les résultats de Vahl davis [3].....	29
Figure.IV.3. les ligne de courant pour nombre de Rayleigh qui varié de 10^3 jusqu’à 10^5 . Comparaison entre nos résultats et les résultats de Vahl davis [3].....	30
Figure.IV.4. les champs de vitesses U pour nombre de Rayleigh qui varié de 10^3 jusqu’à 10^5 . Comparaison entre nos résultats et les résultats de Vahl davis [3].....	31
Figure.IV.5. les champs de vitesses V pour nombre de Rayleigh qui varié de 10^3 jusqu’à 10^5 . Comparaison entre nos résultats et les résultats de Vahl davis [3].....	32
Figure.IV.6. Les Isothermes pour A=2 et Déférant Nombre De Rayleigh (a)Ra= 10^3 , (b)Ra= 10^4 et (c)Ra= 10^5	34

Figure.IV.7. Les Isothermes pour $A=4$ et Déférant Nombre De Rayleigh (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$	34
Figure.IV.8. Les Liges De Courant pour $A=2$ et Déférant Nombre De Rayleigh (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$	35
Figure.IV.9. Les Liges De Courant pour $A=4$ et Déférant Nombre De Rayleigh (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$	36
Figure.IV.10. La variation du nombre de Nusselt local dans les parois active pour Déférant aspect A (a) $A=2$, (b) $A=4$	36
Figure.IV.11. Les Isothermes pour $A=1/2$ et Déférant Nombre De Rayleigh (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$	37
Figure.IV.12. Les Isothermes pour $A=1/4$ et Déférant Nombre De Rayleigh (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$	38
Figure.IV.13. Les Liges De Courant pour $A=1/2$ et Déférant Nombre De Rayleigh (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$	38
Figure.IV.14. Les Liges De Courant pour $A=1/4$ et Déférant Nombre De Rayleigh (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$	39
Figure.IV.15. La variation du nombre de Nusselt local dans les parois active pour Déférant aspect A (a) $A=0.5$, (b) $A=0.25$	39
Figure.IV.16. La variation du nombre de Nusselt moyenne sur la paroi chaude en fonction de rapport d'aspect A pour les trois nombres de Rayleigh	40
Figure.IV.17. Les isothermes pour déférant Nombre De Rayleigh et pour les déférents model....	42
Figure.IV.18. Les lignes de courent pour déférant Nombre De Rayleigh et pour les déférents model	44
Figure.IV.19. La variation du nombre de Nusselt local dans les parois active pour les déférents model	45
Figure.IV.20. La variation du nombre de moyen dans la paroi active chaude en fonction de les déférents model pour les défèrent nombre de Rayleigh.....	46
Figure.IV.21. Les isotherme pour déférant Nombre De Rayleigh et pour les déférents model $Ha=(0.25, 0.50, 0.75)$	47
Figure.IV.22. Les lignes de courent pour déférant Nombre De Rayleigh et pour les déférents model $Ha=(0.25, 0.50, 0.75)$	48
Figure.IV.23. la variation du nombre de Nusselt local pour les deux parois active en fonction de hauteur de cavité pour déférant Nombre De Rayleigh et pour les déférents model $Ha=(0.25, 0.50, 0.75)$	49
Figure.IV.24. Les isotherme pour déférant Nombre De Rayleigh et pour les déférents model $Ha=(0.25, 0.50, 0.75)$	50

Figure.IV.25. Les lignes de courant pour différents Nombre De Rayleigh et pour les différents modèles $Ha = (0.25, 0.50, 0.75)$ 51

Figure.IV.26. la variation du nombre de Nusselt local pour les deux parois active en fonction de hauteur de cavité pour différents Nombre De Rayleigh et pour les différents modèles $Ha = (0.25, 0.50, 0.75)$ 52

Figure.IV.27. La variation du nombre de moyen dans la paroi active chaude de la cavité avec ailette en bas en fonction de les différents modèles pour les différents nombre de Rayleigh..... 53

Figure.IV.28. La variation du nombre de moyen dans la paroi active chaude de la cavité avec ailette en haut en fonction de les différents modèles pour les différents nombre de Rayleigh..... 53

Liste Des Tableaux

Tableau IV.1. Effet du maillage sur le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude..... 27

Nomenclature

g	Accélération gravitationnelle	[m/s ²]
H	Hauteur de la cavité,	[m]
H_a	Hauteur d'ailette	
L	Longueur de la cavité,	[m]
A	Rapport d'aspect,	
P	Pression,	[N/m ²]
C_p	Chaleur spécifique à pression constante,	[J Kg ⁻¹ K ⁻¹]
t	Temps,	[s]
h	Coefficient de convection,	[W m ⁻² K ⁻¹]
T	Température dimensionnelle,	[K]
T_c	Température dimensionnelle de la paroi chaude,	[K]
T_f	Température dimensionnelle de la paroi froide,	[K]
u, v	Composantes horizontale et verticale dimensionnelles de la vitesse,	[m/s]
U, V	Composantes horizontale et verticale adimensionnelles de la vitesse	
x, y	Coordonnées cartésiennes dimensionnelles,	[m]
X, Y	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles	

Nombres Adimensionnelles

Gr	Nombre de Grashof
Ra	Nombre de Rayleigh
Nu	Nombre de Nusselt local
$\langle Nu \rangle$	Nombre de Nusselt moyen
Pr	Nombre de Prandtl
Pe	Nombre de Péclet

Symboles grecs

B	Coefficient d'expansion thermique à pression	[K ⁻¹]
θ	Température adimensionnelle	
θ_c	Température adimensionnelle du paroi Chaude	
θ_f	Température adimensionnelle du paroi Froide	

Φ	Variable dépendante générale.	
ν	Viscosité cinématique	[m ² /s]
μ	Viscosité dynamique	[Kg/m.s]
ρ	Masse volumique	[kg/m ³]
ρ_0	Masse volumique à T ₀	[kg/m ³]
τ	Temps adimensionnel,	
Ω	Vorticité adimensionnelle.	
Ψ	Fonction de courant adimensionnelle.	
$\Delta\tau$	Incrément du temps adimensionnel.	
ΔT	Différence de température	[K]

Introduction Générale

Introduction Générale

Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies. Bien qu'il se manifeste sous diverses formes (rayonnement, conduction et convection), cette dernière est la plus visée dans certains domaines bien spécifiés tels que le refroidissement des processeurs et des composantes électroniques, les radiateurs et les échangeurs de chaleurs des procédés industriels, etc.

Avec le développement prodigieux des techniques modernes, il est devenu indispensable à tout chercheur, quel que soit le domaine où il sera appelé, à posséder de bonnes connaissances des lois fondamentales de transfert thermique.

Par conséquent, afin d'optimiser ces systèmes, il devient important de connaître les écoulements de convection (naturelle forcée ou mixte).

La convection naturelle désigne le processus de transfert thermique résultant du mouvement des particules élémentaires d'un fluide entre des zones ayant des températures différentes. Ce mouvement entraîne un mélange des particules fluides, qui échangent de l'énergie et de la quantité de mouvement entre elles. Contrairement à la convection forcée, dont le mouvement du fluide est dû à un apport externe d'énergie, la convection naturelle a pour origine les variations de la masse volumique au sein même du fluide, liées aux variations de sa température. La structure et l'intensité de la convection naturelle sont en relation directe avec les sollicitations thermiques extérieures qui la déclenchent, la nature du fluide et la géométrie de l'espace où a lieu le processus.

Plusieurs configurations géométriques, plus ou moins complexes ont été examinées sous des approches théoriques, numériques ou expérimentales et dans la présente étude, nous exposons plusieurs cas d'une cavité avec deux côtés active en se basant sur une approche numérique. Ce type de cavités, on les rencontre dans de nombreux domaines industriels, notamment au cours de la maintenance des équipements et composés électroniques.

Pour résoudre les problèmes de transfert thermique, on doit recourir à des méthodes numériques dans le cas où on ne peut pas les résoudre analytiquement. Parmi ces méthodes les plus utilisées, on peut citer les différences finies, éléments finis, volumes finis...etc.

L'étude, présentée dans ce mémoire, s'inscrit dans le cadre de l'étude de la convection naturelle dans une cavité avec une des parois actives. Notre but étant de trouver la conception optimale qui permet un contrôle thermique adéquat et une performance énergétique maximale. On considérera en particulier l'influence des paramètres suivants : le rapport d'aspect, la variation de la partie active de la cavité, le gradient de température appliqué (nombre de Rayleigh), la longueur et la position de l'ailette sur les champs dynamiques et thermiques ainsi que sur le nombre de Nusselt.

Introduction Général

Notre étude est présentée en quatre chapitres :

Elle débute par une introduction générale sur le transfert thermique et son importance, en présentant l'objectif essentiel du présent travail.

Le premier chapitre, concerne la théorie générale de la convection thermique naturelle, et quelques travaux numériques et expérimentaux menés en convection utilisant respectivement :

Le modèle physique choisi, à savoir les équations gouvernantes ainsi que les conditions aux limites associées constituent le contenu du deuxième chapitre.

Le troisième chapitre s'intéresse à la description de la méthode des différences finis, ainsi que la discrétisation des équations différentielles du modèle mathématique obtenu.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation des résultats numériques avec des interprétations et comparaisons avec les résultats contenus dans la littérature.

Enfin, une conclusion générale, qui résume les principaux résultats obtenus, est donnée à la fin du mémoire. Quelques recommandations pour les études futures sont également formulées.

Chapitre I :
Généralités et Synthèse
Bibliographique

I.1. Introduction :

Ce chapitre a pour but de présenter les connaissances actuelles relatives à la convection naturelle dans les cavités, tant d'un point de vue théorique qu'expérimental. On s'intéresse en particulier à l'effet de type de la cavité et leurs concentrations sur le transfert de chaleur. On s'attache également à décrire l'influence de plusieurs paramètres sur la convection naturelle tel que la forme de la géométrie (cavité carrée et rectangulaire), et la variation des parties actives.

I.2. Notions Sur La Convection :

I.2.1. Définition :

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un fluide (liquide ou gaz). Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes.

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes, L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules.

Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transfèrent une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement [13].

I.2.2. Type De Convection :

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement

Aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée.

Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite mixte.

I.2.3. Convection Naturelle :

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité due au non uniformité du champ de température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut (Rayleigh-Bernard), suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud.

Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre.

L'intervention du poids a pour effet de donner à la verticale un rôle privilégié. La définition de la géométrie d'un système convectif doit donc faire intervenir la forme et les dimensions ainsi que la disposition par rapport à la verticale.

Les effets de convection naturelle sont familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents, les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle. En outre et selon les conditions aux limites, les études relatives à la convection sont souvent menées dans les cavités.

I.3. Convection dans les cavités :

L'étude de la convection naturelle des fluides dans les cavités a fait l'objet d'un très grand nombre de travaux tant théoriques qu'expérimentaux. L'intérêt de son étude réside dans son implication dans de nombreux phénomènes naturels et industriels, tels que le refroidissement des circuits électroniques et des réacteurs nucléaires, l'isolation des bâtiments (cas du double vitrage), industrie métallurgique, la croissance des cristaux pour l'industrie des semi-conducteurs, etc. [14]

La cavité carrée continue à être la géométrie qui présente le plus d'intérêt. Dans ce type de cavité, généralement deux parois sont maintenues à des températures différentes tandis que les autres sont isolées (Adiabatique). On distingue principalement deux configurations, la première est une cavité contenant un fluide et soumise à un gradient vertical de température (convection de Rayleigh-Bénard), la deuxième est une cavité avec un gradient horizontal de température tel que :

I.3.1. Cavité avec gradient vertical de température :

Quand on impose un gradient de température verticale du fond au sommet de la cavité, on a ce qu'on appelle la convection de Rayleigh-Bénard. Elle a une longue et riche histoire elle a été étudiée durant des décennies aussi bien pour ses différentes applications industrielles que du point de vue recherche fondamentale. Le mécanisme de base de cette convection est comme suivi. Les parois horizontales de la cavité étant respectivement chauffées et refroidies, par suite de différence de température, la chaleur s'écoule entre le fluide et le corps et provoque une variation de densité des couches fluides au voisinage de la surface. La différence de densité crée un écoulement descendant pour le fluide le plus lourd et un écoulement ascendant pour le fluide le plus léger. Quand le gradient de température est vertical avec paroi supérieure chaude et paroi inférieure froide, on n'aura pas de mouvement et par conséquent pas de convection, le fluide est thermiquement stratifié et on a le cas stable [4].

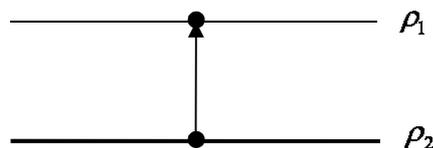


Figure I.1 : Schéma représentatif de la particule fluide et le mécanisme de base de la convection de **Rayleigh-Bernard**

La perturbation fait monter rapidement une particule de façon qu'elle garde sa masse volumique constante (figure I.1). Deux cas peuvent se produire :

- Si $\rho_2 > \rho_1$

La force d'Archimède est inférieure à son poids, la particule redescend, le mouvement est stable

- Si $\rho_2 < \rho_1$

La force d'Archimède est supérieure à son poids, la particule continue à monter, le mouvement est instable

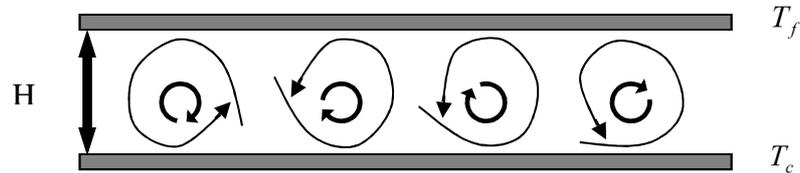


Figure I.2: Schéma représentatif des rouleaux de la convection de **Rayleigh – Bernard.**

Les paramètres adimensionnels qui caractérisent cette instabilité est le nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{g\beta \frac{(T_c - T_f)}{L} H^4}{\vartheta\alpha}$$

Où :

g : Accélération de la pesanteur [m/s^2].

β : Coefficient de dilatation [K^{-1}].

α : Diffusivité thermique [m^2/s].

ν : Viscosité volumique [m^2/s].

H : Hauteur de la cavité[m].

L : Longueur de la cavité[m].

T_c : Température de la paroi chaude [K].

T_f : Température de la paroi froide [K].

- L'élément perturbateur : poussée d'Archimède.
- L'élément tabulateurs : la viscosité et la conductivité thermique.

Si $Ra < 1710 = Ra_c$, L'écoulement est stable.

Si $Ra \geq 1710 =$ Apparition des rouleaux de Bénard.

Ra_c : Étant La valeur critique de Rayleigh dans une couche horizontale infinie.

I.3.2. Cavité avec gradient horizontal de température :

Dans cette configuration, les parois verticales sont chauffées et refroidie, alors que les parois horizontales sont considérées comme adiabatiques (FigureI.3). L'écoulement est alors monocellulaire avec le fluide ascendant le long de la paroi chaude et descendant suivant la paroi froide. Pour $Ra \leq 10^3$, le transfert de la chaleur est principalement par conduction dans le fluide et le nombre de Nusselt est égal à l'unité. [14]

C'est cette dernière configuration qui fera l'objet de notre étude avec des cavités qui contiennent un

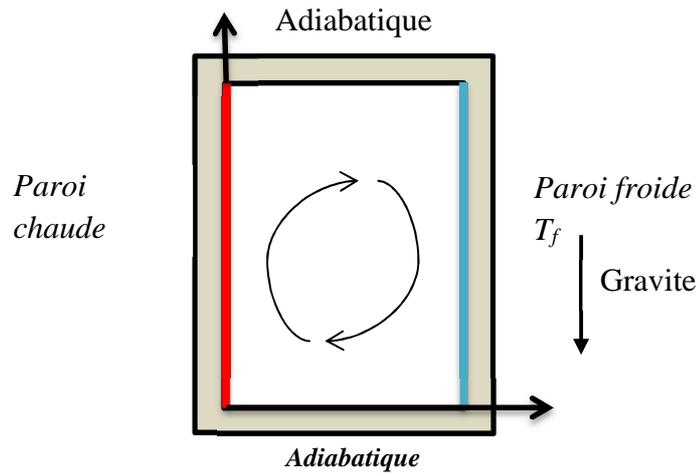


Figure I.3: Schéma de la convection dans une cavité avec gradient de température horizontal

fluide newtonien incompressible comme fluide de convection.

I.4. Les Nombres Adimensionnelle :

Une grandeur adimensionnelle (ou grandeur sans dimension) est une quantité permettant de décrire une caractéristique physique sans dimension ni unité explicite d'expression. Elle est constituée du produit ou rapport de grandeurs à dimensions, de telle façon que le rapport des unités équivaut à un. Ces grandeurs sans dimension interviennent particulièrement en mécanique des fluides et pour la description de phénomène de transfert lorsqu'on utilise la similitude de modèles réduits ou théorie. Elles portent le nom de nombres sans dimension, nombres adimensionnels, ou encore de nombres caractéristiques.

Les nombres adimensionnels les plus utilisés dans le domaine de la convection sont :

Le Nombre de Reynolds : représente le rapport entre les forces d'inerties et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante :

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Avec

U_0 : vitesse caractéristique du fluide [m/s]

L : dimension caractéristique [m]

ν : viscosité cinématique du fluide [m²/s]

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$, ρ masse volumique du fluide [kg/m³]

μ : viscosité dynamique du fluide [kg/m.s]

Le Nombre de Prandtl : qui est le rapport de la viscosité cinématique ν et la diffusivité thermique α , il caractérise l'importance relative des effets thermiques et visqueux, Ce nombre porte le nom de Ludwig Prandtl, physicien allemand : $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$.

Le nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Un nombre de Prandtl faible indique que la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température.

Le Nombre de Peclet : est un nombre sans dimension utilisé en transfert thermique et en transfert massique. Il représente le rapport de deux temps caractéristiques : celui du transfert par convection et celui du transfert par conduction (ou par diffusion pour les transferts massiques). Il est équivalent au produit du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl dans le cas du transfert thermique. Ce nombre porte le nom d'Eugène Péclet, physicien français : $Pe = \frac{U_0 L}{\alpha} = Re * Pr$

Le Nombre de Grashof : est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection naturelle dans un fluide. Il correspond au rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses. Ce nombre porte le nom de Franz Grashof, ingénieur allemand. On le définit de la manière suivante : $Gr = \frac{g\beta\theta L}{\nu^2}$

Avec :

g : Accélération de la pesanteur.

β : Coefficient de dilatation.

Le Nombre de Richardson : qui compare les effets de la gravité à ceux de l'inertie :

$$Ri = \frac{g\beta\theta L}{U_0^2}$$

Le nombre de Richardson sera le paramètre de convection mixte puisqu'il est fonction du paramètre de convection naturelle (Gr) et du paramètre de convection forcée (Re) : $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$

Le Nombre de Rayleigh : est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides et caractérisant le transfert de chaleur au sein d'un fluide : inférieur à une valeur critique de 2000, le transfert s'opère essentiellement par conduction, tandis qu'au-delà de cette valeur c'est la convection naturelle qui devient importante. On peut le définir comme le produit du nombre de Grashof, reliant les effets de la force gravifique à la viscosité du fluide, et du nombre de Prandtl. Ce nombre porte le nom de Lord Rayleigh, physicien anglais. On le définit de la manière suivante :

$$Ra = \frac{g\beta H^3 (T_H - T_L)}{\nu\alpha} = Gr * Pr$$

Le Nombre de Nusselt : est un nombre adimensionnel utilisé dans les opérations de transfert thermique. Il représente le rapport entre le transfert thermique convectif et le transfert thermique conductif à travers une interface (souvent fluide/solide). Si la conduction est le principal

mode de transfert, alors le nombre de Nusselt sera de l'ordre de l'unité. En cas de présence de convection (due par exemple au déplacement d'un fluide en régime turbulent), le transfert thermique s'effectuera principalement par déplacement du fluide et aura pour conséquence de faire étendre le nombre de Nusselt vers l'infini.

On le définit de la manière suivante : $Nu = \frac{hH}{k}$

h : Coefficient de transfert thermique.

H : Longueur caractéristique.

k : Conductivité thermique du fluide.

I.5. Synthèse Bibliographique :

Les études de la convection naturelle dans des cavités confinées constituent depuis plusieurs années, l'objet de plusieurs recherches, du fait de son implication dans de nombreux phénomènes naturels et applications industrielles.

Les premiers travaux portant sur la convection naturelle ont été entrepris, dans les années 60 du 20^{ème} siècle, par Davis et al. [1] et [2]. Ces auteurs ont utilisé la méthode des différences finies pour résoudre le problème de convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée. Ces études ont eu le mérite de lancer une compétition internationale sur le sujet. Elles ont montré que la distribution de température à mi-hauteur de la cavité est presque linéaire et le gradient thermique vertical tend vers zéro pour les valeurs du nombre de Rayleigh inférieures à 10^4 .

A la fin des années quatre-vingt, et grâce au développement des algorithmes de résolution et l'amélioration des puissances de calcul des ordinateurs, Davis [3] a proposé une solution standard dite Benchmark pour le cas de la cavité carrée différentiellement chauffée en régime laminaire. La formulation du problème utilisée par Davis est la celle de la fonction de courant-vorticité (ψ, ω). Les équations modifiées par l'interaction d'un terme transitoire sont discrétisées par la méthode des différences finies.

Valencia et Frederick [4] ont présenté une analyse numérique de la convection naturelle de l'air dans des cavités carrées avec des parois verticales partiellement actives, ils ont considéré cinq positions relatives différentes des zones actives (figure I.4). Ils ont trouvé que la circulation dépend fortement de la longueur totale de sortie des zones actives, par contre le transfert de chaleur dépend moins de ce paramètre. En outre, le transfert de chaleur dans le cas (d fig. 1.1) est élevé, car cette situation donne la distance minimale entre les points situés sur les surfaces chaudes et froides.

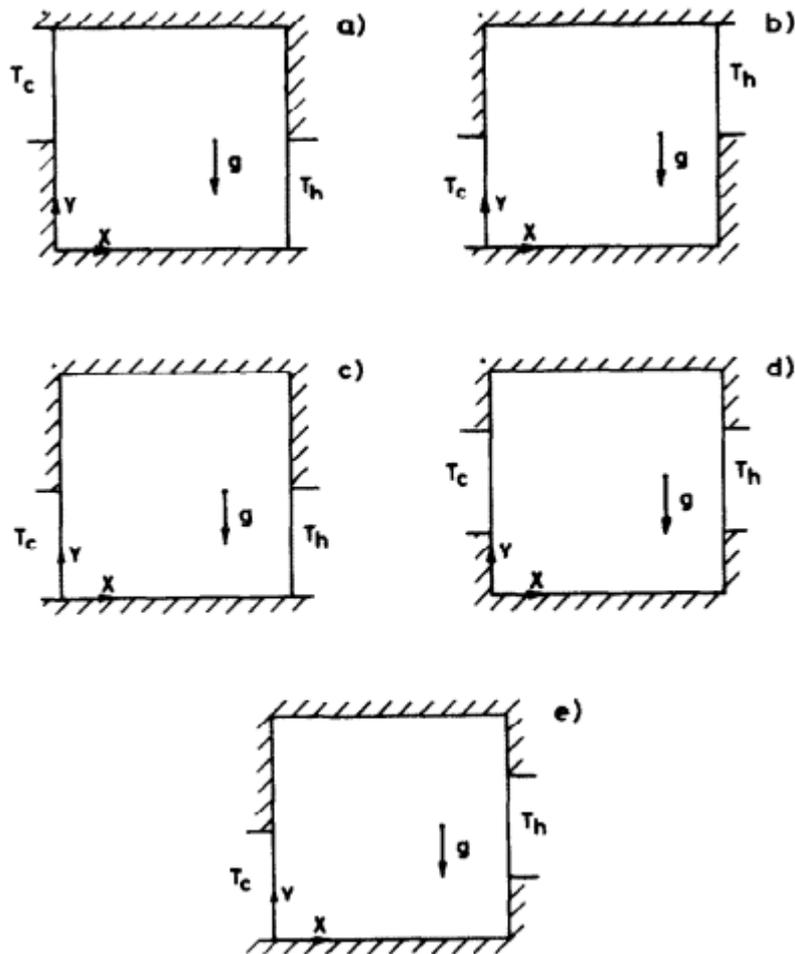


Figure 1.4. Le modèle physique utilisé par Valencia et Frederick [4]

Sheikhzadeh et al. [5] ont étudié la convection naturelle du Cu-eau nanofluide dans une cavité carrée partiellement chauffée avec variation des parties actives, ils ont considéré neuf modèles de la position des zones actives

El-Refae et al [6] ont étudié numériquement la convection naturelle dans des cavités inclinées, partiellement refroidies et différenciellement chauffées avec différents rapports d'aspect.

L'effet du rapport d'aspect sur la convection naturelle bidimensionnelle stationnaire dans une cavité rectangulaire poreuse est analysé numériquement par Prasad et Kulacki [7]. L'écoulement multicellulaire a été trouvé pour un rapport d'aspect $Ar \leq 1$ et la structure de l'écoulement comporte une cellule de recirculation primaire avec des petites cellules secondaires à l'intérieur. Le nombre de Nusselt augmente toujours quand le rapport d'aspect augmente.

Lakhal et al. [8] ont étudié numériquement ce problème pour une cavité rectangulaire inclinée avec une ailette à conductivité thermique élevée. Ils ont étudié les effets du rapport des longueurs (longueur de l'ailette/ longueur de la cavité).

Shi et Khodadadi [9] ont considéré les longueurs de l'ailette mince égales à 20 %, 35 % et 50 % du côté de la cavité. L'ailette a été placée à 7 endroits différents sur la paroi chaude pour $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$ et 10^7 et pour $Pr = 0,707$. Ils ont trouvé qu'il y a une réduction du transfert thermique à la paroi chaude par rapport à une cavité sans ailette. Pour une cavité sans ailette, le transfert thermique sur la paroi froide peut être augmenté pour des nombres de Rayleigh élevés, et pour une cavité avec ailette

il faut placer ces ailettes près des parois isolées pour faire croître le transfert de chaleur au niveau de la paroi froide.

Tasnim et Collins [10] ont étudié numériquement les effets du nombre de Rayleigh, de la position et de la longueur d'une ailette sur la performance du transfert thermique. Ils ont trouvé que l'introduction d'une ailette augmente le flux de chaleur moyen transféré au fluide de 31,46 % par rapport à une cavité sans ailette pour $Ra = 10^4$.

Juel et al. [11] ont mené une étude expérimentale et numérique en 3D qui a montré l'importance de l'effet de la troisième dimension sur l'écoulement convectif du Gallium (Ga) liquide.

Chapitre II :
Géométrie et
Formulation Mathématique

II-1- Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons établir les différentes équations mathématiques, permettant la résolution du problème considéré (étude convection naturelle dans une cavité chauffée).

Dans le transfert de chaleur par convection naturelle, nous distinguons les nombres de Rayleigh, Grashof, Prandtl et autres nombres, représentés par plusieurs propriétés physiques dépendantes de la température. L'importance mutuelle de ces propriétés dépend des conditions thermiques et des facteurs géométriques. L'objectif de ce problème consiste à l'étude de l'échange thermique dans une cavité avec deux côtés partiellement actifs.

II-2- Description du problème :

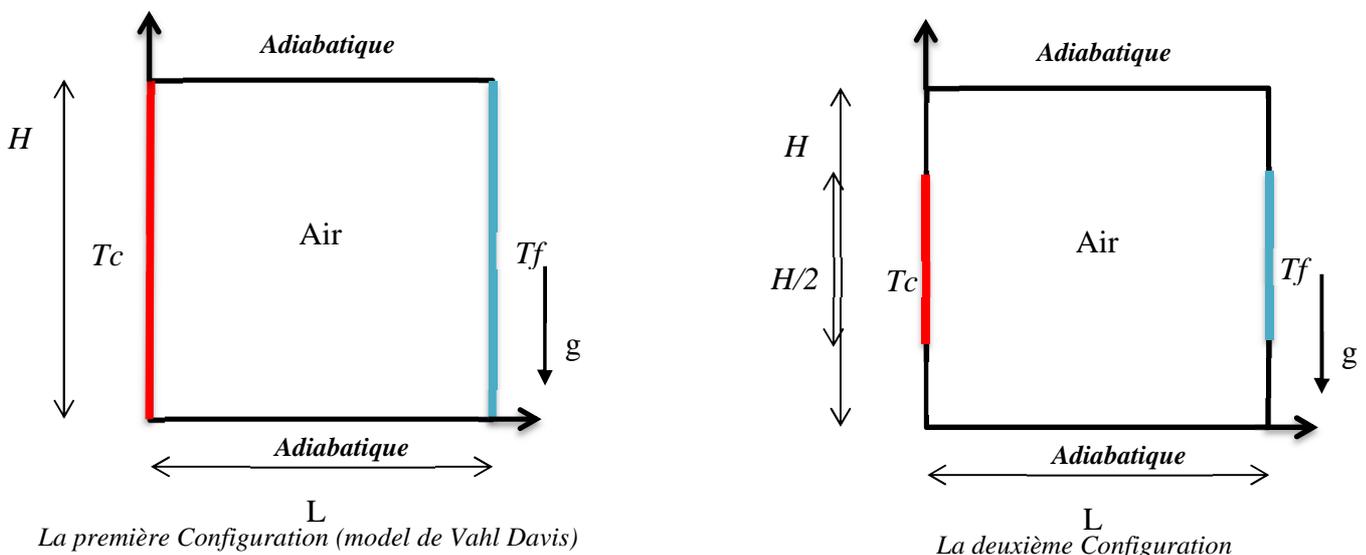
Les pionniers qui étudier le transfert de chaleur dans les cavités (**G. Vahl Davis, [3]**) ont basé leur étude sur une cavité carrée, qui être considéré comme une référence pour les autres chercheurs.

Dans cette étude on va établir un code de calcul maison qui donne des résultats pour notre problème et ce code sera validé avec l'étude de **G. Vahl Davis, [3]**.

Dans ce cas nous avons traités quatre modèles de géométrie de la cavité du problème physique considéré est schématisé sur la figure (II-1). Le premier model est une cavité carrée bidimensionnelle différentiellement chauffée (modèle de validation), Le deuxième modèle est celui d'une cavité carrée avec variation de la partie active de la paroi latéral $L=H$, dans la troisième configuration il s'agit d'une cavité rectangulaire avec variation du rapport d'aspect A et la dernière configuration est de cavité avec des ailettes adiabatiques. Dans tous les cas la cavité est remplie de fluide, qui est dans notre cas l'air ($Pr=0.71$).

Les parois différentiellement chauffées dans les cavités sont maintenues à deux températures différentes et uniformes (dans le deuxième modèle les parties actives des parois latérales est $H/2$ de parois), les parois active nommées respectivement, T_c et T_f ($T_c > T_f$). Les parois horizontales $y = 0$ et $y = H$ sont adiabatiques.

L'écoulement dans la cavité est induit par la force de flottabilité (Buoyancy), résultante de la différence de densité, qui est à son tour due à un gradient de température.



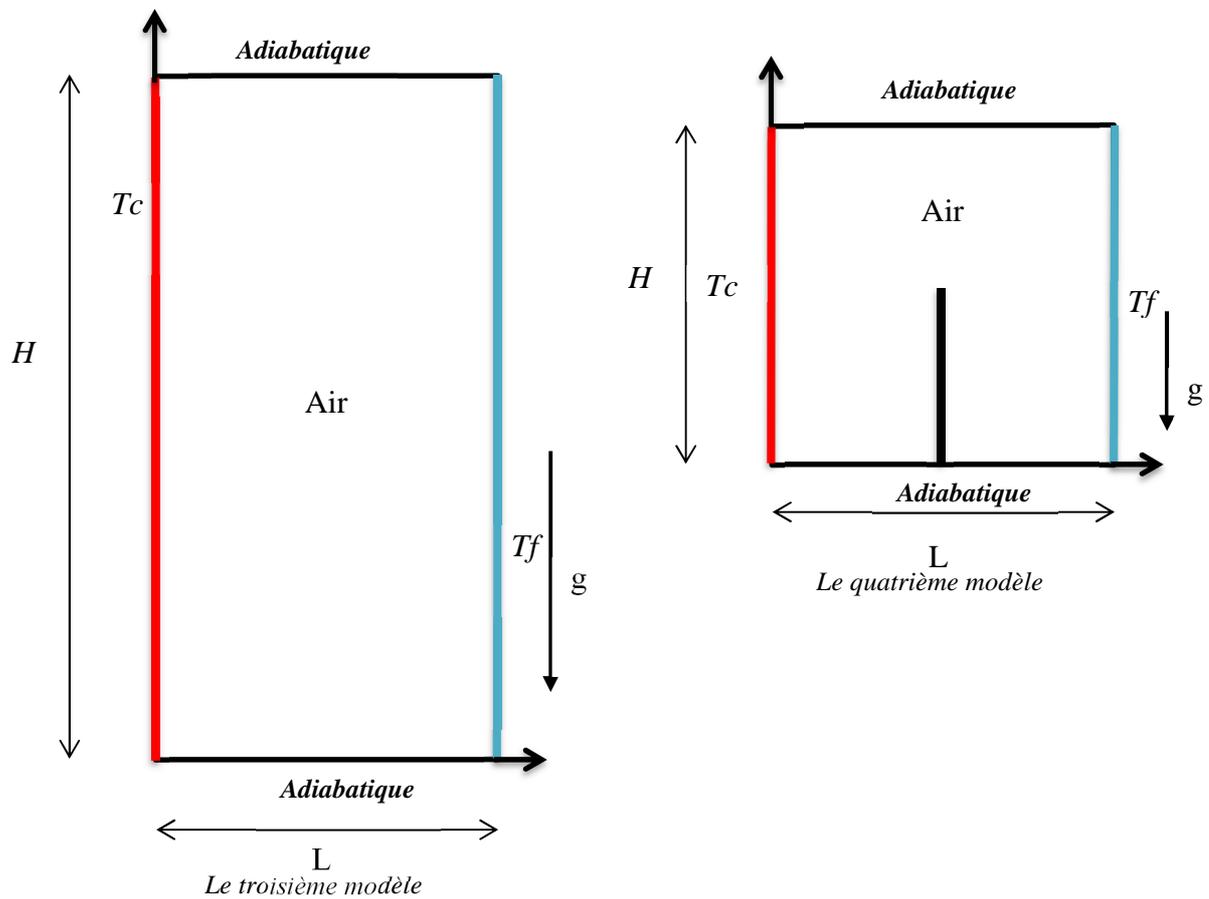


Figure II.1. Les configurations du problème physique

II.3. Equations gouvernantes :

L'analyse de la convection thermique est basée sur l'application des trois équations classiques de conservation (conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie). La formulation différentielle de ces équations est la suivante :

➤ Equation de continuité :

C'est l'équation, qui exprime la loi de conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel. Elle s'exprime mathématiquement sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \quad (\text{II.1})$$

Ou V : le vecteur de vitesse.

➤ Équation de mouvement (Navier-stokes) :

Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide et son mouvement et les causes qui le produisent. Donc, on peut indiquer que le taux de variation de la quantité de mouvement, contenu dans le volume de contrôle est égal à la somme de toutes les forces extérieures, qui lui sont appliquées. L'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} = \rho F - \text{grad}(p) + \mu \Delta V + \frac{1}{3} \mu \text{grad}(\text{div}(\vec{V})) \quad (\text{II.2})$$

Ou F est une force par unité de volume.

➤ **Equation de l'énergie :**

L'équation de l'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique. Ce principe met en relation les différentes formes d'énergie, soit :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \text{div} (\lambda \cdot \text{grad} T) \quad (\text{II.3})$$

II.4. Hypothèses simplificatrices :

Afin de simplifier la formulation du modèle mathématique, nous allons considérer les approximations suivantes, qui sont souvent utilisées dans l'étude de la convection naturelle :

- Le fluide est newtonien et incompressible.
- Le régime d'écoulement est laminaire et instationnaire.
- L'écoulement est bidimensionnel.
- Les propriétés physiques du fluide sont constantes.
- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est négligeable.
- Pas de source de chaleur interne.
- La puissance volumique dissipée est négligeable.

II.4.1. Approximation de Boussinesq :

L'approximation de Boussinesq est valide : elle consiste à considérer que les variations de la masse volumique sont négligeables aux niveaux de tous les termes des équations de quantité de mouvement ($\rho = \rho_0$), sauf au niveau du terme de gravité. La variation de ρ en fonction de la température est donnée comme suit :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (\text{II.4})$$

Compte tenu des hypothèses émises précédemment, les équations du modèle mathématique sous forme dimensionnelle sont les suivantes :

➤ **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.5})$$

➤ **Equation de quantité de mouvement :**

Suivant x :
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 0 \quad (\text{II.6})$$

Suivant y :
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_f) \quad (\text{II.7})$$

➤ **Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.8})$$

$$\text{Avec } \alpha = \frac{\lambda}{\rho_0 \cdot C_p}$$

II.5. Adimensionnalisation des équations :

L'adimensionnalisation ou normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines dimensions caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres de façon à rendre la solution plus générale.

De façon à rendre les équations précédentes adimensionnelles, elles seront transformées par les relations suivantes :

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad P = \frac{p}{\rho_0 \left(\frac{\alpha}{L}\right)^2}, \quad U = \frac{u}{\left(\frac{\alpha}{L}\right)}, \quad V = \frac{v}{\left(\frac{\alpha}{L}\right)}, \quad \theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f}, \quad \tau = \frac{t}{\left(\frac{L^2}{\alpha}\right)}$$

En introduisant les grandeurs sans dimension dans les équations de Navier-Stokes (équations de la continuité (II.5) et le mouvement (II.6 et II.7)) et l'équation de l'énergie (II.8) est on a comme résultat :

➤ **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.9})$$

➤ **Equation de quantité de mouvement :**

$$\text{Suivant } x : \quad \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II.10})$$

$$\text{Suivant } y : \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] + Ra \cdot \text{Pr} \cdot \theta \quad (\text{II.11})$$

➤ **Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{II.12})$$

Les paramètres Pr et Ra dénotent, respectivement, les nombres de Prandtl, et de Rayleigh et sont définis par les relations suivantes :

$$Pr = \frac{\vartheta}{\alpha}$$

$$Ra = \frac{g\beta}{\vartheta\alpha} (T_c - T_f)L^3 = Gr.Pr$$

II.5.1. La formulation de fonction de vorticité et de courant Ψ et ω :

L'objectif de l'utilisation des variables ω et ψ est pour simplifier l'équation du mouvement en éliminant le gradient de pression. Il s'agit de dériver les équations (II.10) et (II.11) respectivement par rapport à Y et à X ; et de procéder à la soustraction entre les deux équations obtenues. On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = Pr \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] + Ra.Pr. \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (\text{II.13})$$

La vorticité est donnée par la relation suivante :

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (\text{II.14})$$

Donc on obtient

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = Pr \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right] + Ra.Pr. \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (\text{II.15})$$

Les vitesses de l'écoulement sont définies par :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} , \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (\text{II.16})$$

En combinant les équations (II.14) et (II.16), la fonction de courant est obtenue par :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (\text{II.17})$$

Finalement, les équations adimensionnelles en termes de température θ , de vorticité ω et de fonction de courant ψ régissant notre problème :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right]$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = Pr \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right] + Ra.Pr. \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\omega , \quad U = \frac{\partial \Psi}{\partial X} , \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial Y}$$

II.6. Conditions aux limites et les conditions initiales :

Le système d'équations obtenu précédemment nécessite l'imposition des conditions aux limites et des conditions initiales, Dans un premier temps, le fluide est au repos et sa température adimensionnelle est uniforme dans toute la cavité, et les conditions aux limites est de type Dirichlet (température constante) pour les parois verticales et de type Neumann (flux de chaleur nul) pour les parois horizontales.

Les conditions aux limites associées au problème sont :

$$\tau > 0 : U = V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \text{ à } Y = 0 \text{ et } Y = 1.$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \text{ Sur les parties adiabatiques de parois latérales et ailette,}$$

$$\theta = 1 : \text{ Sur la partie chaude, } X = 0.$$

$$\theta = 0 : \text{ Sur la partie froide, } X = 1.$$

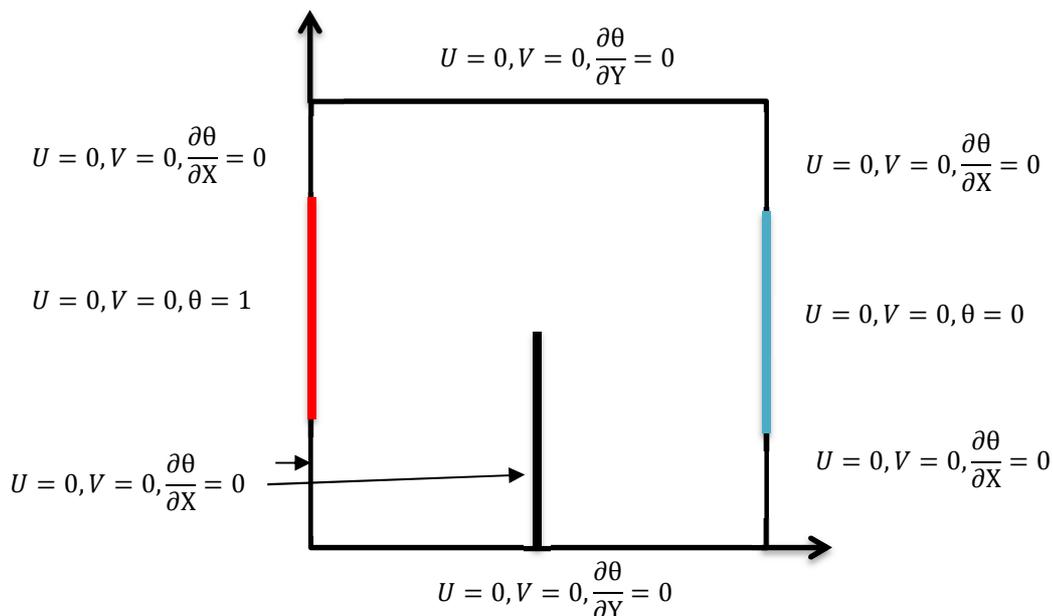


Figure II.3. Les conditions aux limites sous forme adimensionnelles.

II.8. Calcul du nombre de Nusselt :

Le taux de transfert de chaleur par convection dans une cavité est obtenu à partir du calcul de nombre de Nusselt. En suite après avoir obtenu la distribution de la température, le nombre de Nusselt locale le long de les surfaces active est défini comme suit :

$$Nu = \frac{hx}{\lambda} = \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{II. 18})$$

Ou $\frac{\partial T}{\partial n}$ est le dérivé adimensionnel le long de la direction normale de la surface active.

Le nombre de Nusselt moyen le long des parois active, est calculé avec l'intégrale de nombre de Nusselt suivant :

$$Nu_{moy} = - \int_0^{-1} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{x=0} dx \quad (\text{II.17})$$

Et par conservation de l'énergie à travers la cavité les nombres de Nusselt moyens aux murs chaud et froid devraient être égaux.

II.7. Conclusion :

Après avoir développé les équations, les conditions aux limites et les conditions initiales associées à notre configuration, Il s'agit d'un système complexe formé par des équations, qui sont issues de la thermodynamique et de la mécanique des fluides. Les équations de bilan sont donc connues mais :

- La résolution analytique de ces équations de bilan n'est pratiquement jamais réalisable ;
- Les non-linéarités visibles dans les équations sont principalement à l'origine des difficultés pour obtenir une solution analytique.

Donc, l'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable pour la résolution du système d'équations obtenu. Dans notre étude, on a utilisé la méthode de Différence finie pour la discrétisation des équations gouvernantes. Les questions relatives à la technique de résolution, ainsi que le choix du maillage seront donc également abordées dans le chapitre suivant.

Chapitre III :

Méthode Numérique

III.1. Introduction :

La résolution des équations de conservation d'un phénomène physique se fait par l'utilisation d'une méthode numérique bien déterminée. Cette dernière consiste à développer les moyens de la résolution de ces équations. A cette étape, intervient le concept de la discrétisation des équations différentielles, qui a pour résultat, un système d'équations algébriques non linéaires, ces équations décrivent les propriétés discrètes du fluide dans chaque nœud du domaine étudié.

Il existe plusieurs méthodes numériques de discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles, les plus utilisées sont :

- La méthode des différences finies ;
- La méthode des volumes finis ;
- La méthode des éléments finis.

Dans ce chapitre on va concentrer notre attention sur la solution numérique par la méthode des différences finies, outil extrêmement utilisé en transfert thermique pour résoudre des problèmes simple ou complexe avec des conditions aux limites complexe.

III.2. Méthode des différences finies :

La méthode des différences finies est la méthode numérique la plus ancienne et fut la première utilisée pour résoudre des problèmes thermiques. Elle consiste à diviser le volume de l'espace où la solution est recherchée en un réseau de points espacés régulièrement ou irrégulièrement pour constituer ce que l'on appelle un maillage. La solution du problème est ensuite calculée en chaque point du maillage.

L'approximation réside dans le remplacement de chaque dérivée de l'équation de par une expression aux différences finies, exprimant la valeur de l'inconnue en un point en fonction de sa valeur aux points voisins [7].

III.3. Maillage :

Un maillage est un ensemble des points du domaine de définition sur lequel on va appliquer une méthode numérique. Il consiste à diviser le domaine d'étude en un ensemble de cellules. Dans cette étude nous avons adopté un maillage uniforme (structuré) dans les deux directions horizontale et verticale ($\Delta X = \Delta Y$), comme le montre la figure (III.1)

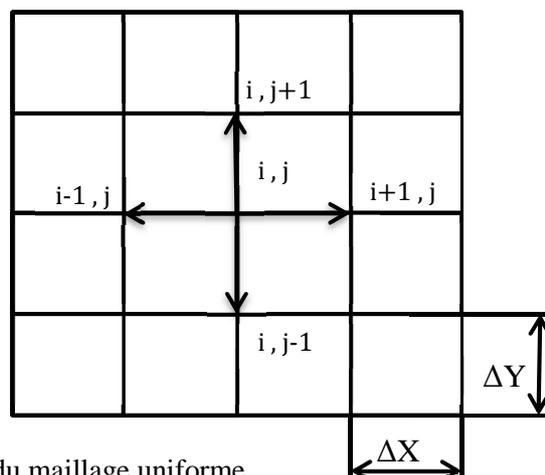


Figure III.1. Schéma du maillage uniforme

III.4. Discrétisation Des Différentes Dérivées :

Le système d'équations régissant notre problème est discrétisé en approchant les dérivées partielles par des différences finies. La discrétisation est faite à l'aide de développement de Taylor.

Schéma avant :

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \right|_{i,j} \quad (\text{III.1})$$

Schéma arrière :

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} - \frac{\Delta X^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \right|_{i,j} \quad (\text{III.2})$$

La discrétisation du terme temporel utilise la méthode explicite et pour les termes diffusifs ainsi que les dérivées partielles du premier ordre (terme source de l'équation de la conservation de l'énergie, vitesses) sont discrétisés en utilisant le schéma centré du 2^{eme} ordre, alors que les termes convectifs sont discrétisés à l'aide du schéma centré du 2^{eme} ordre.

III.4.1. La Discrétisation Temporelle :

Pour la discrétisation du terme temporel nous avons appliqué une méthode explicite

La méthode est peut-être appliquée dans tous les schémas centrés du développement du Taylor est mettre un terme explicite (n) dans les point en arrière et avant du point étudié par exemple :

$$\frac{\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n}{2\Delta X} \quad (\text{III.3})$$

$$\left(\frac{\Delta \theta^{n+1} - \Delta \theta^n}{\Delta \tau} \right)_{i,j} + \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{i,j}^n = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)_{i,j}^n \quad (\text{III.4})$$

III.4.2. La Discrétisation Des Termes Diffusifs :

Pour l'expression du terme diffusif de forme $\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}$, nous avons utilisé le schéma centré du 2^{eme}

ordre et pour cela on considère le développement en série de Taylor d'une variable ϕ dépendante de X et on néglige les termes d'ordre supérieur à quatre.

Pour arriver à l'expression finale (centrée) qui nous donne la discrétisation du terme diffusif, nous avons fait la sommation des équations (III.1) et (III.2). On obtient, donc :

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} = 2\phi_{i,j} + \Delta X^2 \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} + \frac{2\Delta X^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \right|_{i,j} \quad (\text{III.5})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}}{\Delta X^2} \quad (\text{III.6})$$

De même :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} = \frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}}{\Delta Y^2} \quad (\text{III.7})$$

III.4.3. La Discrétisation Des Termes Convectifs :

Pour l'expression du terme convectif de forme $\frac{\partial \phi}{\partial X}$, nous avons utilisé le schéma centré 2^{eme} ordre suivant la direction (X), on utilise le développement en série de Taylor précédent, en faisant la soustraction entre les équations (III.1) et (III.2). On obtient, donc :

$$\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j} = 2 \Delta X \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{2\Delta X^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta X} \quad (\text{III.9})$$

De même :

$$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta Y} \quad (\text{III.10})$$

III.5. Discrétisation des Systèmes des Equations :

III.5.1. Discrétisation de l'équation d'énergie :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right|_{i,j} + U \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{i,j}^n + V \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{i,j}^n = \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right]_{i,j}^n \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\theta_{i,j}^{n+1} - \theta_{i,j}^n}{\Delta \tau} + \frac{U_{i+1,j}^n \theta_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n \theta_{i-1,j}^n}{2\Delta X} + \frac{V_{i,j+1}^n \theta_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n \theta_{i,j-1}^n}{2\Delta Y} = \frac{\theta_{i+1,j}^n + \theta_{i-1,j}^n - 2\theta_{i,j}^n}{\Delta X^2} + \frac{\theta_{i,j+1}^n + \theta_{i,j-1}^n - 2\theta_{i,j}^n}{\Delta Y^2} \quad (\text{III.12})$$

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^{n+1} = \theta_{i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{2\Delta X} [U_{i-1,j}^n \theta_{i-1,j}^n - U_{i+1,j}^n \theta_{i+1,j}^n] + \frac{\Delta \tau}{2\Delta Y} [V_{i,j-1}^n \theta_{i,j-1}^n - \\ V_{i,j+1}^n \theta_{i,j+1}^n] + \frac{\Delta \tau}{\Delta X^2} [\theta_{i+1,j}^n + \theta_{i-1,j}^n - 2\theta_{i,j}^n] \\ + \frac{\Delta \tau}{\Delta Y^2} [\theta_{i,j+1}^n + \theta_{i,j-1}^n - 2\theta_{i,j}^n] \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^{n+1} = \theta_{i,j}^n + a[U_{i-1,j}^n \theta_{i-1,j}^n - U_{i+1,j}^n \theta_{i+1,j}^n] \\ + b[V_{i,j-1}^n \theta_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n \theta_{i,j+1}^n] + c[\theta_{i+1,j}^n + \theta_{i-1,j}^n - 2\theta_{i,j}^n] \\ + d[\theta_{i,j+1}^n + \theta_{i,j-1}^n - 2\theta_{i,j}^n] \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Avec :

$$a = \frac{\Delta\tau}{2\Delta X} ;$$

$$b = \frac{\Delta\tau}{2\Delta Y} ;$$

$$c = \frac{\Delta\tau}{\Delta X^2} ;$$

$$d = \frac{\Delta\tau}{\Delta Y^2} .$$

III.5.2. Discrétisation de l'équation de Vorticité :

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right|_{i,j} + U \left. \frac{\partial \omega}{\partial X} \right|_{i,j} + V \left. \frac{\partial \omega}{\partial Y} \right|_{i,j} = Pr \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right]_{i,j} + Ra.Pr. \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{i,j} \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta\tau} + \frac{U_{i+1,j}^n \omega_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta X} + \frac{V_{i,j+1}^n \omega_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta Y} \\ & = Pr \left[\frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n}{\Delta X^2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 2\omega_{i,j}^n}{\Delta Y^2} \right] \\ & + Ra.Pr. \frac{\theta_{i+1,j}^n - \theta_{i-1,j}^n}{2\Delta X} \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Donc les valeurs de la vorticité $\omega_{i,j}^{n+1}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^{n+1} & = a[U_{i+1,j}^n \omega_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n \omega_{i-1,j}^n] + b[V_{i,j+1}^n \omega_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n \omega_{i,j-1}^n] \\ & + Pr[c(\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n) \\ & + d(\omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 2\omega_{i,j}^n)] + Ra.Pr. a(\theta_{i+1,j}^n - \theta_{i-1,j}^n) \\ & + \omega_{i,j}^n \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

III.5.3. Discrétisation de L'équation de La Fonction de Courant :

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right|_{i,j} = -\omega_{i,j}^{n+1} \quad (\text{III.18})$$

$$\frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j}}{\Delta X^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j}}{\Delta Y^2} = -\omega_{i,j}^{n+1} \quad (\text{III.19})$$

$$\frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta X^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta Y^2} + \omega_{i,j}^{n+1} = \frac{2\Psi_{i,j}}{\Delta X^2} + \frac{2\Psi_{i,j}}{\Delta Y^2} \quad (\text{III. 20})$$

$$\Psi_{i,j} = \frac{1}{\left[\frac{2}{\Delta X^2} + \frac{2}{\Delta Y^2}\right]} \left[\frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta X^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta Y^2} + \omega_{i,j}^{n+1} \right] \quad (\text{III. 21})$$

III.5.4 Champ de Vitesses :

$$U_{i,j} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \Big|_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta Y} \quad (\text{III. 22})$$

$$V_{i,j} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \Big|_{i,j} = \frac{\Psi_{i-1,j} - \Psi_{i+1,j}}{2\Delta X} \quad (\text{III. 23})$$

III.6. Conditions Initiales et Conditions aux Limites :

III.6.1. La température :

- Condition initiale

$$\theta_{i,j}^n = 0.5 \quad \text{pour } (i = 2, nf - 1; j = 2, nf - 1) \quad (\text{III. 24})$$

- Conditions aux limites

➤ Les parties actives des parois verticales

$$\begin{cases} \theta_{1,j}^n = 1 \\ \theta_{nf,j}^n = 0 \end{cases} \quad (\text{III. 25})$$

➤ Les parties adiabatiques des parois verticales

$$\begin{cases} \theta_{1,j}^n = \theta_{2,j}^n \\ \theta_{nf,j}^n = \theta_{nf-1,j}^n \end{cases} \quad (\text{III. 26})$$

➤ Les parois adiabatiques horizontales

$$\begin{cases} \theta_{i,1}^n = \theta_{i,2}^n \\ \theta_{i,nf}^n = \theta_{i,nf-1}^n \end{cases} \quad (\text{III. 27})$$

III.6.2. Les vitesses :

- Condition aux limites

$$\begin{cases} U_{1,j}^n = U_{nf,j}^n = U_{i,1}^n = U_{i,nf}^n = 0 \\ V_{1,j}^n = V_{nf,j}^n = V_{i,1}^n = V_{i,nf}^n = 0 \end{cases} \quad (\text{III. 28})$$

Condition initiale

$$\begin{cases} U_{i,j}^0 = 0 \\ V_{i,j}^0 = 0 \end{cases} \quad (\text{III. 29})$$

III.6.3. La vorticité :

- Condition aux limites

$$\Psi_{i,2} = \Psi_{i,1} + \Delta Y \left. \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right|_{i,1} + \frac{\Delta Y^2}{2!} \underbrace{\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right|_{i,1}}_{-\omega|_{i,1}} \quad (\text{III. 30})$$

$$\omega_{i,1} = \frac{2}{\Delta Y^2} (\Psi_{i,1} - \Psi_{i,2}) \quad (\text{III. 31})$$

$$\omega_{i,nf} = \frac{2}{\Delta Y^2} (\Psi_{i,nf} - \Psi_{i,nf-1}) \quad (\text{III. 32})$$

$$\Psi_{2,j} = \Psi_{1,j} + \Delta X \left. \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right|_{1,j} + \frac{\Delta X^2}{2!} \underbrace{\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right|_{1,j}}_{-\omega|_{1,j}} \quad (\text{III. 33})$$

$$\omega_{1,j} = \frac{2}{\Delta X^2} (\Psi_{1,j} - \Psi_{2,j}) \quad (\text{III. 34})$$

$$\omega_{nf,j} = \frac{2}{\Delta X^2} (\Psi_{nf,j} - \Psi_{nf-1,j}) \quad (\text{III. 34})$$

III.6.4. La fonction de courant :

$$\begin{cases} \Psi_{1,j}^n = \Psi_{nf,j}^n = \Psi_{i,1}^n = \Psi_{i,nf}^n = 0 \\ \Psi_{1,j}^0 = 0 \end{cases} \quad (\text{III. 35})$$

III.7. Les conditions CFL (Courant–Friedrich–Lewy) :

Le nombre de Courant est un nombre adimensionnel utilisé en calcul par tous les méthodes numériques.

Ce nombre est connu pour son lien avec la condition de Courant–Friedrich–Lewy (d'après Richard Courant, Kurt Friedrich, et Hans Lewy) et consiste en une condition de convergence pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles (notamment les équations aux dérivées partielles hyperboliques). Pratiquement, il sert à donner le seuil dimensionnel sous lequel on observe une instabilité de calcul, erreur d'approximation dans des calculs numériques, grandissant rapidement au fur et à mesure des calculs. Si la dimension de la grille est inférieure à la distance parcourue dans l'intervalle de pas de temps par l'onde la plus rapide que permettent l'équation, l'erreur grandit et envahit la solution physique.

$$c = \Delta\tau \sum_{i=1}^m \frac{U_{x_i}}{\Delta x_i} \leq C_{max} \quad (\text{III. 36})$$

$$C = \frac{U \Delta\tau}{\Delta X} + \frac{V \Delta\tau}{\Delta Y} \leq C_{max} \quad (\text{III. 37})$$

III.8. Critère de Convergence :

Afin de mieux approcher la solution stable du système d'équations en un nombre optimum d'itérations, nous avons adopté un test significatif d'arrêt du processus itératif, portant sur les résidus d'équation d'énergie (Température), de la vorticité et de la fonction de courant. Ces résidus peuvent être définis par :

$$R_{\phi} = \max |\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n| \leq 10^{-6} \quad (\text{III. 38})$$

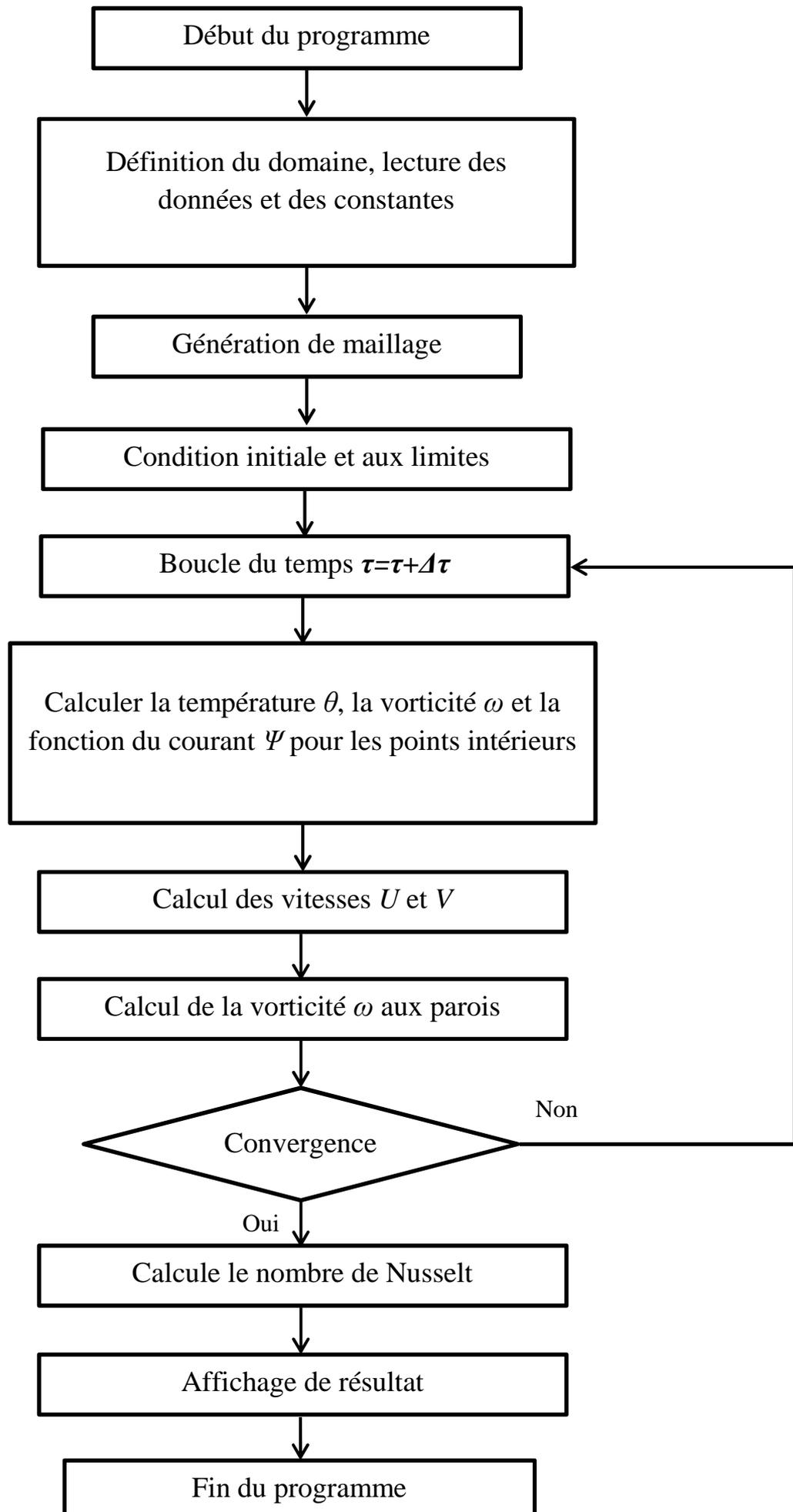
III.9. Le programme MATLAB :

Matlab (Matrix-Laboratoire) est un logiciel pour le calcul scientifique le plus utilisé dans le domaine de résolution d'équations mathématiques ou physique, orienté vers le vecteurs et les listes de données. Matlab est un langage interprété, chaque ligne d'un programme Matlab est lue, interprétée et exécutée.

Pour entrer dans Matlab cliquez sur **Start/Programmes/Matlab** sous l'environnement Windows. Matlab se présente avec un environnement interactif et un prompt (généralement >>) dans lequel on peut introduire des commandes.

III.10. Organigramme :

Pour la résolution de notre problème, nous avons élaboré un code de calcul en langage MATLAB version R2010a dont l'organigramme figure ci-dessous (Figure III.2) :

**Figure III.2.** L'organigramme du programme

III.11. Conclusion :

Après la discrétisation numérique qui a fait l'objet de ce chapitre, on va procéder dans la suite aux simulations numériques pour étudier l'influence des paramètres physiques caractérisant la configuration étudiée.

Chapitre IV :

Résultats et Discussions

IV.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à l'étude numérique de la convection naturelle dans les géométries des cavités considérées, nous verrons en premier lieu, l'influence du maillage sur les résultats. Puis nous avons procédé à la validation des résultats des simulations obtenues par notre code de calcul élaboré par MATLAB en comparant avec ceux obtenus par d'autres auteurs, quant aux courbes, elles ont été réalisées en utilisant le logiciel EXCEL 2016.

Dans notre cas, nous présentons les champs d'écoulement dynamique et thermique, ainsi que les variations de nombre de Nusselt local et moyen à différents nombres de Rayleigh.

Pour toutes les simulations réalisées, nous avons adopté un nombre de Prandtl égal à 0.71 (l'air), un nombre de Rayleigh, variant de 10^3 à 10^5 .

IV.2. L'influence du Maillage sur les Résultats :

Pour examiner et évaluer l'indépendance du maillage sur la solution numérique, cinq maillages uniformes sont employés dans ce travail : 50x50, 60x60, 70x70, 80x80 et 90x90 nœuds, pour un nombre de Rayleigh variant de 10^3 jusqu'à 10^5 et $Pr = 0,71$. Les résultats de la variation du maillage sont présentés dans le tableau IV.1. On constate que la variation du nombre de Nusselt moyen reste presque constante à compter du maillage 70x70 nœuds. Dans cette étude, le maillage 70x70 nœuds est le maillage qui sera adopté pour tout le calcul.

<i>Ra</i>	<i>Nu_{moy}</i>				
	50X50	60X60	70X70	80X80	90X90
10³	1,121	1,1213	1,115	1,115	1,115
10⁴	2,270	2,2651	2,264	2,267	2,255
10⁵	4,613	4,5959	4,537	4,522	4,505

Tableau IV.1. Effet du maillage sur le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude.

IV.3. Validation de Code de Calcul:

Dans le but de vérifier l'exactitude des résultats de simulation obtenus par notre code de calcul élaboré par MATLAB, une validation a été faite, en prenant comme référence l'étude numériques de **G. Vahl Davis [3]**.

Présente étude

G. Vahl Davis [3]

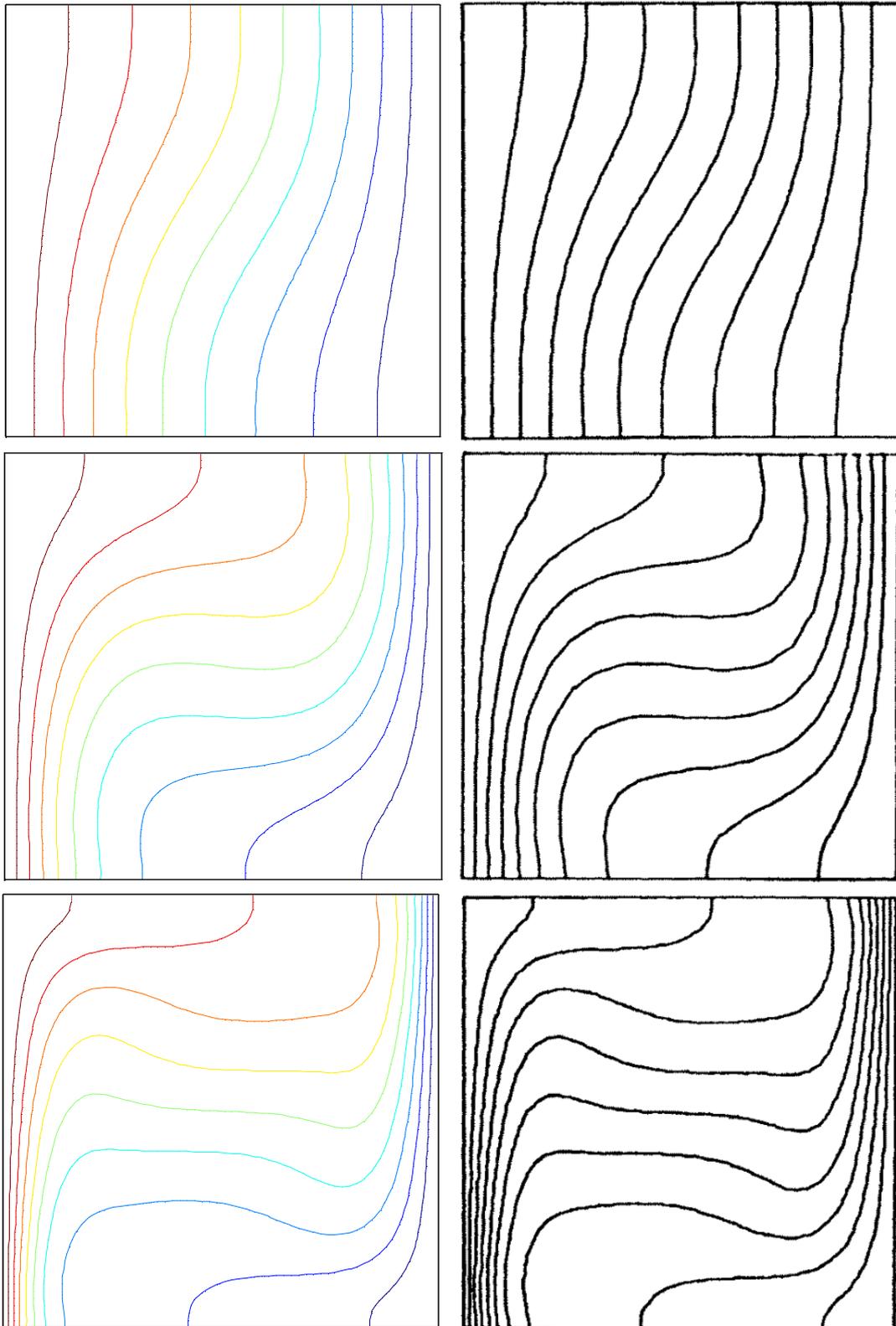


Figure.IV.1. les isothermes pour un nombre de Rayleigh qui varié de 10^3 jusqu'à 10^5 . Comparaison entre nos résultats et ceux de Vahl davis [3]

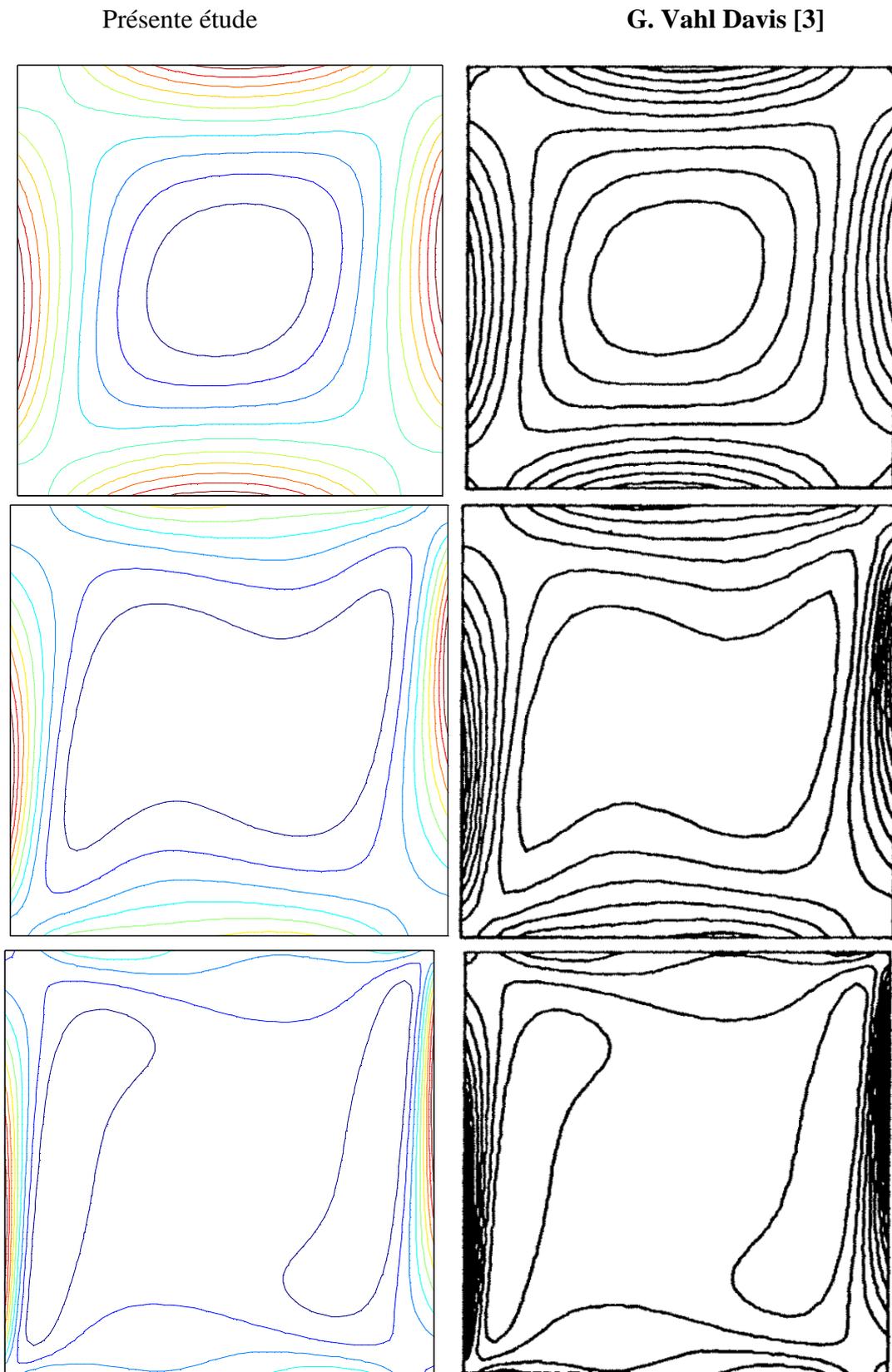


Figure.IV.2. les vorticité pour un nombre de Rayleigh qui varié de 10^3 jusqu'à 10^5 . Comparaison entre nos résultats et ceux de Vahl davis [3]

Présente étude

G. Vahl Davis [3]

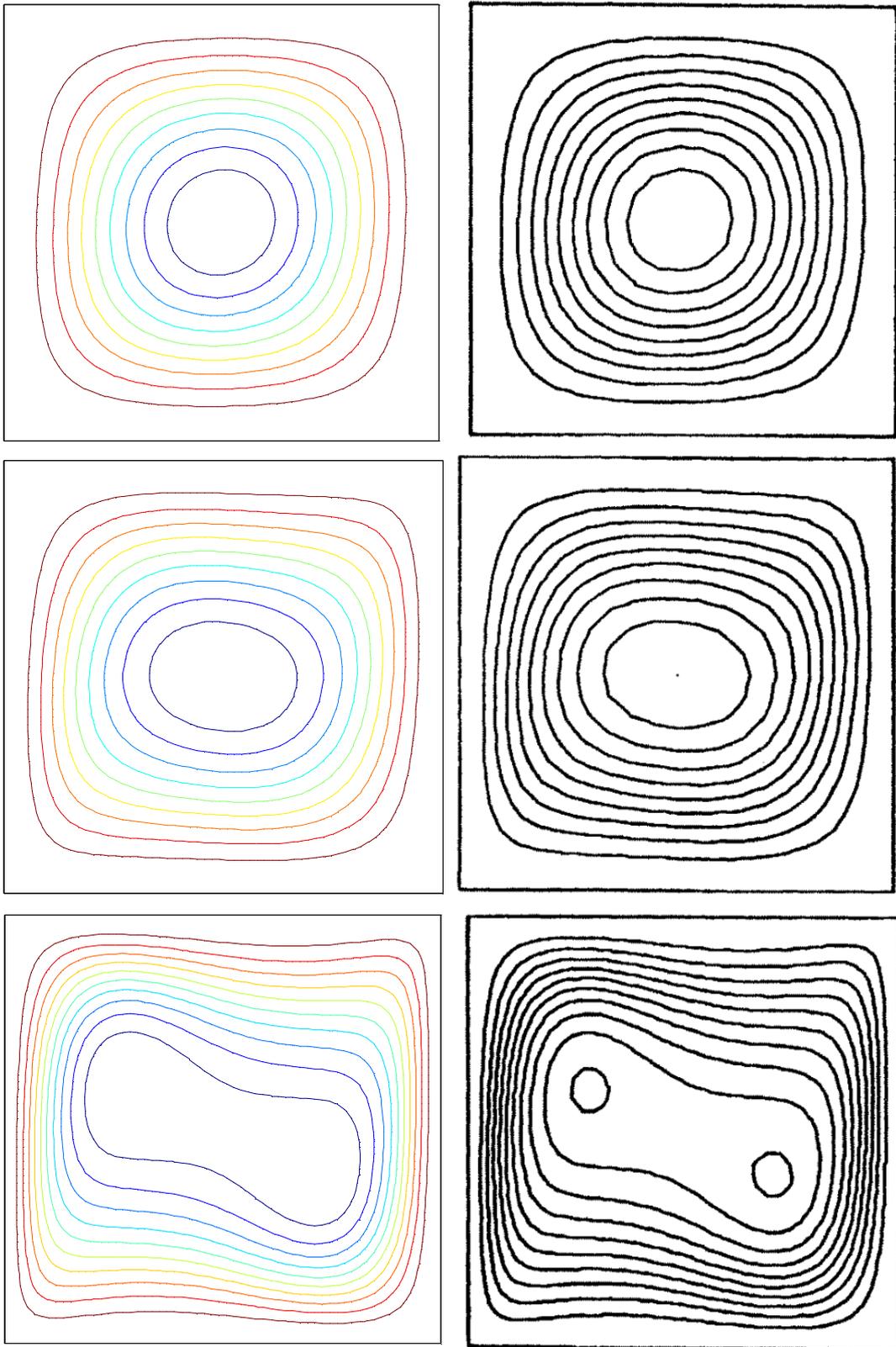


Figure.IV.3. les ligne de courant pour un nombre de Rayleigh qui varié de 10^3 jusqu'à 10^5 . Comparaison entre nos résultats et ceux de **Vahl davis [3]**

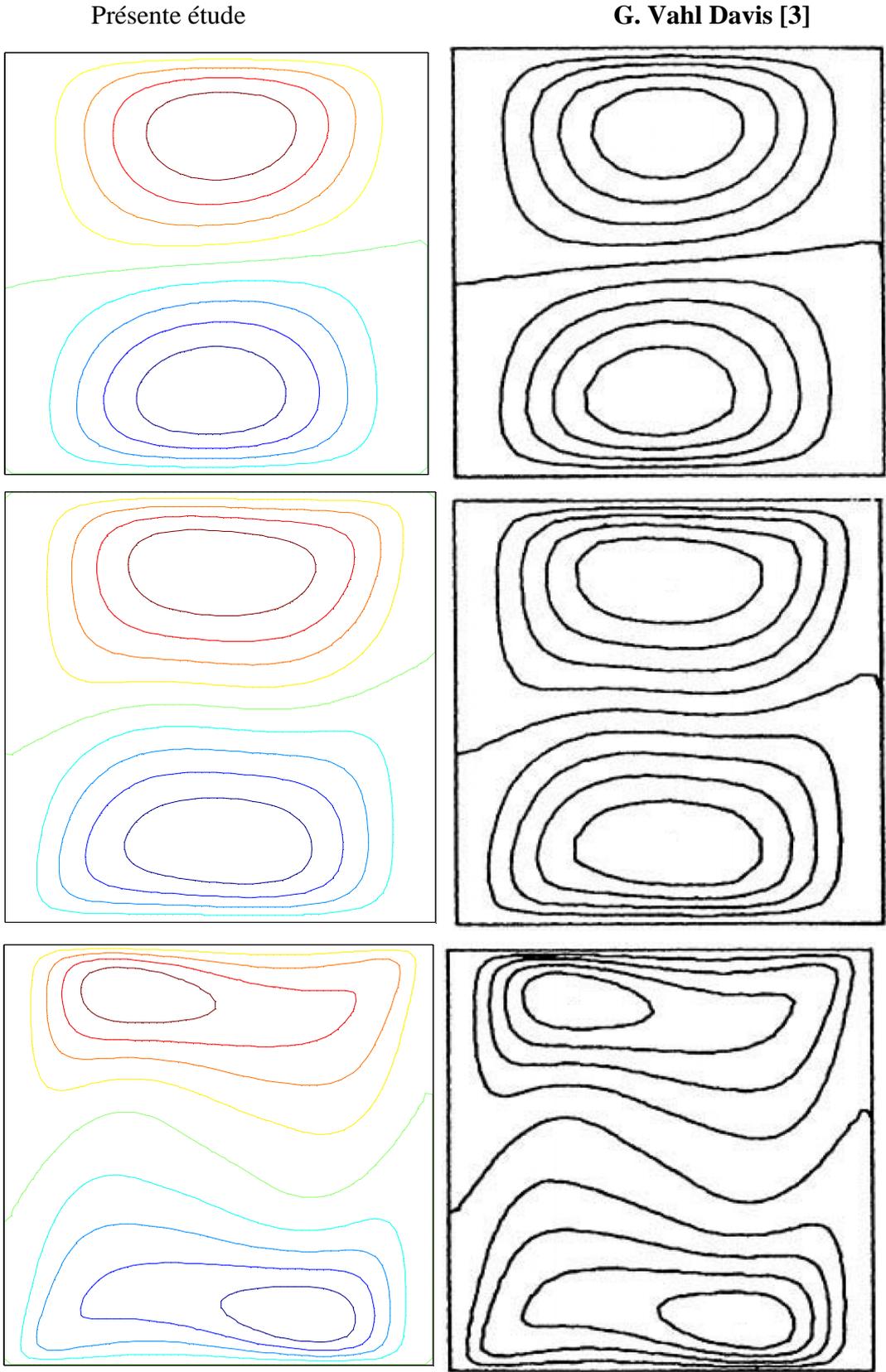


Figure.IV.4. les champs de vitesses U pour un nombre de Rayleigh qui varié de 10^3 jusqu'à 10^5 .
Comparaison entre nos résultats et ceux de **Vahl davis** [3]

Présente étude

G. Vahl Davis [3]

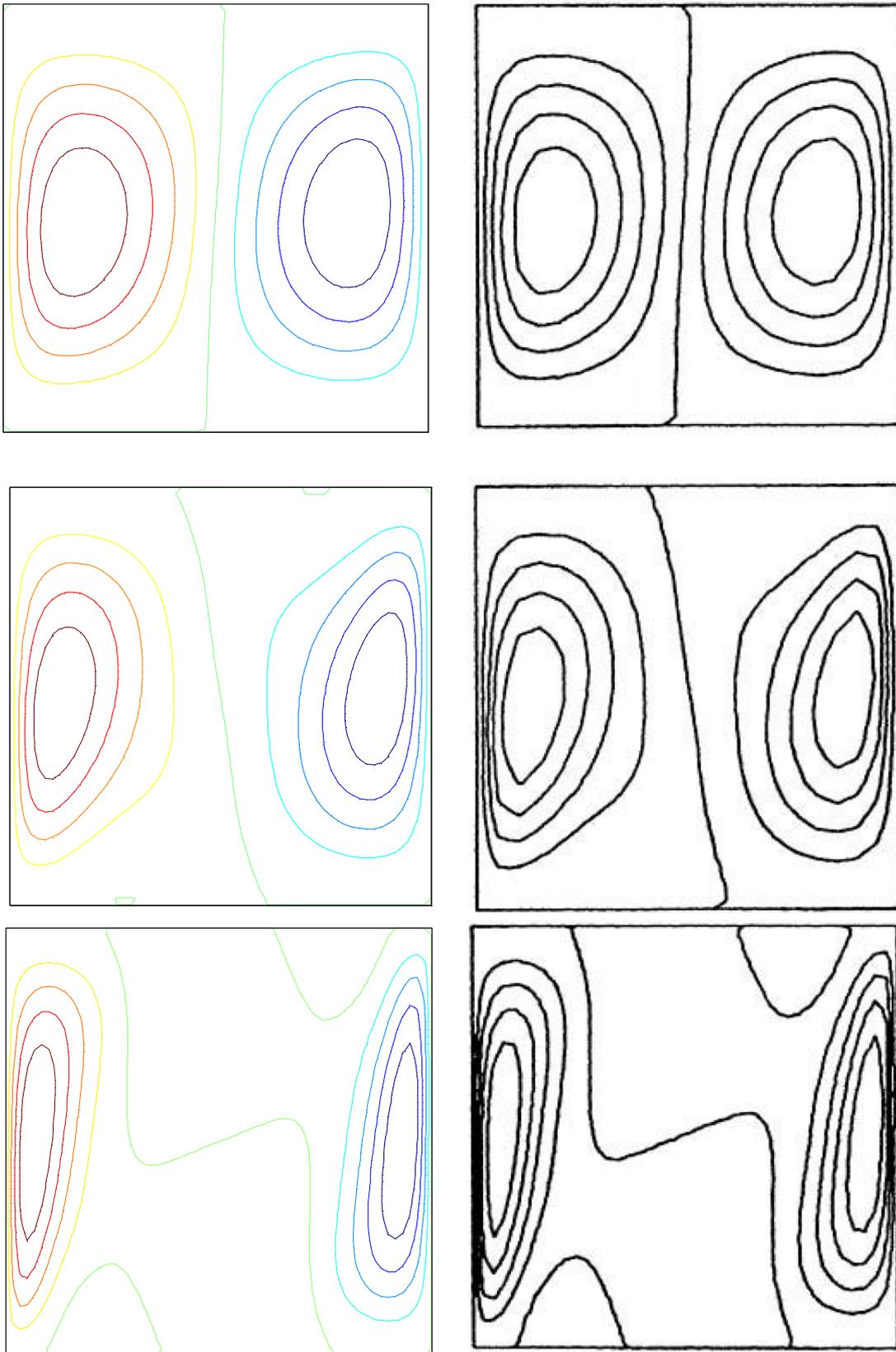


Figure.IV.5. les champs de vitesses V pour un nombre de Rayleigh qui varié de 10^3 jusqu'à 10^5 .

Comparaison entre nos résultats et ceux de **Vahl davis [3]**

Cette comparaison montre qu'il y a un accord satisfaisant entre les résultats qu'on a obtenus et ceux de **Vahl Davis** [3], ce qui nous réconforte dans le choix de nos modèles mathématique et numérique, nous permettant ainsi de valider notre procédure de simulation numérique.

IV.4. Les Résultats :

Le principal objectif de ce présent travail est l'étude de l'écoulement et du transfert de chaleur dans une cavité contenant un fluide (l'air) $Pr=0.71$. Les isothermes, les lignes de courant et le nombre de Nusselt sont présentés pour tous les cas traités :

- Influence du rapport d'aspect.
- Influence de la variation de la partie active.
- Influence de la taille et de la position des ailettes adiabatiques.

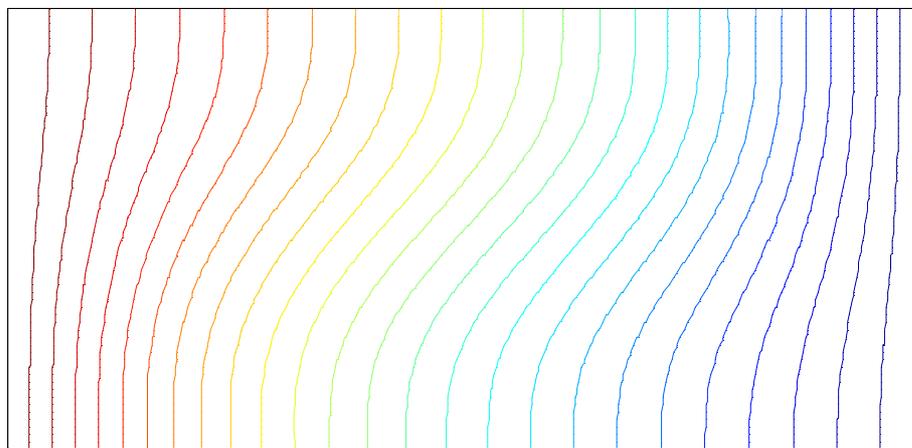
IV.4.1 Cavité Avec Rapport d'aspect différent de 1 :

Dans cette partie, on présente les résultats d'une étude numérique du transfert de chaleur, par convection naturelle dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée, des simulations numériques ont été faites pour différentes géométries de la cavité avec variation des valeurs de rapport d'aspect $A = (0.25, 0.5, 2 \text{ et } 4)$

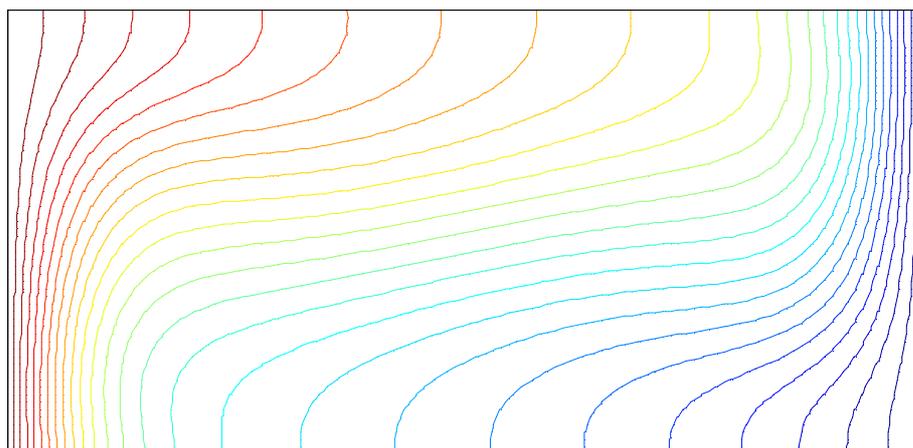
IV.4.1.1. Rapport d'aspect Supérieur à 1 :

Pour cela nous avons choisi 2 rapport d'aspect $A=(X/Y) = 2$ et 4 pour un nombre de Rayleigh variant entre 10^3 et 10^5 .

IV.4.1.1.1. Les Isothermes :



(a)

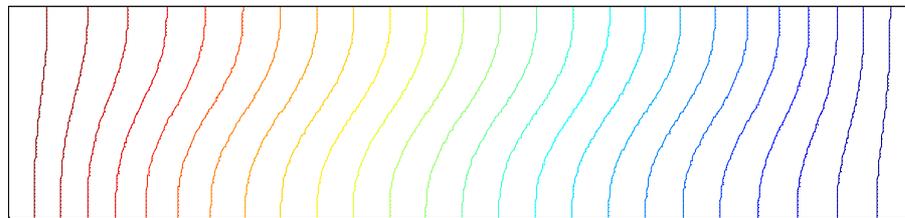


(b)

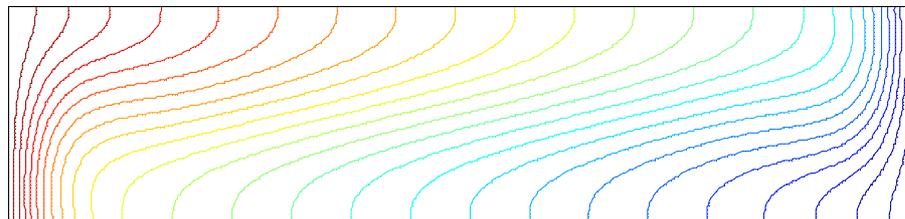


(c)

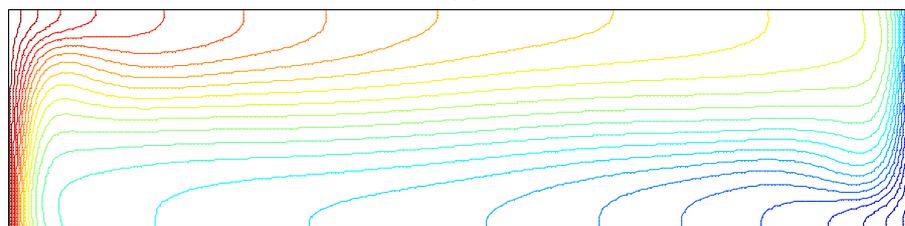
Figure.IV.6. Les Isothermes pour $A=2$ et Différent Nombre de Rayleigh
 (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$



(a)

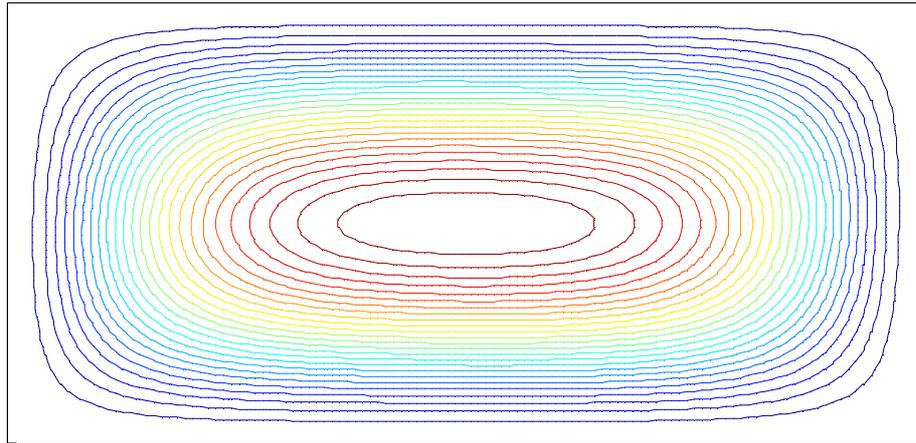


(b)

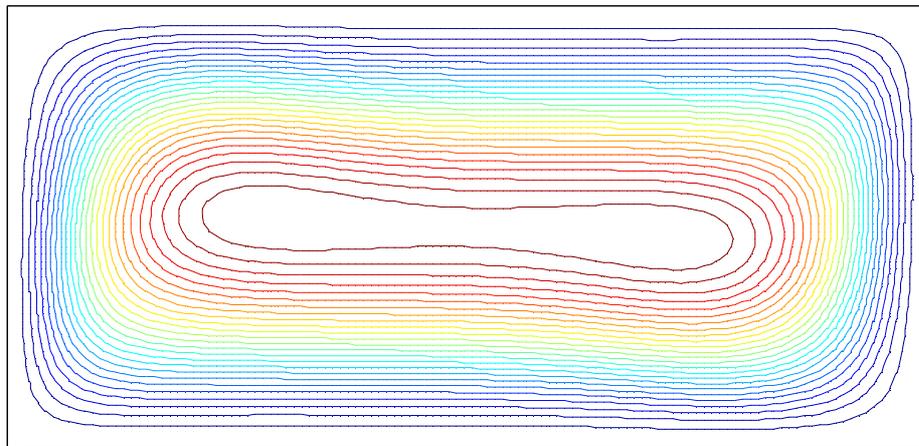


(c)

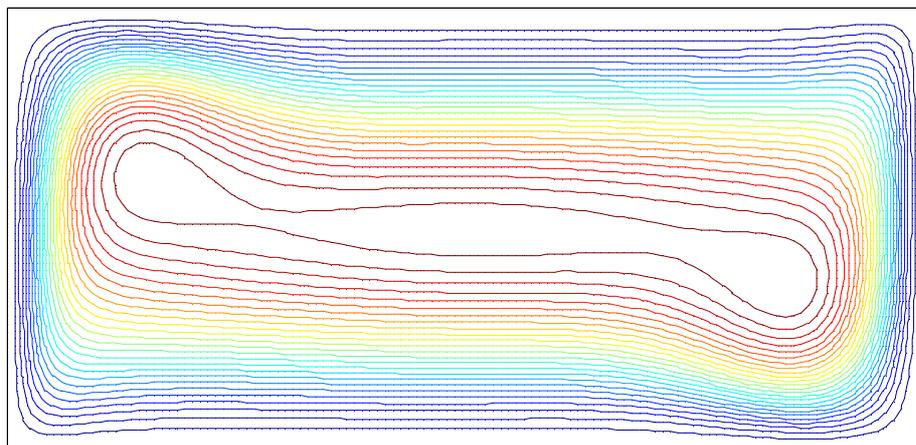
Figure.IV.7. Les Isothermes pour $A=4$ et Différent Nombre de Rayleigh
 (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$

IV.4.1.1.2. Les Lignes de Courant :

(a)



(b)



(c)

Figure.IV.8. Les Lignes de Courant pour $A=2$ et Différent Nombre de Rayleigh
(a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$

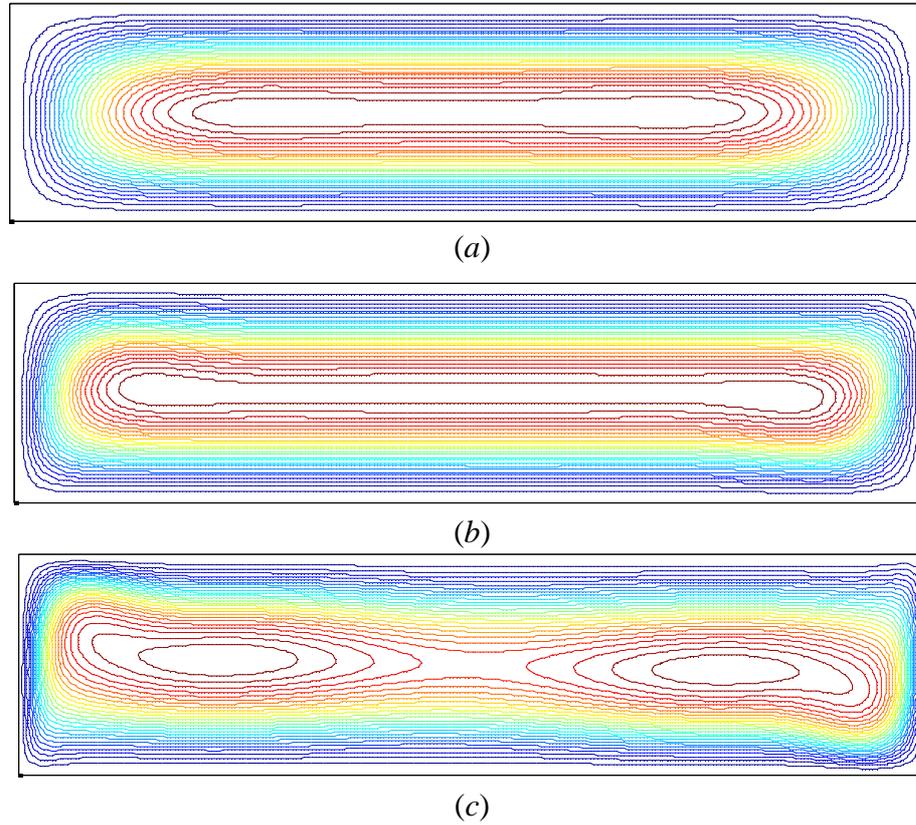


Figure.IV.9. Les Liges de Courant pour $A=4$ et Différent Nombre de Rayleigh
 (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$

IV.4.1.1.3. Nombre De Nusselt Local :

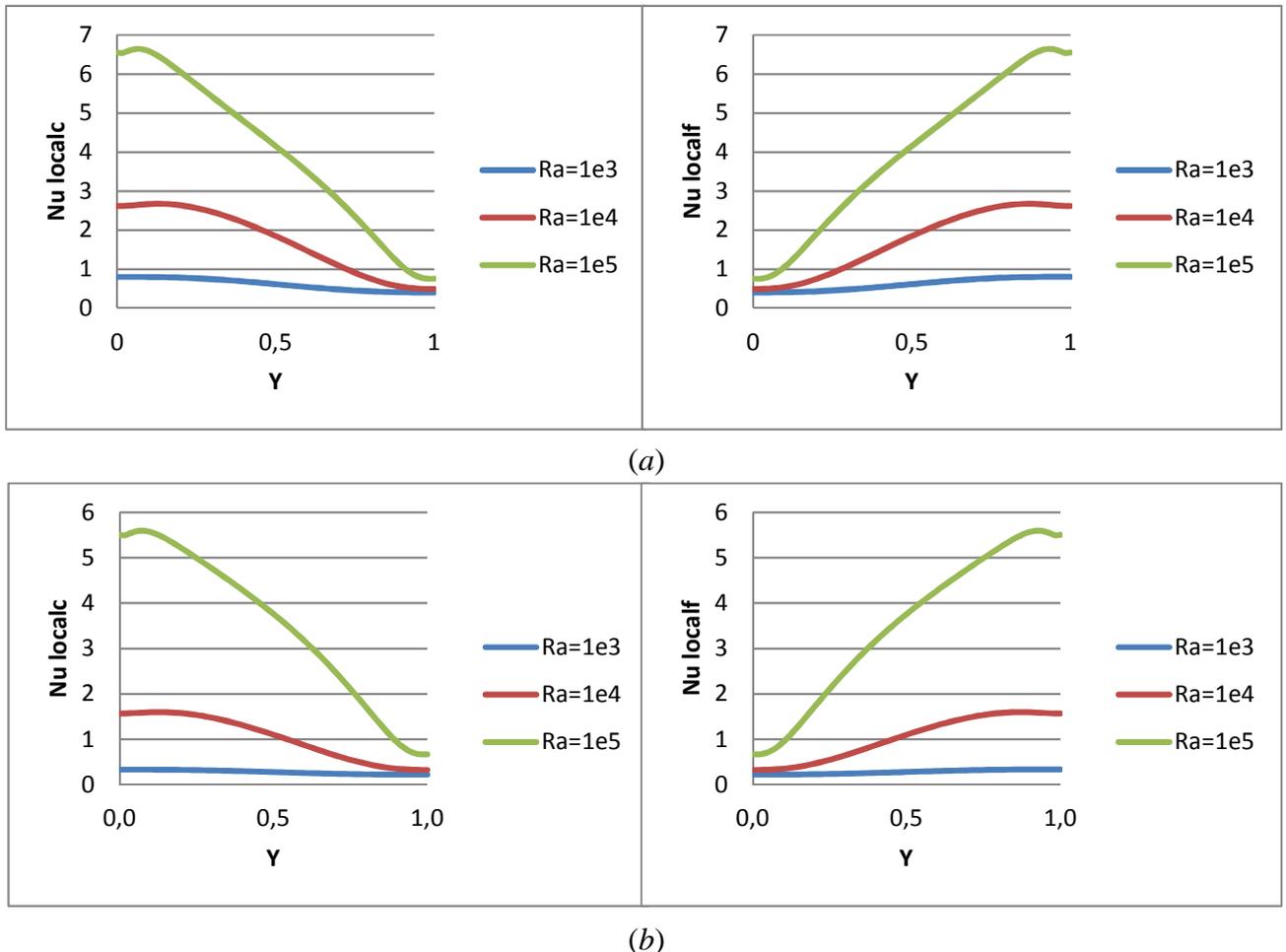


Figure.IV.10. La variation du nombre de Nusselt local dans les parois active pour Différent aspect A (a) $A=2$, (b) $A=4$

Les figures (IV.6, IV.7, IV.8 et IV.9) représentent respectivement les isothermes et les lignes de courant pour les deux rapports d'aspect 2 et 4 et pour un nombre de Rayleigh variant entre 10^3 et 10^5 . Il est clair, à partir des figures 6 et 7 (les isothermes) et pour une valeur faible du nombre de Rayleigh égale à 10^3 et quelle que soit la géométrie de la cavité, on remarque la dominance du mode de transfert de chaleur par conduction. L'augmentation du nombre de Rayleigh intensifie la circulation d'air en boucle dans la couche limite près des parois verticales et l'existence de deux cellules de recirculation à l'intérieur de la cavité.

La figure IV.10 représente la variation du nombre de Nusselt local le long des parties active chaude et froide pour les différents rapports d'aspect.

IV.4.1.2. Rapport d'aspect Inférieur à 1 :

Pour cela nous avons choisi 2 rapports d'aspect $A=(X/Y) = 0.5$ et 0.25 pour nombre de Rayleigh variant entre 10^3 et 10^5 .

IV.4.1.2.1. Les Isothermes :

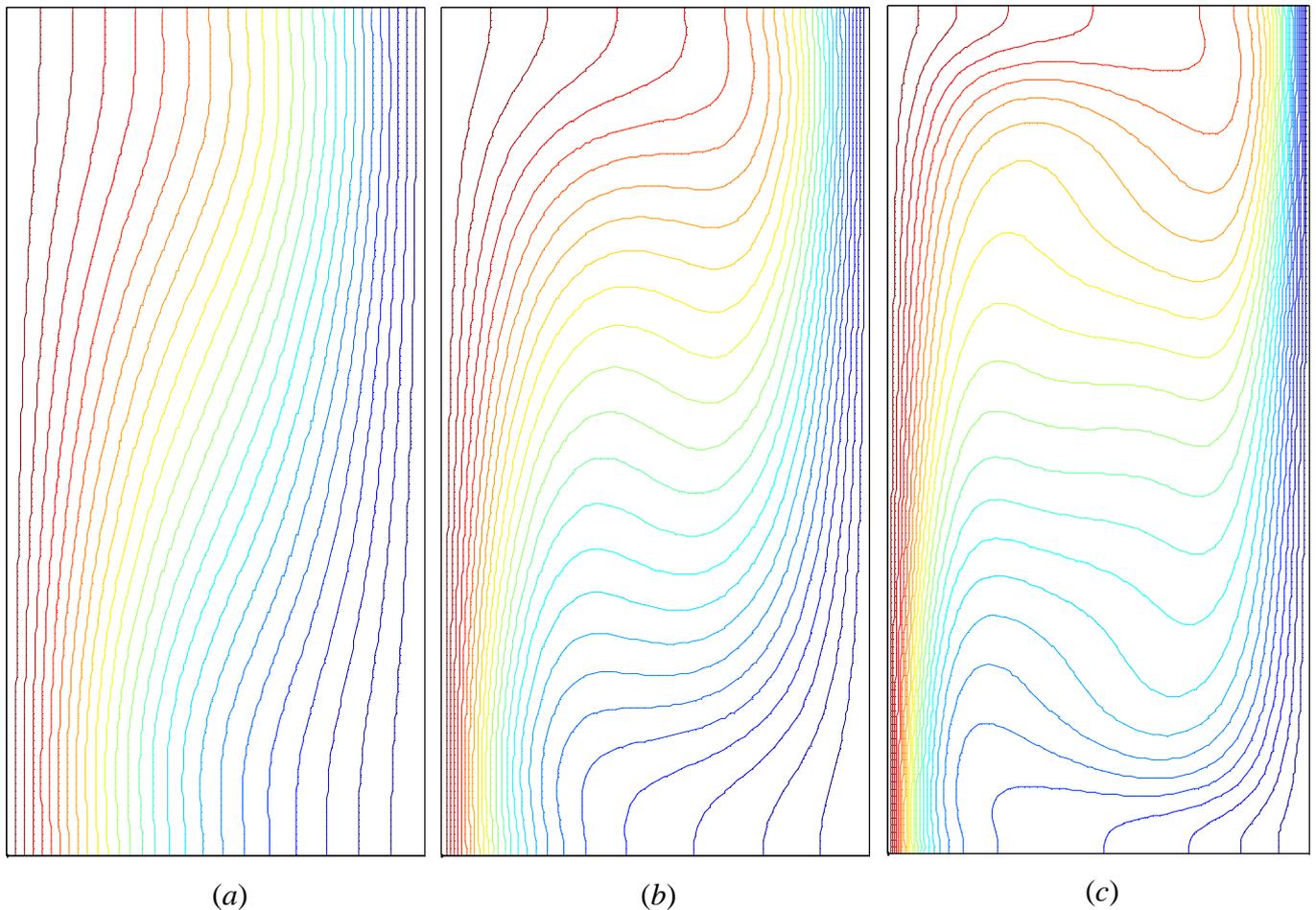


Figure.IV.11. Les Isothermes pour $A=1/2$ et Différent Nombre de Rayleigh
(a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$

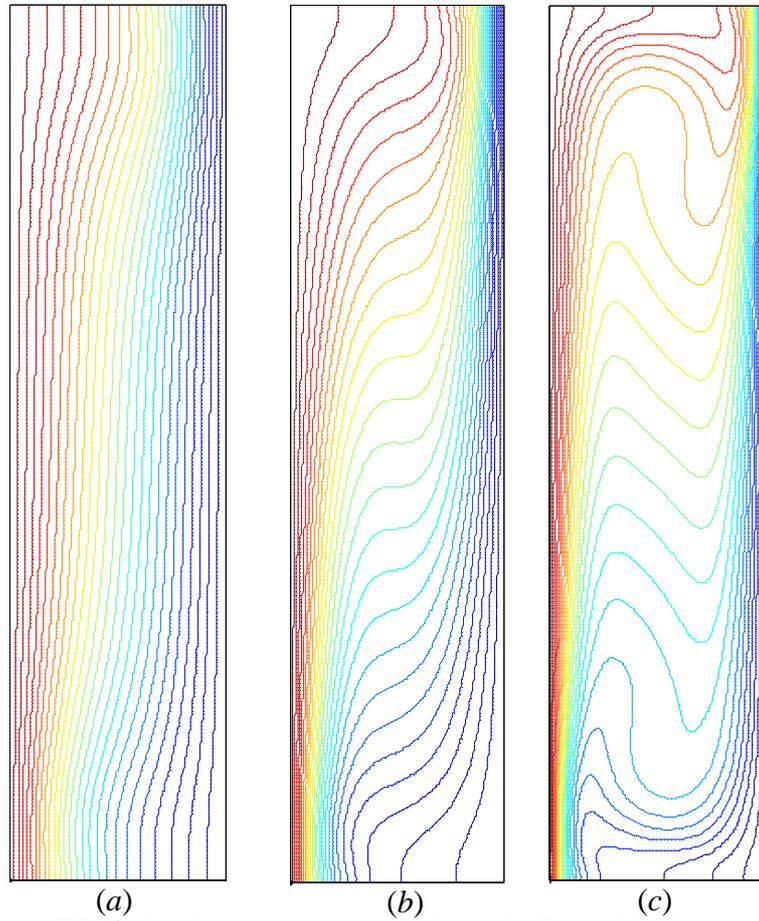


Figure.IV.12. Les Isothermes pour $A=1/4$ et Différent Nombre de Rayleigh
 (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$

IV.4.1.2.2. Les Lignes De Courant :

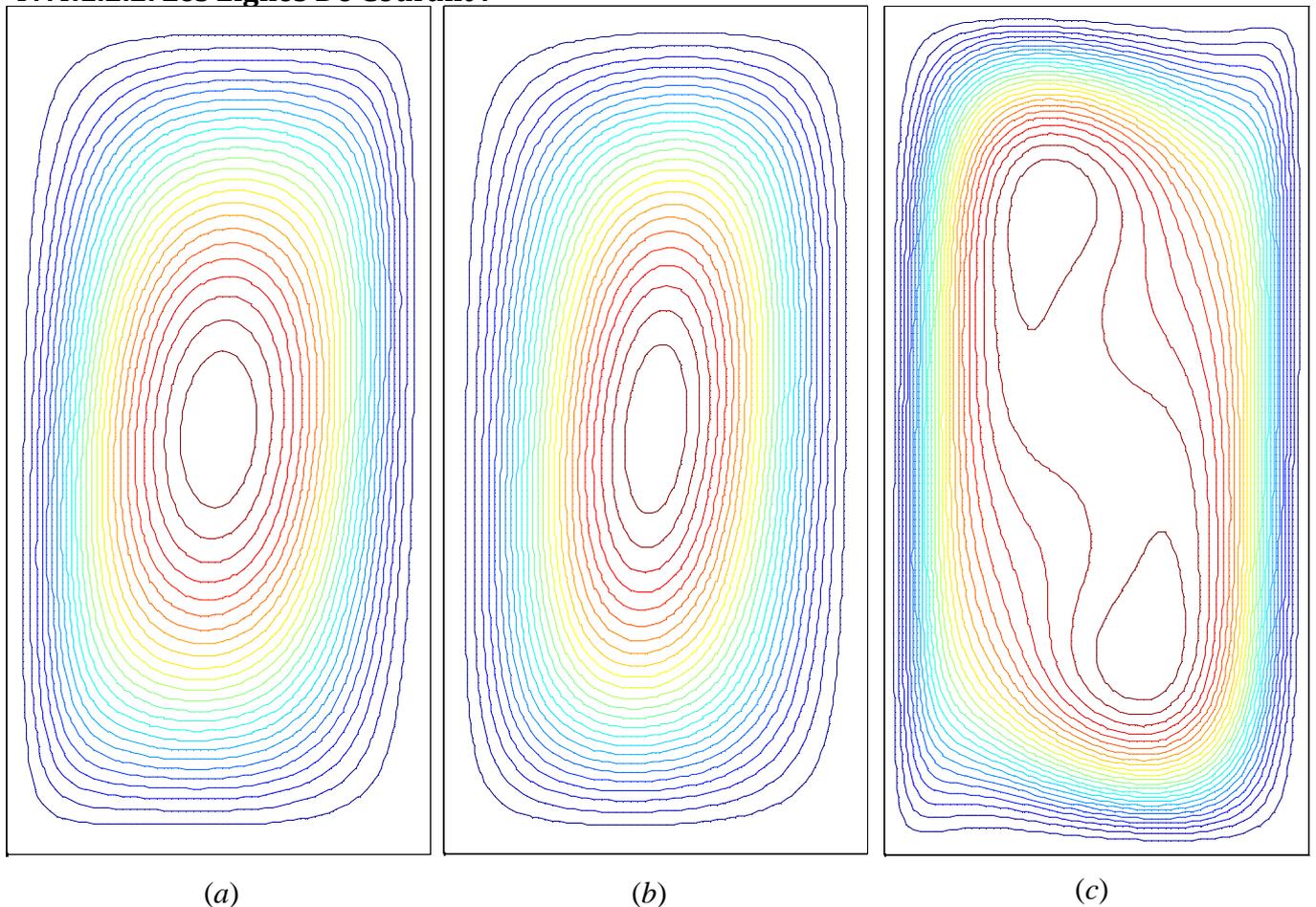


Figure.IV.13. Les Lignes de Courant pour $A=1/2$ et Différent Nombre de Rayleigh
 (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$

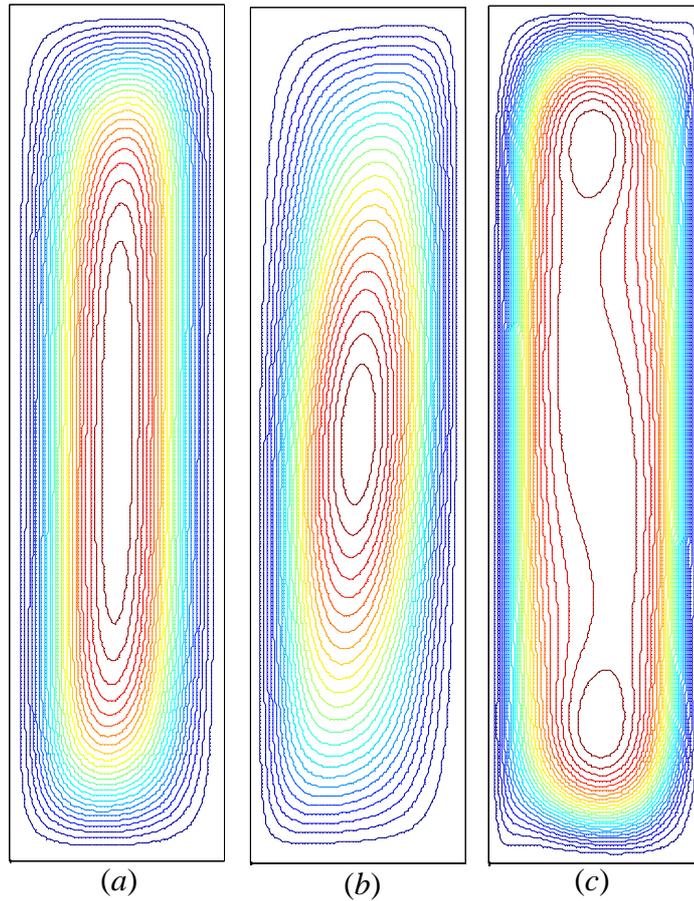


Figure.IV.14. Les Lignes de Courant pour $A=1/4$ et Différent Nombre de Rayleigh (a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$ et (c) $Ra=10^5$

IV.4.1.2.3. Nombre de Nusselt Local :

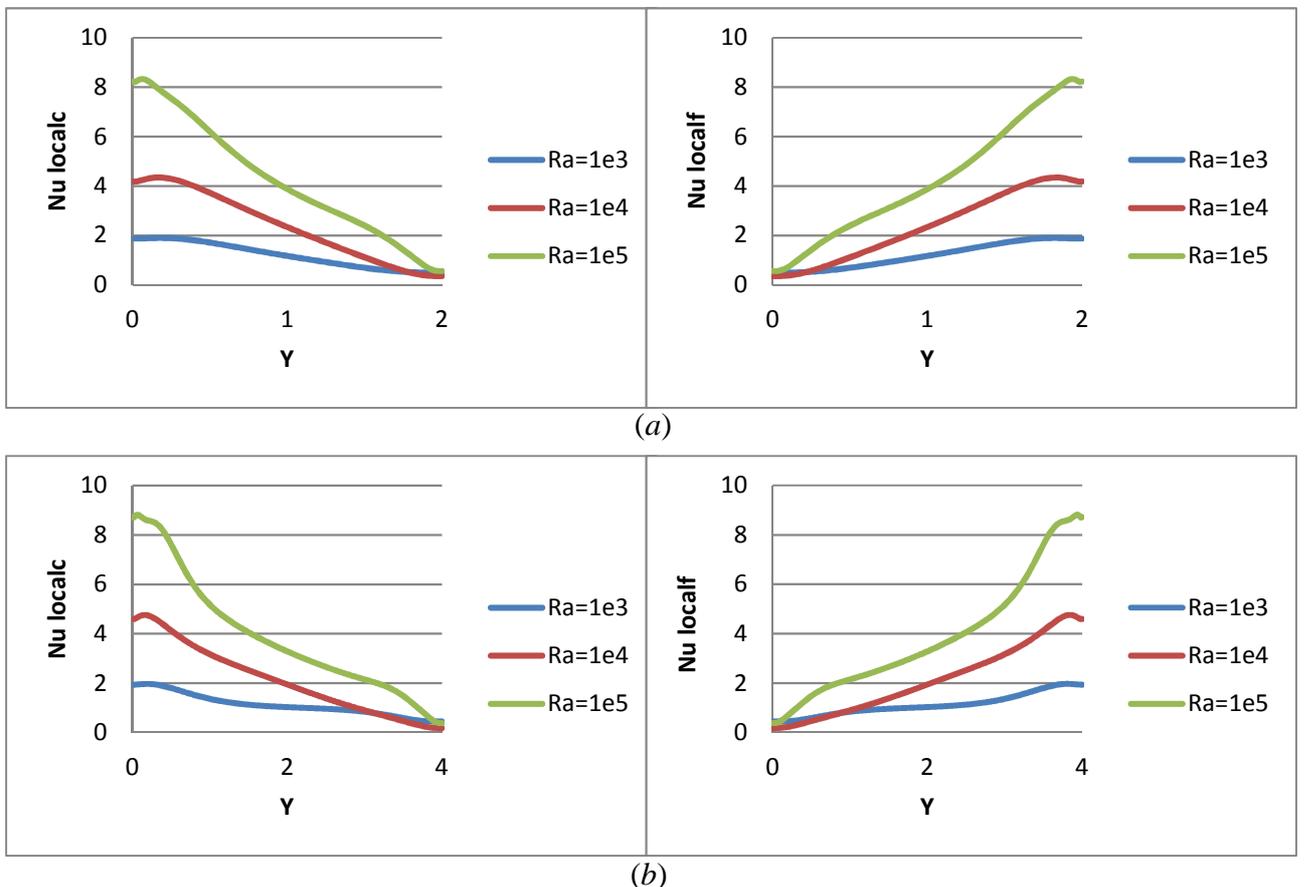


Figure.IV.15. La variation du nombre de Nusselt local dans les parois active pour Différent aspect A (a) $A=0.5$, (b) $A=0.25$

Ces figures montrent qu'il y a un phénomène de convection à proximité des endroits actifs, notamment pour un nombre de Rayleigh élevé, de l'ordre de 10^5 . On remarque qu'à chaque fois qu'on augmente le nombre de Rayleigh et le rapport d'aspect, les isothermes se rapprochent les unes par rapport aux autres et se condensent près des situations actives, et Pour des nombres de Rayleigh égaux à 10^3 et 10^4 et quel que soit la géométrie de la cavité (A), on constate l'existence d'une zone stagnante au centre de la cavité, ce qui signifie que l'échange thermique s'effectue d'une manière intense aux coins de la cavité.

La **Figure.IV.15**. Représente la variation du nombre de Nusselt local le long des parois active chaude et froid.

IV.4.1.3. Nombre de Nusselt Moyen en Fonction du Rapport d'aspect :

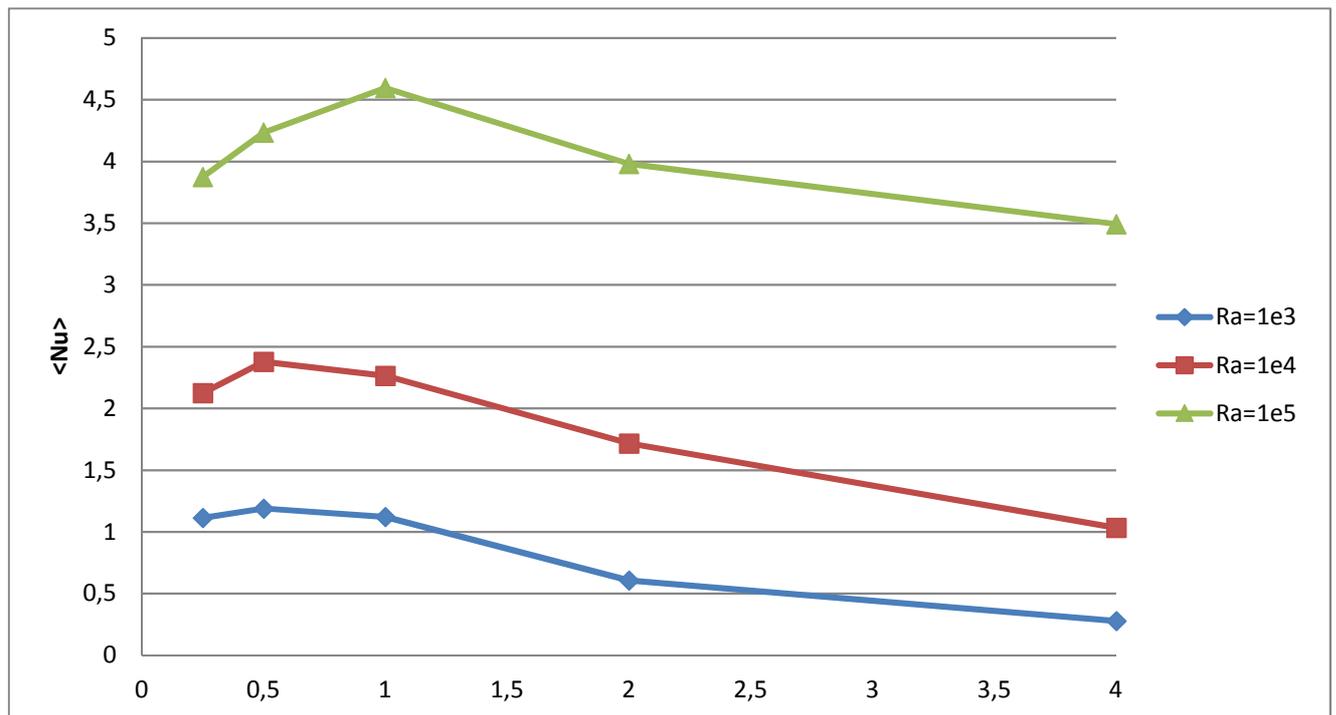


Figure.IV.16. La variation du nombre de Nusselt moyenne sur la paroi chaude en fonction de rapport d'aspect A pour les trois nombres de Rayleigh

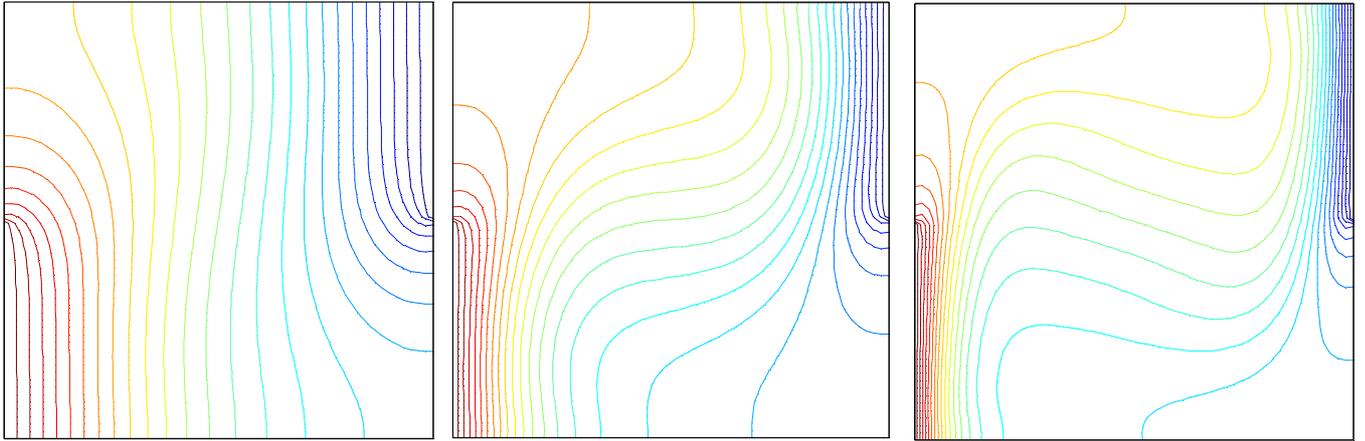
On peut remarquer que la première configuration $A < 1$ (cavité verticale) permet d'atteindre des valeurs de Nusselt plus élevées (jusqu'à 4,3 pour $Ra=10^5$) alors que dans la configuration de cavité verticale, le Nusselt ne dépasse pas la valeur de 3,5, pour l'intervalle des rapports d'aspect, considéré.

IV.4.2. Cavité Carré Avec Variation de la Partie Active :

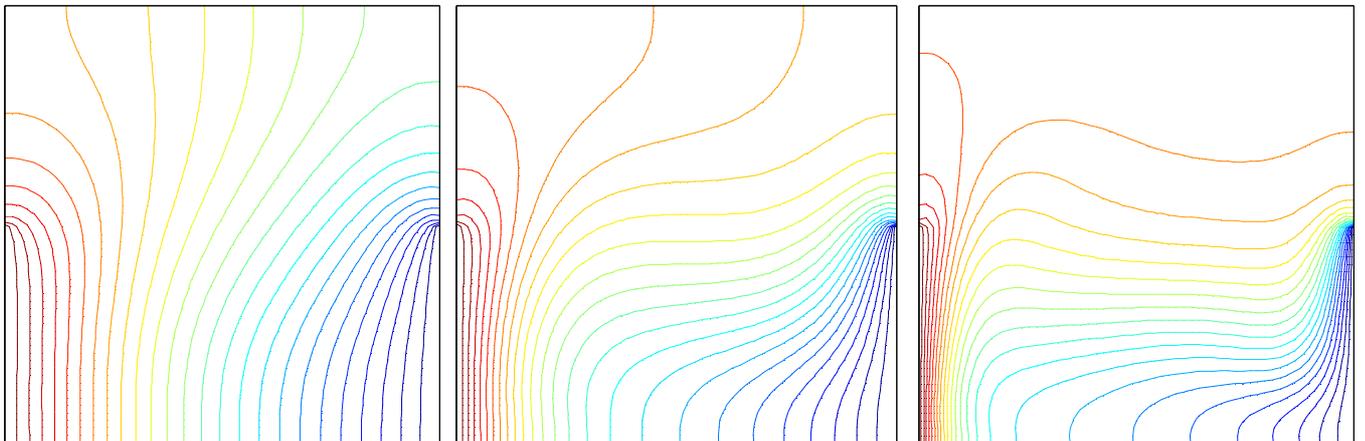
Pour cela nous avons considéré cinq modèles de la cavité avec variation de la partie active tel que :

- M_1 : Partie chaude en bas et partie froide en haut ;
- M_2 : Les deux Parties chaude et froide en bas ;
- M_3 : Les deux Parties chaude et froide en haut ;
- M_4 : Partie chaude en haut et partie froide en bas ;
- M_5 : Les deux Parties chaude et froide au milieu.

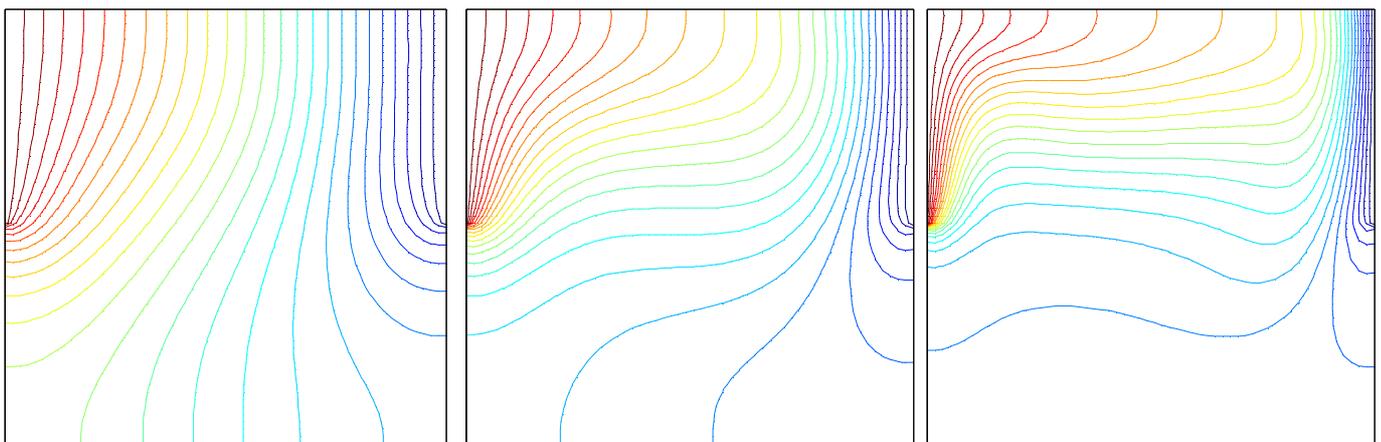
IV.4.2.1. Les Isothermes :



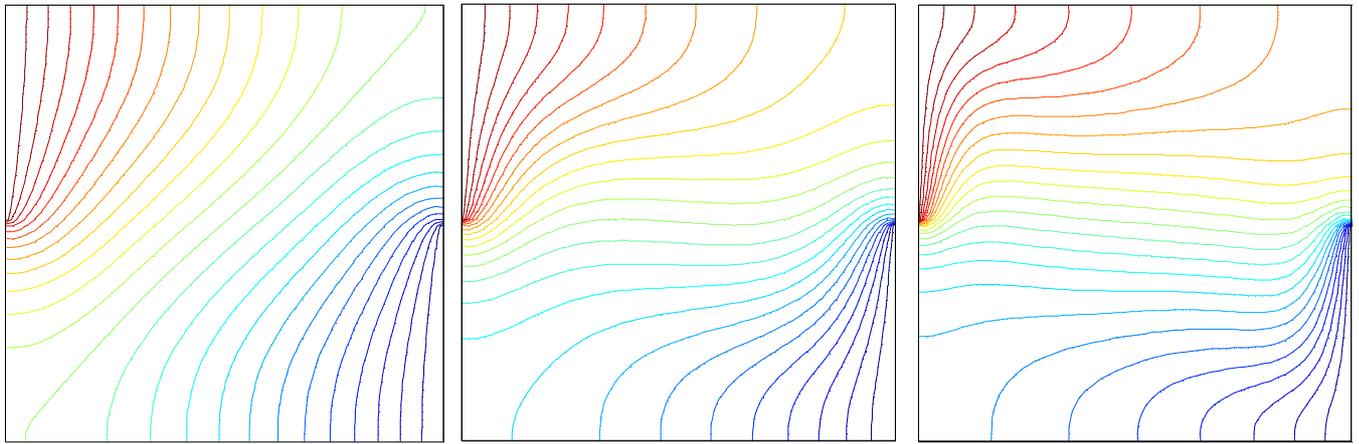
Partie chaude en bas et partie froide en haut



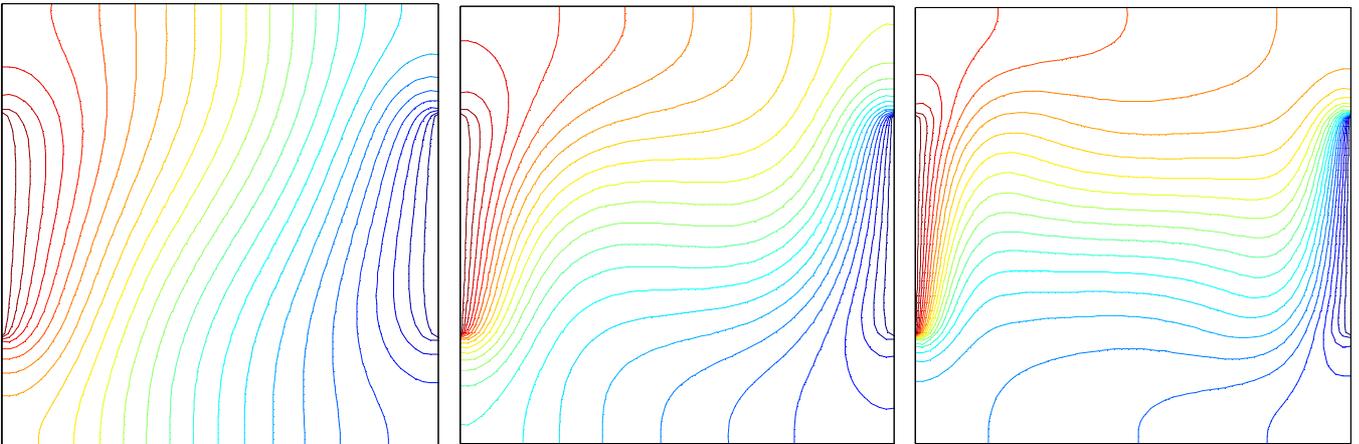
Les deux Parties chaude et froide en bas



Les deux Parties chaude et froide en haut



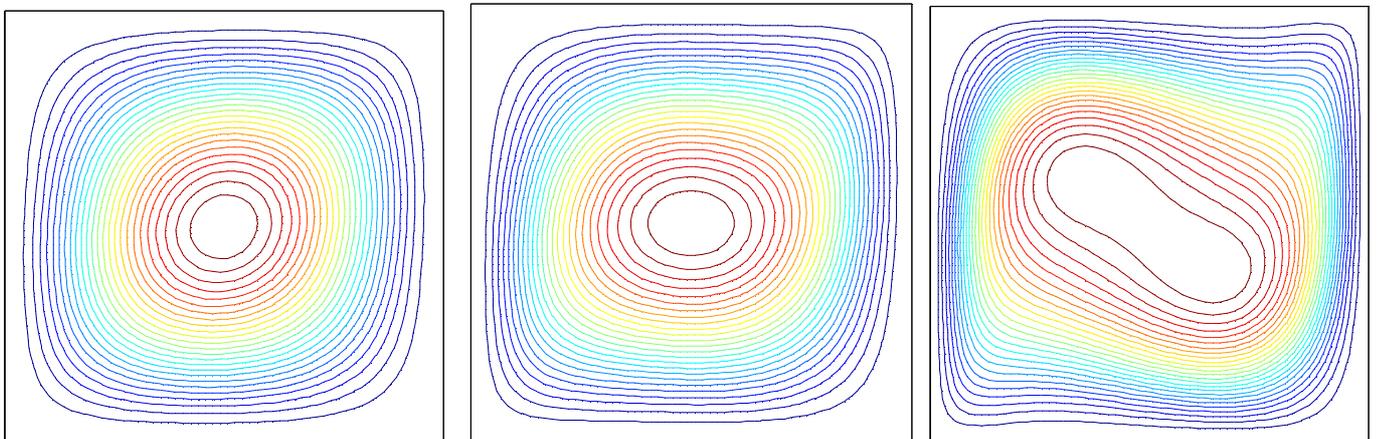
Partie chaude en haut et partie froide en bas



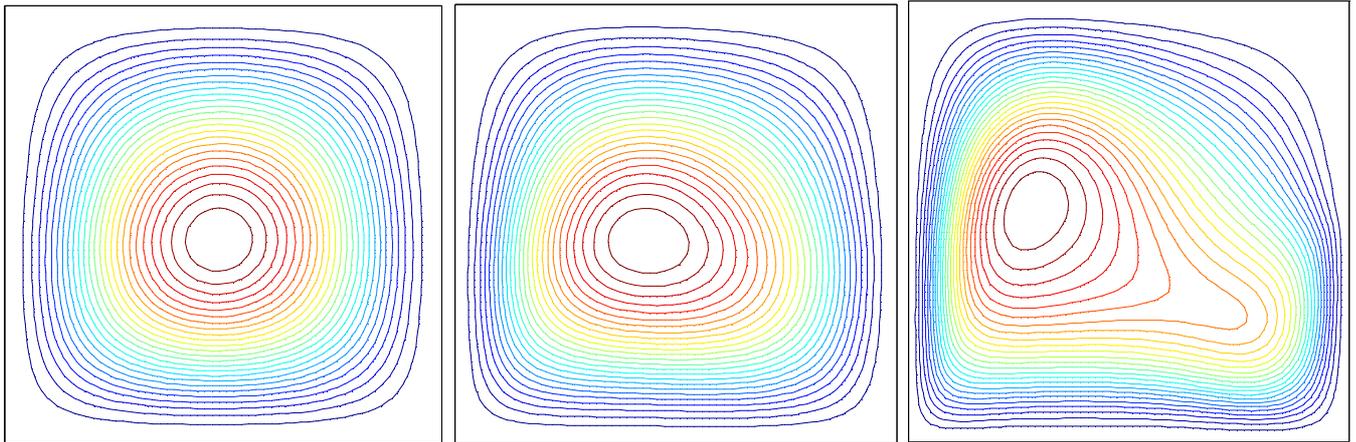
Les deux Parties chaude et froide au milieu

Figure.IV.17. Les isothermes pour différent Nombre de Rayleigh et pour les différents modèles

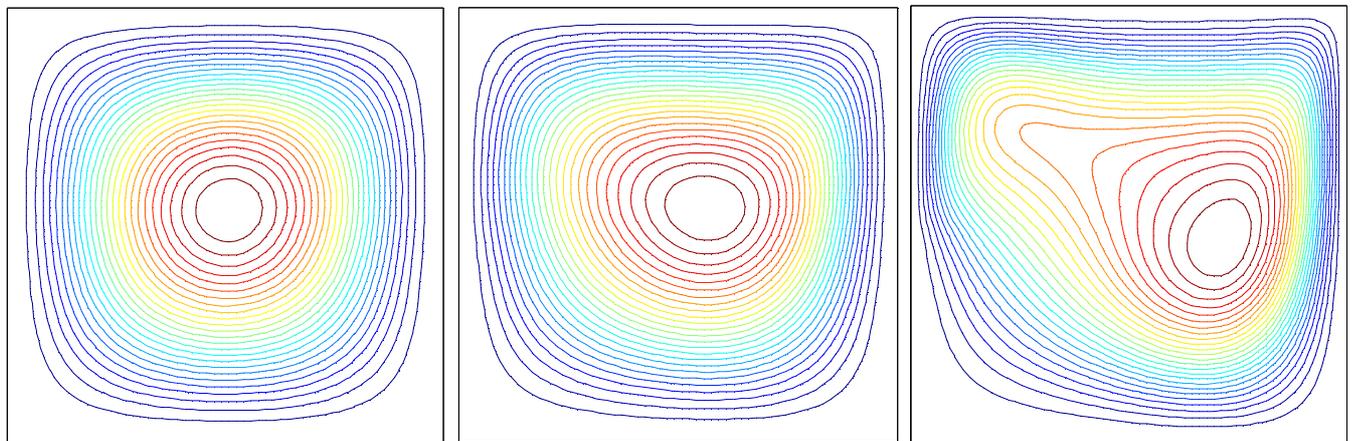
IV.4.2.2. Les Lignes de Courant :



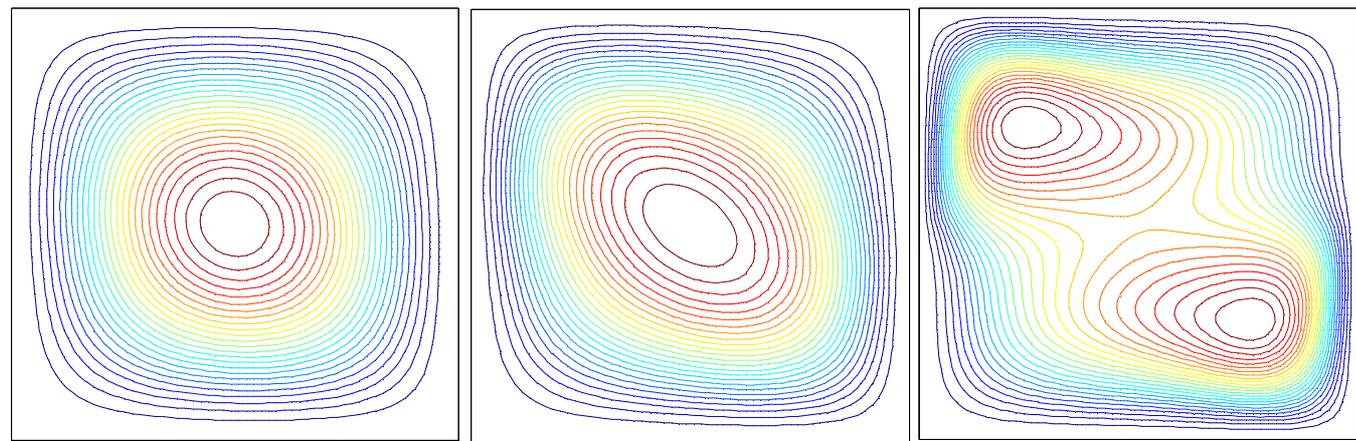
Partie chaude en bas et partie froide en haut



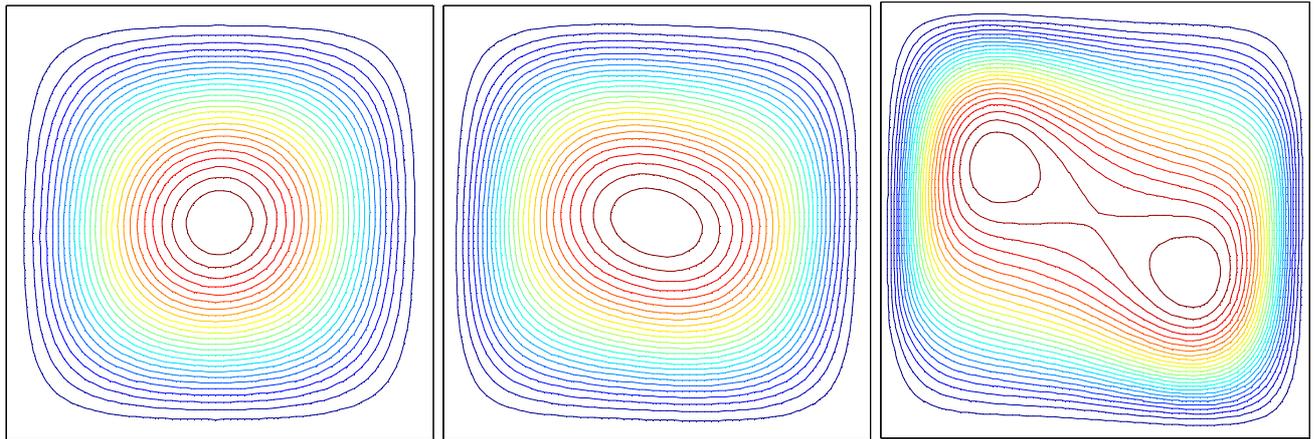
Les deux Parties chaude et froide en bas



Les deux Parties chaude et froide en haut



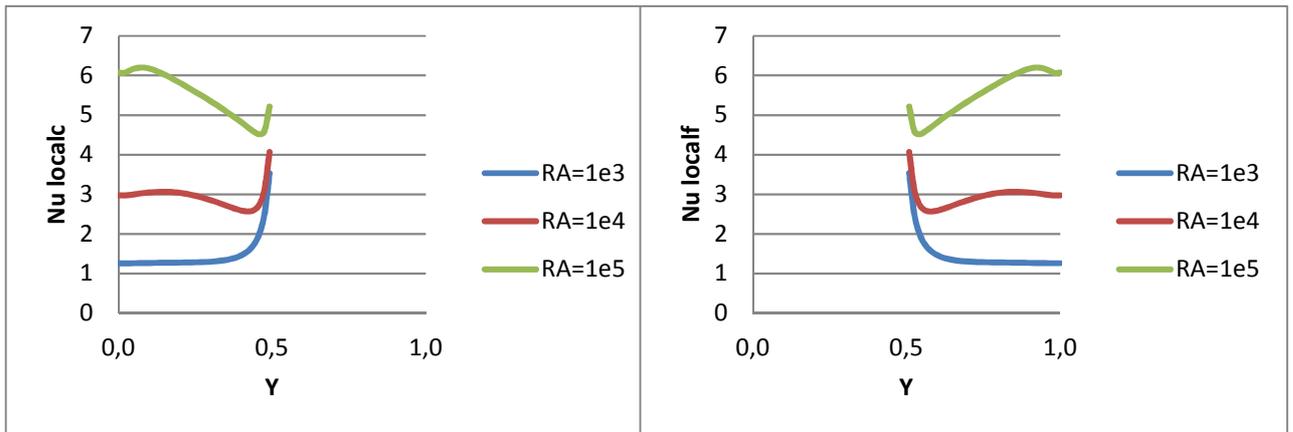
Partie chaude en haut et partie froide en bas



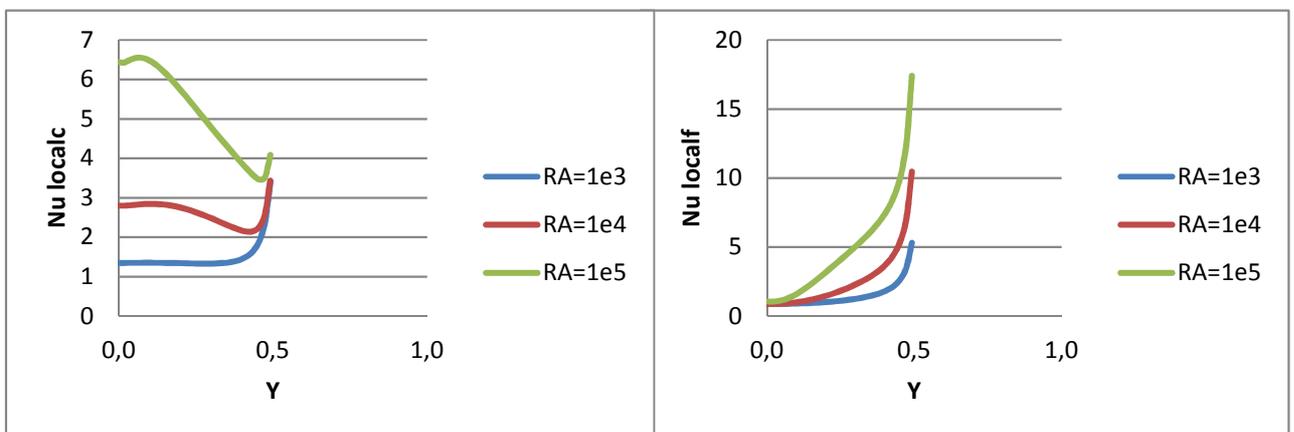
Les deux Parties chaude et froide au milieu

Figure.IV.18. Les ligne de courent pour différent Nombre de Rayleigh et pour les différents modèles

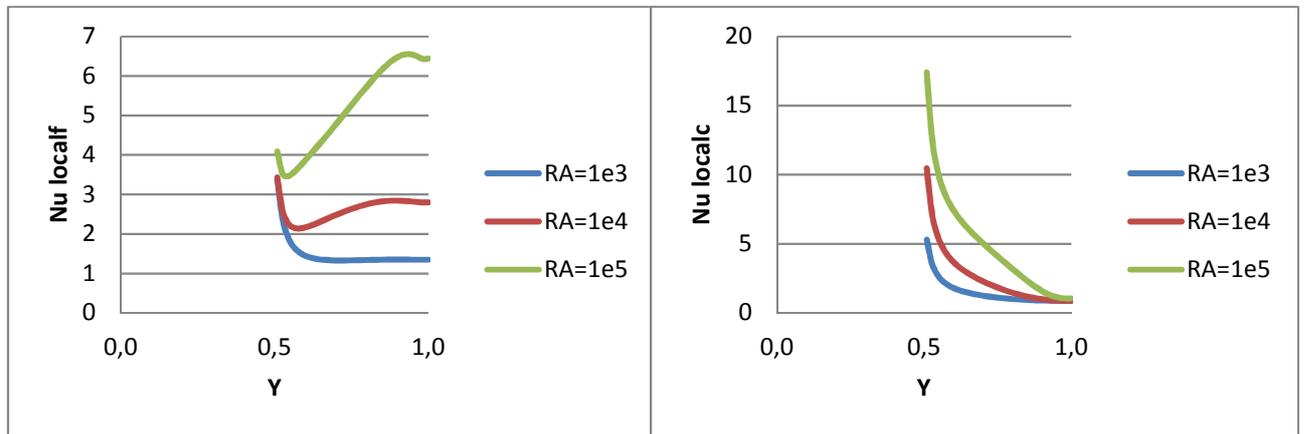
IV.4.2.3. Nombre de Nusselt Local :



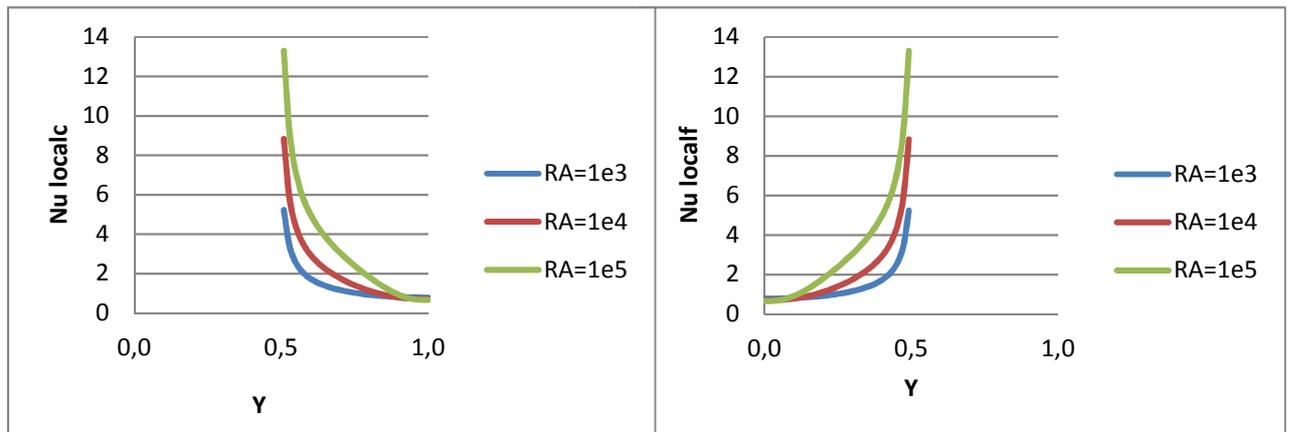
Partie chaude en bas et partie froide en haut



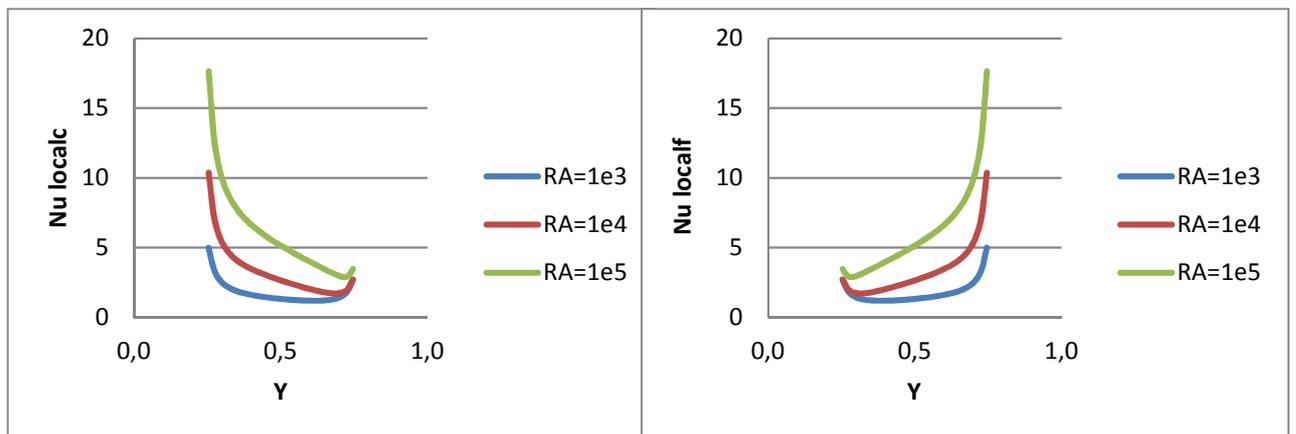
Les deux Parties chaude et froide en bas



Les deux Parties chaude et froide en haut



Partie chaude en haut et partie froide en bas



Les deux Parties chaude et froide au milieu

Figure.IV.19. La variation du nombre de Nusselt local dans les parois active pour les différents modèles

Les figures (IV.17 et IV.18) représentent les isothermes et les lignes de courant pour les différentes configurations de la cavité carrée avec variation de la partie active et pour des différents nombres de Rayleigh allant de 10^3 à 10^5 , l'écoulement est monocellulaire représenté par une grande cellule dans les lignes de courant de forme elliptique ; ceci est expliqué par la trajectoire du fluide. La particule fluide s'échauffe près de la paroi chaude et sa densité diminue (sera légère) et elle remonte à cause de la force d'Archimède (Flottabilité) puis sa trajectoire sera modifiée par la présence de la paroi horizontale supérieure. En se rapprochant de la paroi froide, la particule perd sa chaleur (son énergie cinétique) et se refroidit (s'alourdit) et redescend le long de la paroi froide avec une trajectoire qui sera encore modifiée par la présence de la paroi horizontale inférieure. Et nous remarquons aussi que le modèle M_5 est plus efficace que le modèle normal (modèle de Davis) tel que M_5 donne le même résultat thermique que le modèle de validation avec moins d'énergie thermique.

IV.4.2.4. Nombre de Nusselt Moyen :

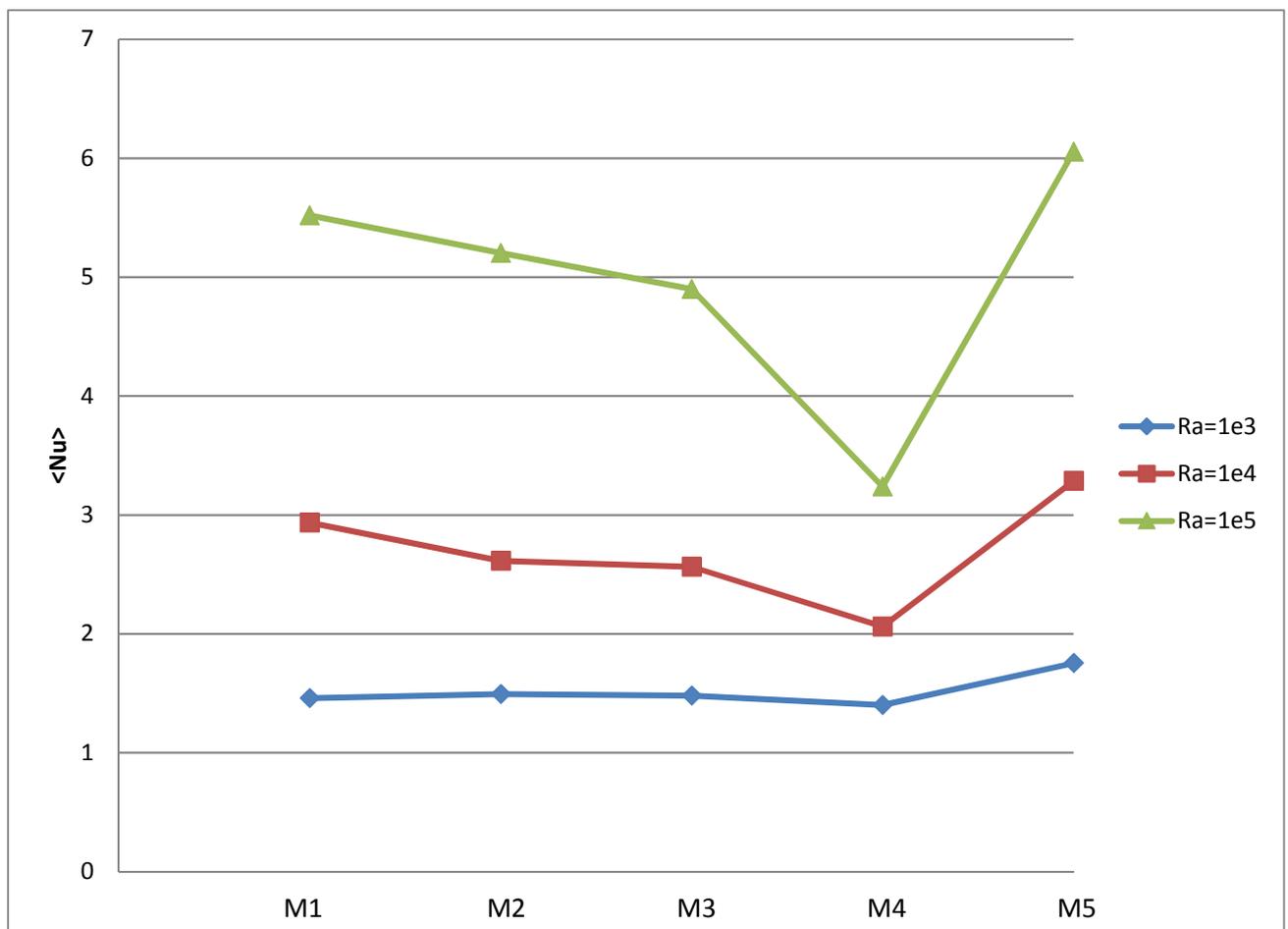


Figure.IV.20. La variation du nombre de Nusselt moyen dans la paroi active chaude en fonction des différents modèles pour différents nombre de Rayleigh

La figure IV.20 explique totalement la domination du modèle M_5 (les deux parties actives au milieu) par un taux de transfert de chaleur maximale allant jusqu'à 6 pour Nusselt moyen en $Ra=10^5$, on conclut que la position de la partie active a une influence directe sur les résultats et sur le taux de transfert de chaleur.

IV.4.3. Cavité Carré avec Ailettes Adiabatiques :

Pour cela nous avons choisi une cavité carrée avec des ailettes tel-que nous avons varié la hauteur de l'ailette $H_a = (0.25, 0.50, 0.75)$ et sa position soit bas ou haut pour différent nombre de Rayleigh.

IV.4.3.1 Cavité Carré avec Ailettes Adiabatique en Bas :

IV.4.3.1.1. Les Isothermes :

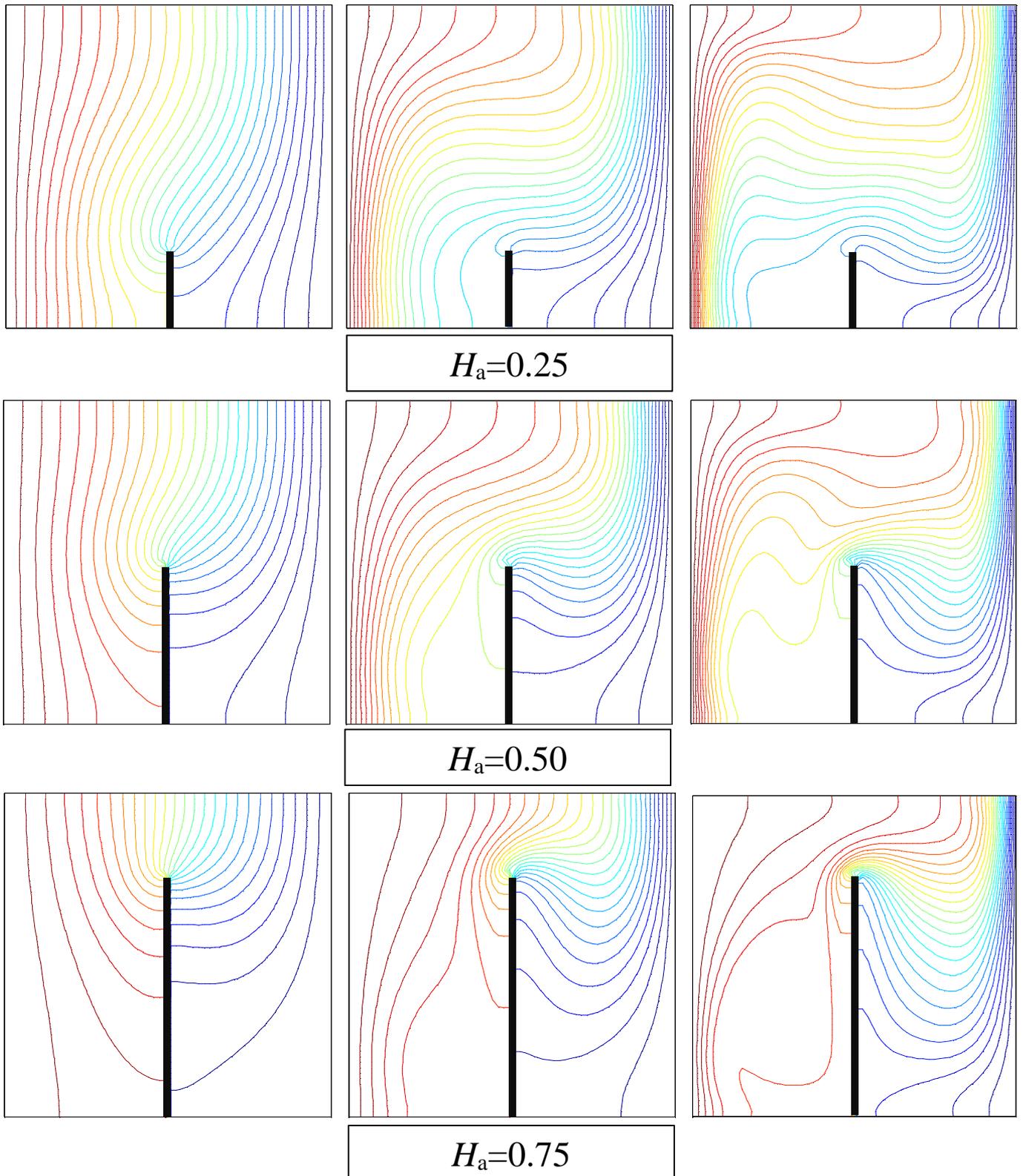


Figure.IV.21. Les isothermes pour différents Nombre De Rayleigh et pour les différents modèles $H_a = (0.25, 0.50, 0.75)$.

IV.4.3.1.2. Les Lignes De Courant :

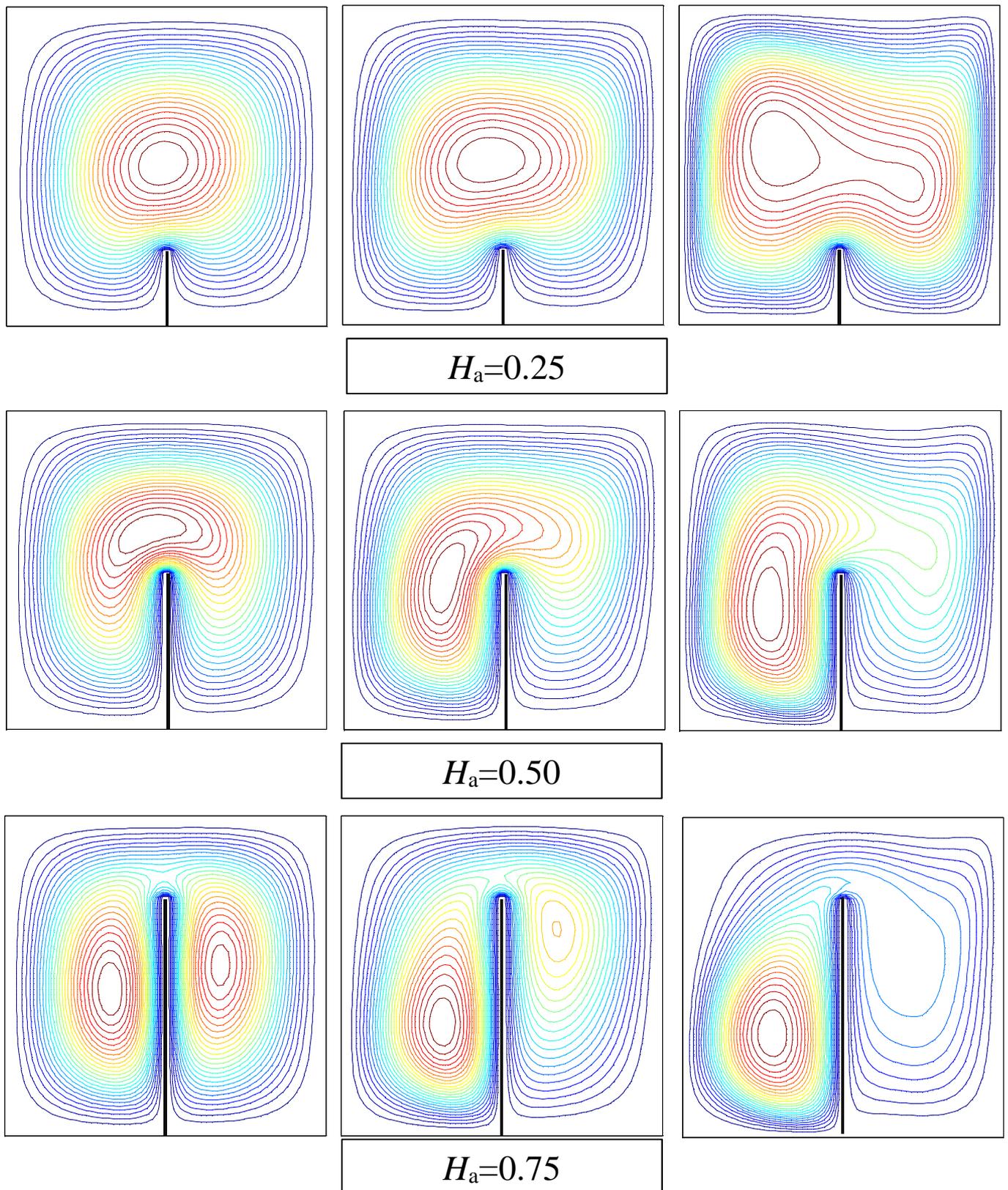


Figure.IV.22. Les lignes de courant pour différent Nombre de Rayleigh et pour les différents modèles $Ha=$ (0.25, 0.50, 0.75).

IV.4.3.1.3. Nombre de Nusselt Local

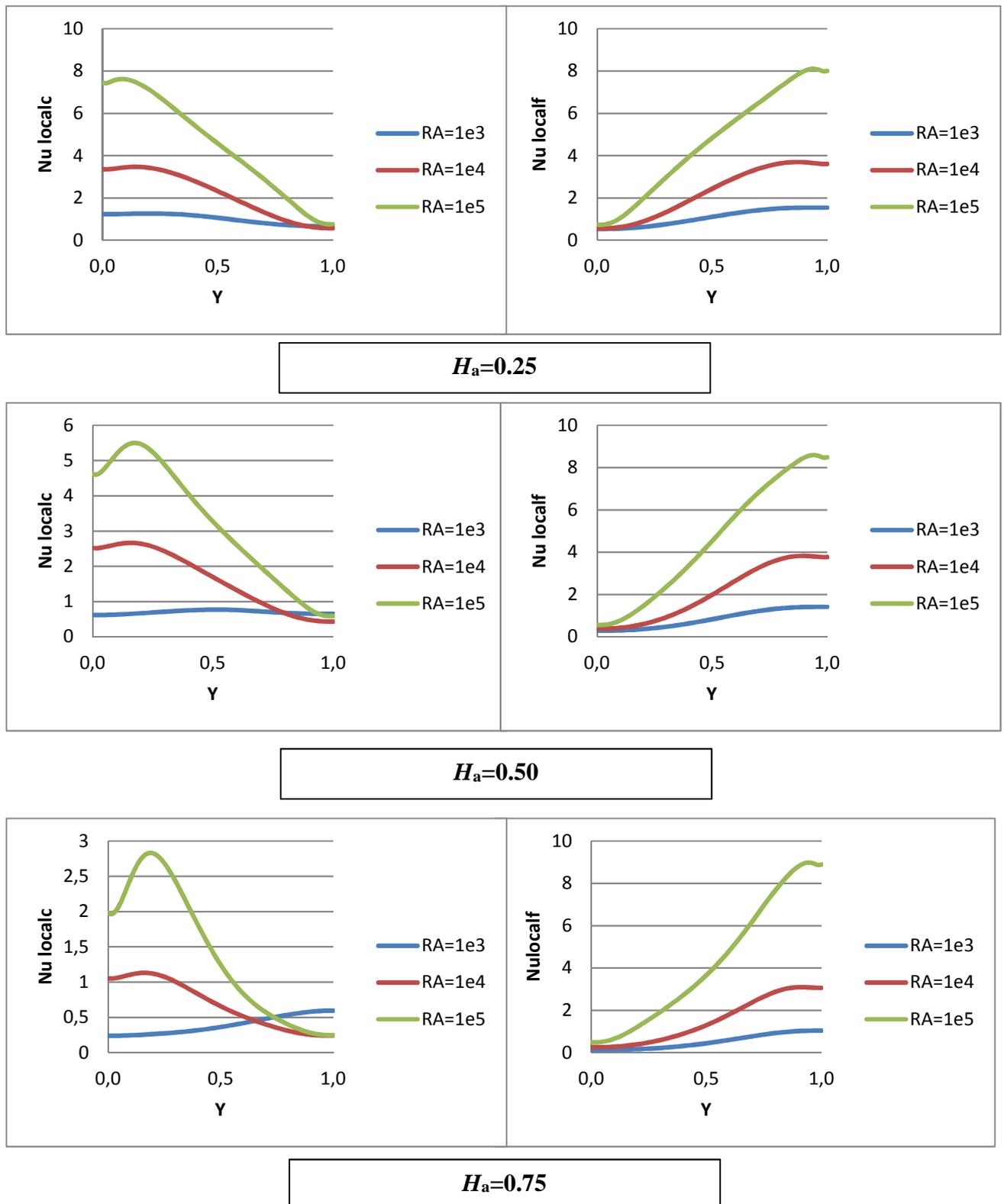


Figure.IV.23. La variation du nombre de Nusselt local pour les deux parois active en fonction de différent Nombre de Rayleigh et pour les différents modèles d'ailettes $H_a = (0.25, 0.50, 0.75)$.

Pour les faibles nombres de Rayleigh et avec l'ailette la plus courte ($H_a = 0,25$), on observe une grande cellule tournante dans le sens des aiguilles d'une montre pour toutes les positions d'ailette.

Cette cellule est appelée vortex primaire. Pour cette longueur d'ailette, et pour les longueurs d'ailette plus grand on a observé deux zones de recirculation, Et pour l'isotherme on a remarqué la domination de la zone chaude est spécifiquement pour les tailles d'ailettes les plus grandes, C'est ce qui est clair et évident pour nous dans les variations du nombre de Nusselt dans la figure (IV.23)

IV.4.3.2. Cavité Carré avec Ailettes Adiabatique en haut :

IV.4.3.2.1. Les Isothermes :

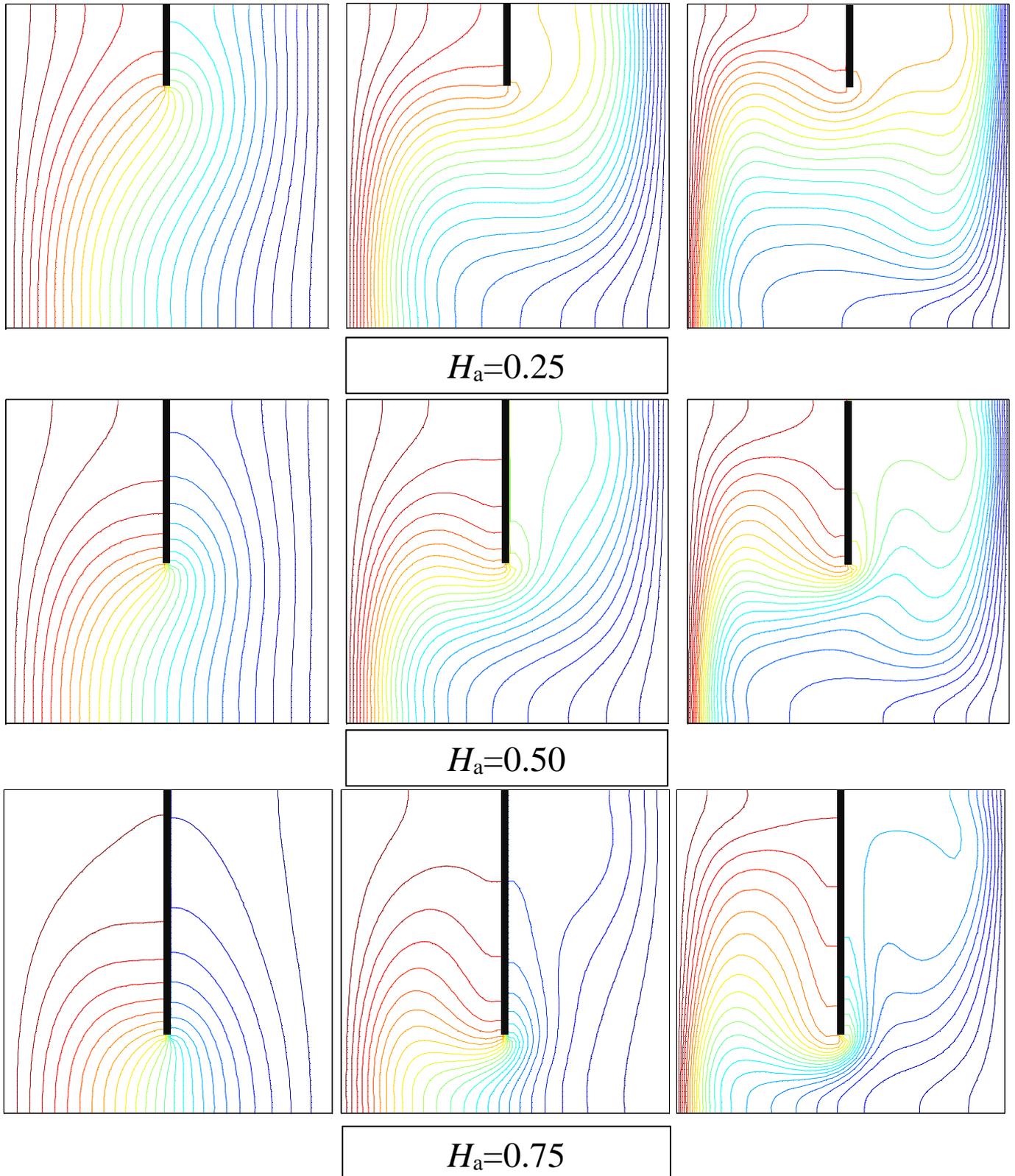


Figure.IV.24. Les isothermes pour différent Nombre de Rayleigh et pour les différents modèles $H_a= (0.25, 0.50, 0.75)$.

IV.4.3.2.2. Les Lignes de Courent :

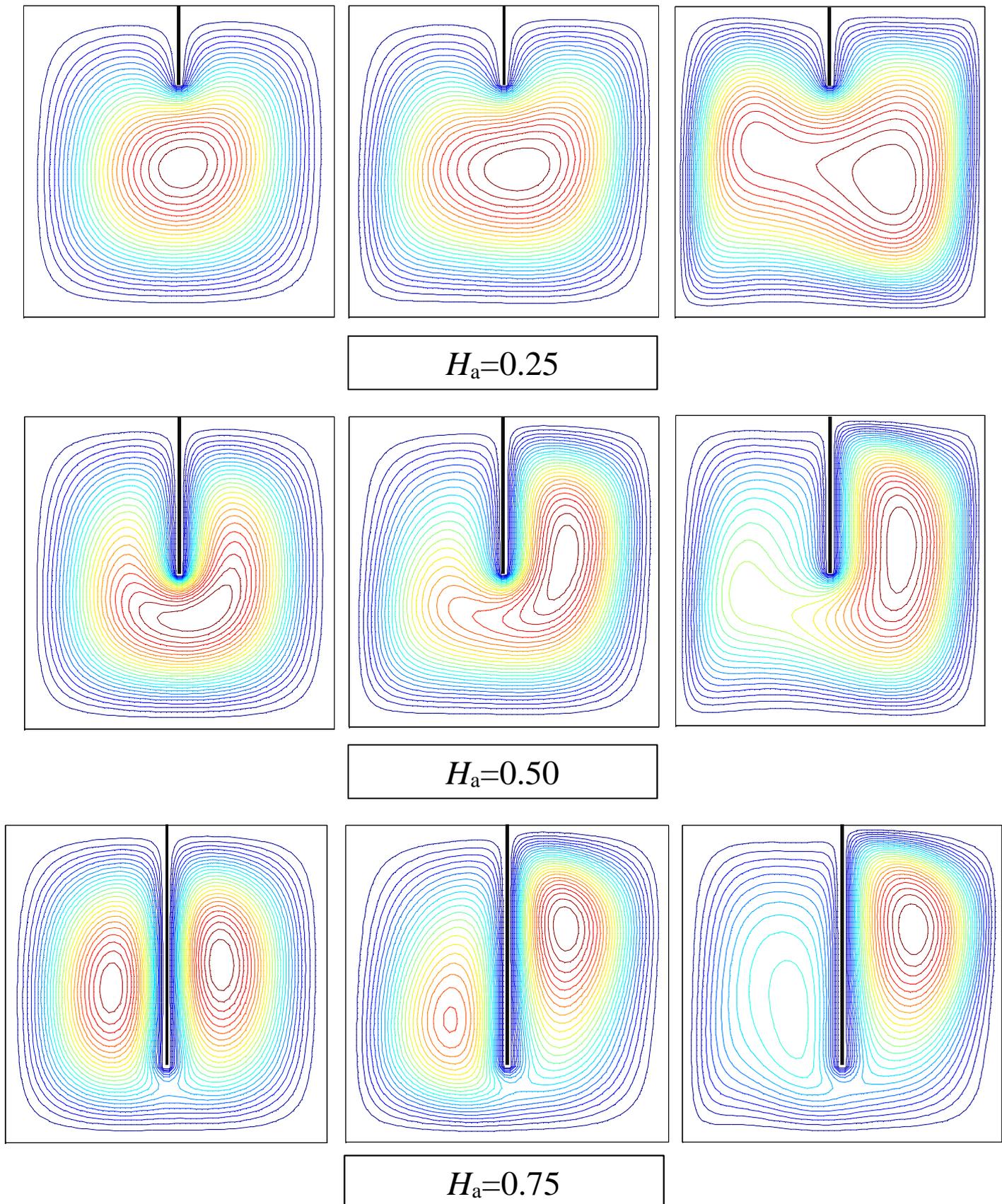


Figure.IV.25. Les lignes de courant pour différent Nombre de Rayleigh et pour les différents modèles= (0.25, 0.50, 0.75).

IV.4.3.2.3. Nombre de Nusselt Local :

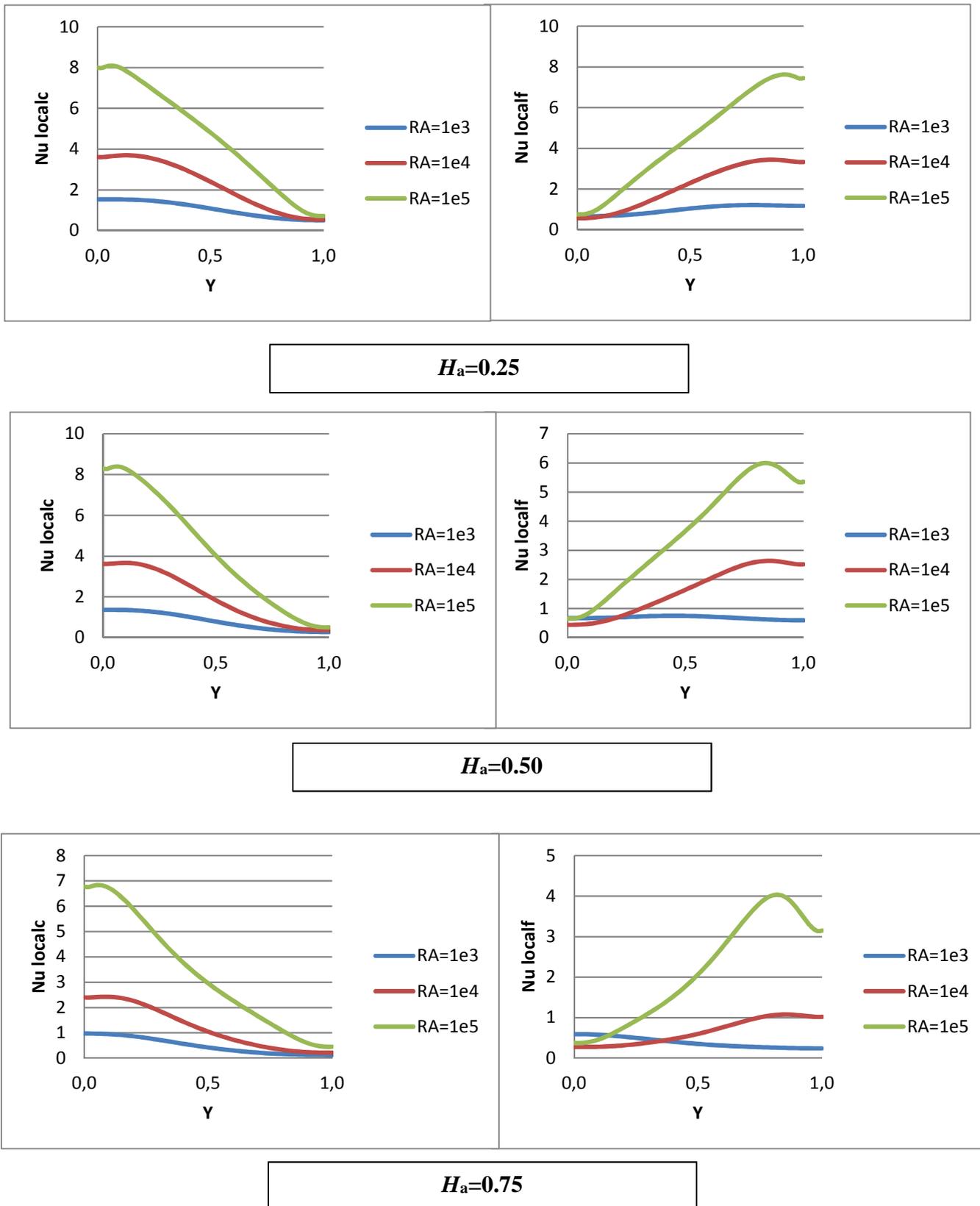


Figure.IV.26.la variation du nombre de Nusselt local pour les deux parois active en fonction de hauteur de cavité pour différents Nombre de Rayleigh et pour les différents modèles $H_a = (0.25, 0.50, 0.75)$.

Dans les figures (IV.24 et IV.25) les isothermes et les lignes de courant sont présentés pour une cavité différentiellement chauffée avec variation de la taille des ailettes ($Ha=0.25, 0.5$ et 0.75) positionnée en haut, nous avons remarqué la domination du refroidissement par rapport à l'échauffement pour un nombre de Rayleigh supérieur à 10^4 , c'est ce qui est clair dans les graphes de nombre de Nusselt local dans la figure (IV.26) par des valeurs faible pour Nusselt local dans la paroi froid par rapport à la paroi chaude

IV.4.3.3. Nombre de Nusselt Moyen :

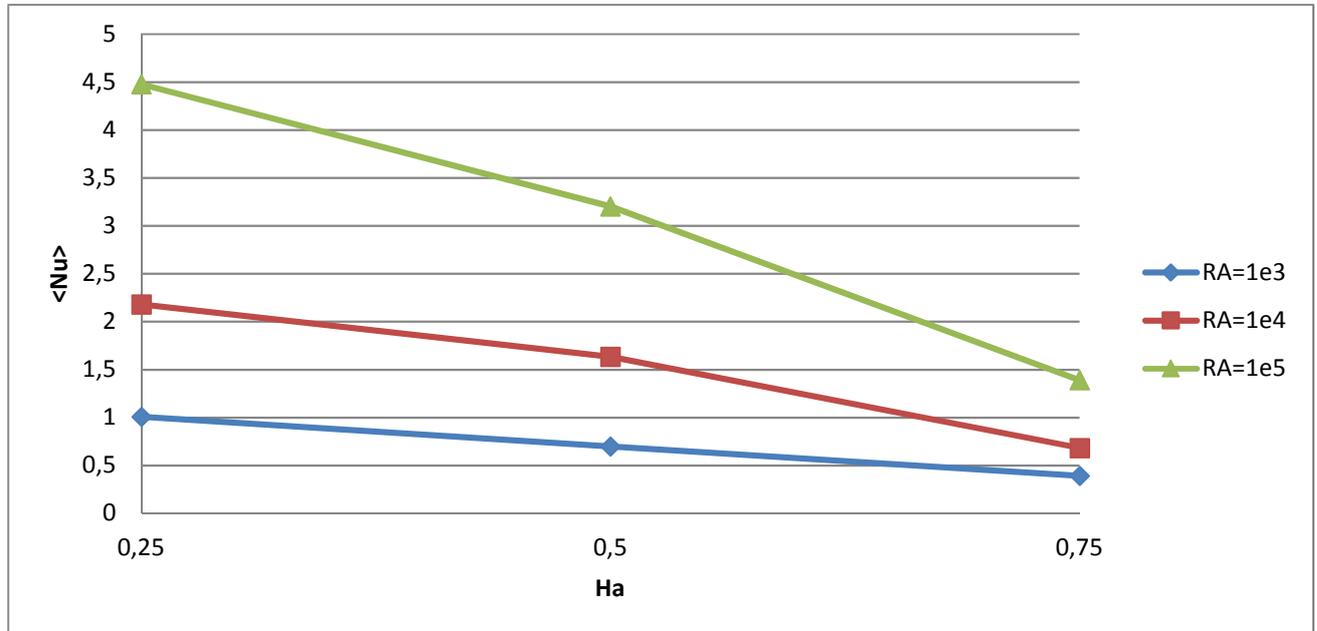


Figure.IV.27. La variation du nombre de moyen dans la paroi active chaude de la cavité avec ailette en bas en fonction des différents modèles pour les différents nombres de Rayleigh

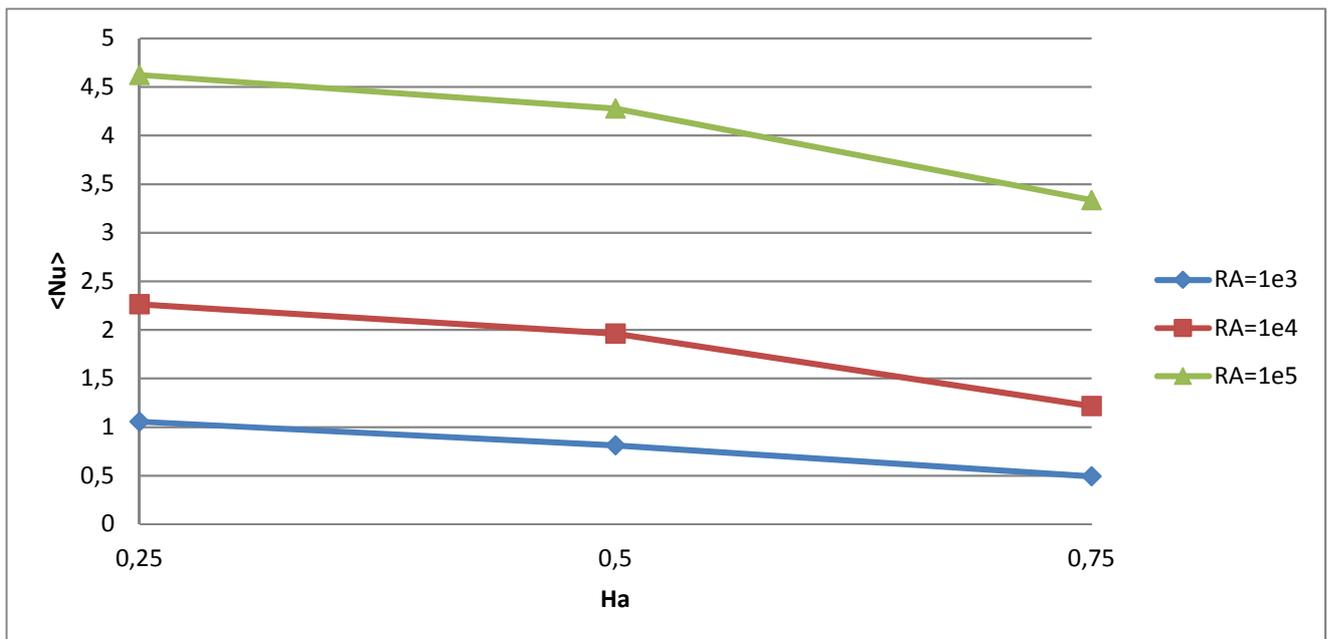


Figure.IV.28. La variation du nombre de moyen dans la paroi active chaude de la cavité avec ailette en haut en fonction des différents modèles pour les différents nombres de Rayleigh

Les figures (**IV.27** et **IV.28**) montrent la variation du nombre de Nusselt moyen sur les parois chaude pour les deux configurations d'ailettes en bas et on haut en fonction des différents modèles pour les différents nombres de Rayleigh, on observe une augmentation du nombre de Nusselt moyen avec la diminution de la longueur de l'ailette

IV.5. Conclusion :

Nous nous sommes intéressées dans ce chapitre aux principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyses des divers résultats sont également présentés.

Conclusion Général

Conclusion Général

Dans ce mémoire, on a présenté une étude numérique du transfert de chaleur par convection naturelle instationnaire dans une cavité. Les configurations géométriques étudiées du modèle physique sont une cavité carrée avec variation des parties actives ou avec ailettes ou cavité rectangulaire avec variation de rapport d'aspect, soumise à un gradient de température horizontal. Les conditions aux frontières sont de type Dirichlet (températures imposées) et pour les parois verticales et de type Neumann (flux de chaleur nul) pour les parois horizontales.

En se basant sur la méthode des différences finies pour discrétiser les équations mathématiques, nous avons pu déterminer les lignes de courant, les isothermes ainsi que les variations du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh, pour les différentes longueurs sans dimensions de la partie active chaude et froide de la cavité.

Les résultats de simulation numérique sont obtenus avec notre code de calcul élaboré par MATLAB et validés nos résultats avec ceux des autres auteurs.

La détermination du champ d'écoulement nous a permis d'analyser le comportement du fluide à l'intérieur de chaque cavité. Pour un nombre faible de Rayleigh, de l'ordre de 10^3 , on a remarqué la dominance du mode de transfert de chaleur par conduction. Au-delà de cette valeur, la convection domine et apparaît d'une manière plus claire pour $Ra = 10^5$.

Dans les travaux futurs, il nous semble intéressant d'élargir ce travail par des études complémentaires pour mieux comprendre ce phénomène de convection naturelle dans les cavités, pour cela nous suggérons ce qui suit :

- Une étude tridimensionnelle expérimentale et numérique de ce phénomène.
- Des régimes turbulents avec un nombre de Rayleigh $>10^6$
- L'influence de la source de chaleur interne ou un composant électronique.
- L'influence de la forme de la cavité (triangle, parallélogramme...)
- L'influence de l'inclinaison de la cavité.
- La génération de l'entropie dans les cavités.

Références Bibliographiques

- [1] De Vahl Davis G., (1983), Natural convection of air in a square cavity. A benchmark numerical solution, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 3, pp. 249-264.
- [2] De Vahl Davis G., Kettleborough C.F., Natural Convection in an Enclosed Rectangular cavity, *Trans. I. E. Aust.*, MC1, pp. 43-49 (1968).
- [3] De Vahl Davis G., Laminar natural convection in an enclosed rectangular cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 11, pp. 1675-1693 (1960).
- [4] Valencia A., Frederick R.L., (1989), Heat transfer in square cavities with partially active vertical walls, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 32, pp. 1567-1574.
- [5] G.A. Sheikhzadeh, A. Arefmanesh, M.H. Kheirkhah, R. Abdollahi. Natural convection of Cu-water nanofluid in a cavity with partially active side walls, *European Journal of Mechanics B/Fluids* 30, 166–176 (2011).
- [6] M.M. El-Refaee, M.M. Elsayed, N.M. Al-Najem, A.A. Noor. Natural convection in partially cooled tilted cavities. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 28, pp. 477–499 (1998).
- [7] V. Prasad, F. A. Kulacki. « Convective heat transfer in a rectangular porous cavity effect of aspect ratio on flow structure and heat transfer ». *J. Heat Transfer* 106, pp.158-165 (1984).
- [8] E. K. Lakhal, M. Hasnaoui, E. Bilgen and P. Vasseur, Natural Convection in Inclined Rectangular Enclosures with Perfectly Conducting Fins Attached on the Heated Wall, *Heat Mass Transfer*, 32, 365–373 (1997).
- [9] X. Shi and J. M. Khodadadi, Laminar Natural Convection Heat Transfer in a Differentially Heated Square Cavity Due to a Thin Fin on the Hot Wall., *J. Heat Transfer*, 624-125 (2003).
- [10] S. H. Tasnim and M. R. Collins, Numerical analysis of heat transfer in square cavity with baffle on the hot wall, *Int. Comm. Heat Transfer*, Vol. 31 (No. 5), 639-650 (2004).
- [11] A. Juel, T. Mullin, H. Ben Hadid and D. Henry, “Three-dimensional free convection in molten gallium”, *J. Fluid Mech*, 436, 267-281 (2001).
- [12] S Morsli., Simulation numérique de la convection naturelle et la génération de l’entropie dans les cavités, Université des Sciences et de la Technologie d’Oran, Thèse Doctorat (2015)
- [13] H Salhi., Etude numérique de la convection naturelle dans les enceintes : nanofluide, Université De Batna, Thèse Doctorat (2015)
- [14] N Ibrir., Etude de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire contenant du métal liquide, Université de Batna, Mémoire Magistère (2006).
- [15] A Trabelsi., Etude de l’échange thermique dans une cavité rectangulaire avec deux côtés partiellement actifs, Université KASDI MERBAH de Ouargla, Mémoire Magistère (2011).

[16] M BERIACHE M'hamed., Simulation Numérique de la Conduction de Chaleur en 03 Dimensions par la Méthode des Différences Finies en Régimes Permanent et Variable, Université HASSIBA BENBOUALI Chlef, Mémoire Magister (2004).

[17] A. Abidi. Convection naturelle laminaire conjuguée dans une enceinte avec bloc conducteur au milieu. Mémoire de magister, option procédés et énergétique, Université KASDI MERBEH Ouargla (2009).

[18] H Benhacine., Etude De L'écoulement Convectif D'un Fluide Dans Une Cavite, Université MENTOURI Constantine, Memoire Magister (2010).

[19] Help MATLAB.

Annexe A :

Les équations principales dans le code de calcul élaboré par MATLAB :

L'équation de Température :

```
%equation de température
Tn=T;
for i=2:nx-1
    for j=2:ny-1
        T(i,j)=(A*U(i,j)*[T(i-1,j)-T(i+1,j)])+(B*V(i,j)*[T(i,j-1)-T(i,j+1)])+...
            (C*[T(i+1,j)+T(i-1,j)-(2*T(i,j))])+(D*[T(i,j+1)+T(i,j-1)-(2*T(i,j))])+T(i,j);
    end
end
```

L'équation de vorticité :

```
%la vorticité omega
omn=om;
for i=2:nx-1
    for j=2:ny-1
        om(i,j)=(A*[U(i-1,j)*om(i-1,j)]-(U(i+1,j)*om(i+1,j)))+(B*[V(i,j-1)*om(i,j-1)]-...
            (V(i,j+1)*om(i,j+1)))+(Pr*[C*[om(i+1,j)+om(i-1,j)-(2*om(i,j))]+D*[om(i,j+1)+om(i,j-1)-...
            (2*om(i,j))])]+(Ra*Pr*A)*(T(i+1,j)-T(i-1,j)))+om(i,j);
    end
end
```

L'équation de fonction de courant :

```
%le courant psi
phn=ph;
for i=2:nx-1
    for j=2:ny-1
        ph(i,j)=[((ph(i+1,j)+ph(i-1,j))/(dx^2))+((ph(i,j+1)+ph(i,j-1))/(dy^2))...
            +om(i,j)]/[2/(dx^2)+(2/(dy^2))];
    end
end
```

Résumé :

Dans ce travail, nous présentons une étude numérique du phénomène de la convection naturelle laminaire instationnaire dans plusieurs modèles d'une cavité remplie d'air différenciellement ou partiellement chauffée, Un modèle mathématique reposant sur l'approche fonction du courant-vorticité ($\psi-\omega$) est utilisé.

Les équations qui régissent ce phénomène ont été résolues par une approche numérique, basée sur la méthode des différences finies et résolu par un programme élaboré par MATLAB, pour différents nombres de Rayleigh entre 10^3 et 10^5 et les différentes configurations considérées.

Les effets de ces paramètres sur les champs thermique et dynamique et sur le taux de transfert de chaleur à travers les côtés sont présentés dans cette étude. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par d'autres auteurs.

Mots clés : convection naturelle laminaire, cavité chauffée, méthode des différences finies, MATLAB, nombres de Rayleigh.

Abstract :

In this work, we present a numerical study of the phenomenon of unsteady laminar natural convection in several models of a cavity filled with air differentially or partially heated. A mathematical model based on the function-current-vorticity ($\psi-\omega$) is used.

The equations governing this phenomenon have been solved by a numerical approach, based on the finite differences method and solved by a program developed by MATLAB, for different Rayleigh numbers between 10^3 and 10^5 and the different configurations considered.

The effects of these parameters on the thermal and dynamic fields and the rate of heat transfer across the walls are presented in this study. The results obtained are compared with those obtained by other authors.

Key words: laminar natural convection, heated cavity, finite differences method, MATLAB, Rayleigh numbers.

ملخص:

في هذا العمل، نقدم دراسة رقمية لظاهرة الحمل الحراري غير المضطرب وغير المستقر في عدة نماذج من تجويف مليء بالهواء تفاضليا أو جزئيا ومسخن،

وقد تم حل المعادلات التي تحكم هذه الظاهرة من خلال نهج رقمي، استنادا إلى طريقة الاختلافات المحدودة وحلها بواسطة برنامج وضعته ماتلاب، لمختلف أرقام رايلي بين 10^3 و 10^5 والأشكال المختلفة المدروسة.

وترد في هذه الدراسة آثار هذه الخصائص على المجالات الحرارية والديناميكية ومعدل انتقال الحرارة عبر الجدران. تتم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع تلك التي حصل عليها مؤلفون آخرون.

الكلمات الدالة: الحمل الحراري، تجويف مسخن، طريقة الاختلافات المحدودة، ماتلاب، رقم رايلي.